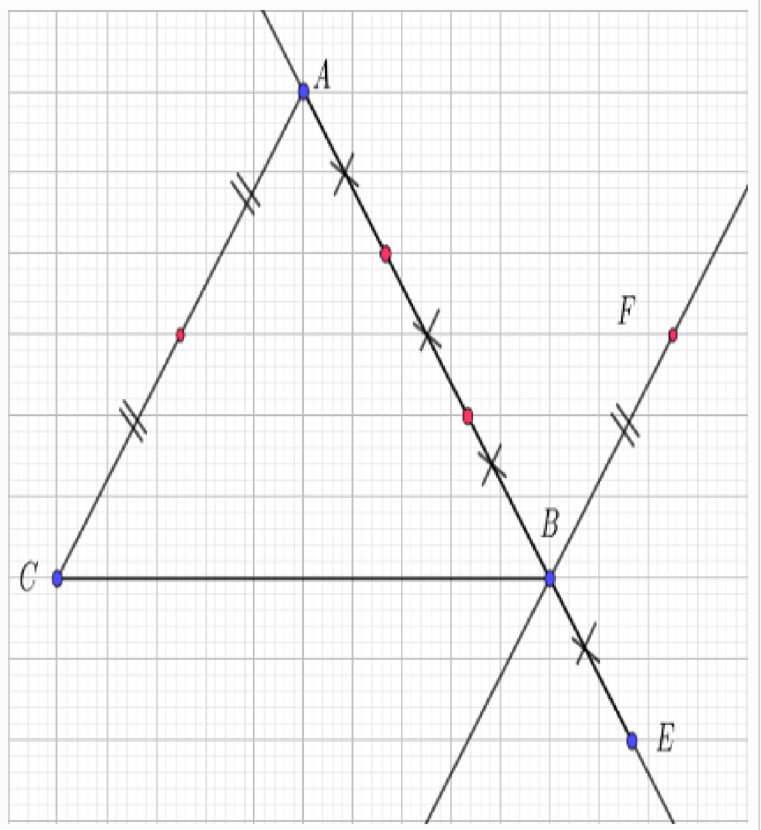
Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°6 : Calcul vectoriel dans le plan

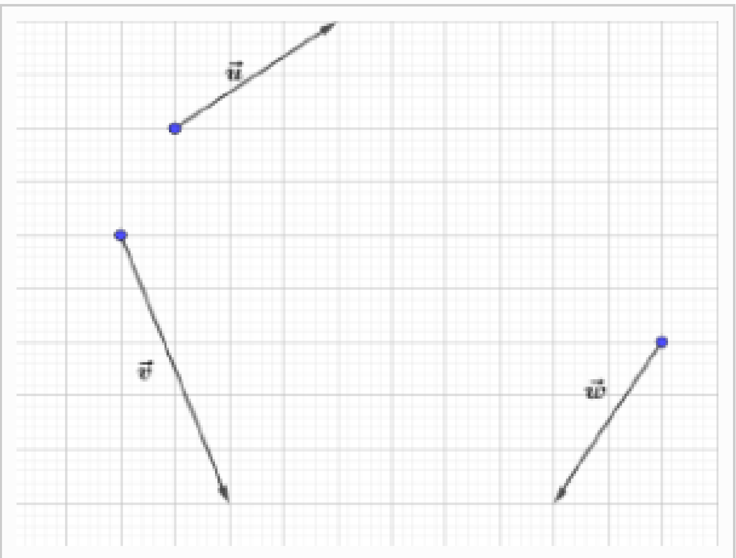
Exercice 01 : Soit ABC un triangle. Construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Correction : F est sur la parallèle à (AC)passant par B et $\overrightarrow{BF}$ a le sens contraire de $\overrightarrow{AC}$

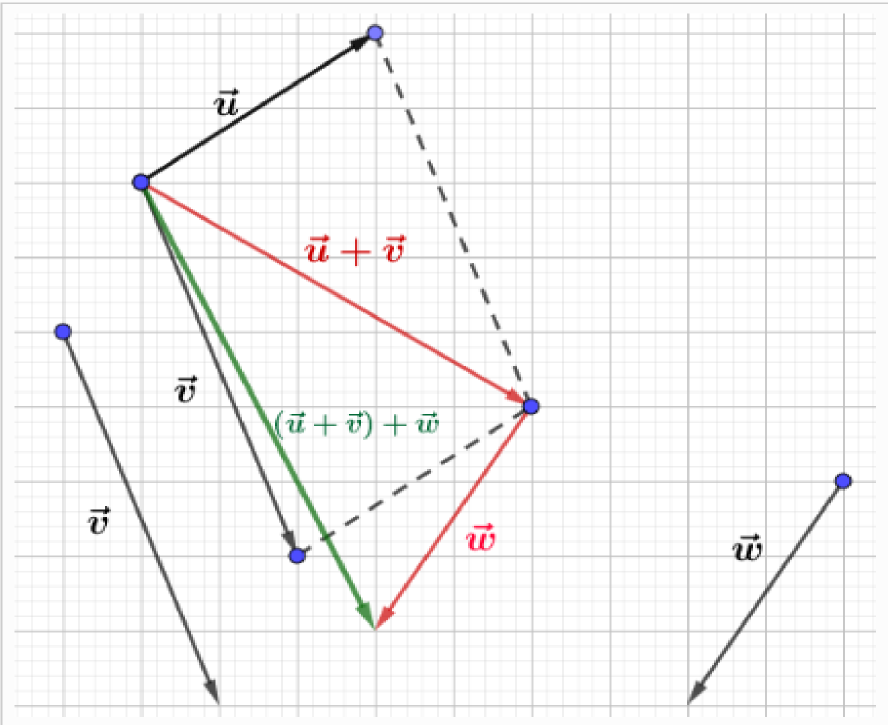
On partage $[AC]$ en deux parties et on prend une fois cette longueur à partir de B.



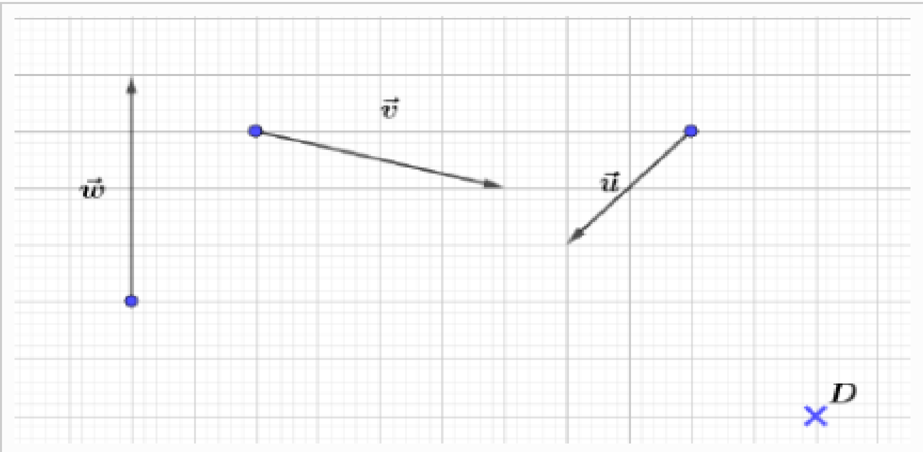
Exercice 02 : Reproduire le quadrillage, puis construire le vecteur : $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ **PROF: ATMANI NAJIB**



Correction : On construit $\vec{u}+\vec{v}$ puis, "au bout" de ce vecteur, on construit un représentant du vecteur $\vec{w}$.

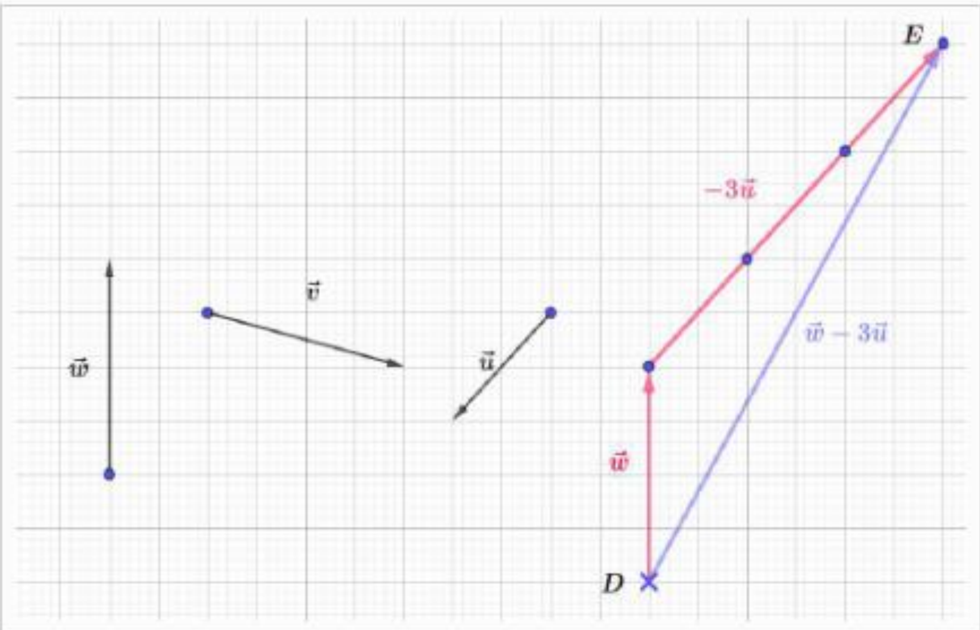


Exercice 03 : Construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{DE}=\vec{w}-3\vec{u}$ et $\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}\vec{w}+\vec{u}$



Correction :

PROF: ATMANI NAJIB



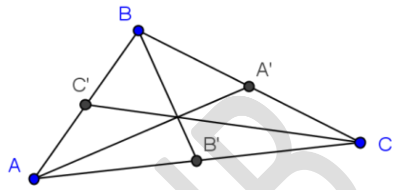
Exercice 04 : Soit ABC est un triangle. Les points : A' et B' et C' sont les milieux respectivement Des segments $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$

1) Faire une figure et vérifier que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$

2) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ et exprimer le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ en fonction De : $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

Correction : 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}$



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}+\vec{0}$ Car $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$ (A' est le milieu du segment $[BC]$)

Par suite : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$ (1)

2) a) On a : $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (2)

On a : $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (3)

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$ (1) équivaut à: $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

PROF: ATMANI NAJIB

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

Exercice 05 : Soit ABC est un triangle et P et Q deux points tels que : $\overrightarrow{AP}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CQ}=-2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{PB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

b) Montrer que : $\overrightarrow{BQ}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

2) Déduire que : B est le milieu du segment $[PQ]$

Correction : 1) a) Montrons que : $\overrightarrow{PB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

On a : $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}=-\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{PB}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{PB}=\left(-\frac{5}{2}+1\right)\overrightarrow{AC}+\left(-\frac{3}{2}+1\right)\overrightarrow{CB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{BQ}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

On a : $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{BC}+\left(-2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{BQ}=-\overrightarrow{AC}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{BQ}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BQ}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

2) Déduisons que : B est le milieu du segment $[PQ]$

Pour montrer que B est milieu de $[PQ]$ il suffit de montrer par exemple que : $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BQ}$

Comme : $\overrightarrow{PB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BQ}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BQ}$

Par suite : B est le milieu du segment $[PQ]$

Exercice 06 : Soit ABC est un triangle

Soient les points D ; M et N tels que : $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DA}$ et $2\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

1) Faire une figure.

2) Montrer que : $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **PROF: ATMANI NAJIB**

3) Montrer que : les vecteurs $\overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

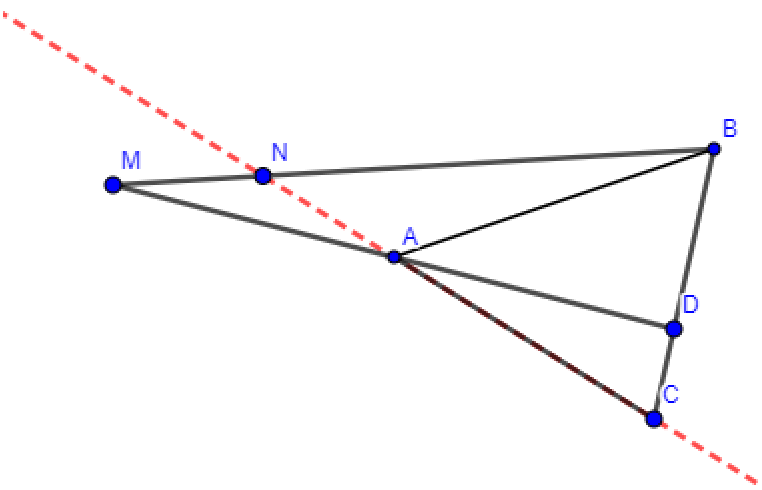
4) Que peut-on dire des points A ; C et N sont alignés

Correction : 1) On a : $\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DA}$ donc A est le milieu du segment $[DM]$

On a : $2\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BM}$ C est le milieu du segment $[AL]$

On a : aussi $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

La figure : Voir la figure ci-dessous



2) a) Montrons que : $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

À l'aide de la relation de Chasles

On obtient alors : $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BA}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}\right)$ et comme : A est le milieu du segment $[DM]$ on trouve : $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BA}$

Par suite : $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AB}$

Et on a : $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donc : $\overrightarrow{MB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{MB}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+2\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{NB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{NB}=\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ c'est-à-dire : $\boxed{\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

3) Montrons que : les vecteurs $\overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc : $\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{NA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **PROF: ATMANI NAJIB**

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

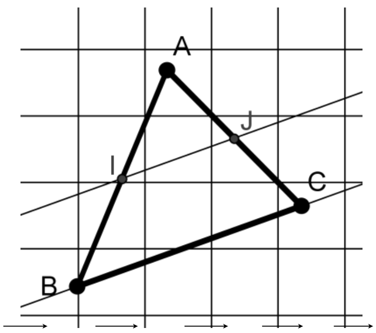
4) les vecteurs $\overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Donc : les points A ; C et N sont alignés

Exercice 07 : Soit ABC est un triangle.

Le point I est le milieu du coté $[AB]$ et J est le milieu du coté $[AC]$

Montrer que deux droites (IJ) et (BC) sont parallèles



Correction : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AJ}=2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\right)=2\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$

Par suite les droites (IJ) et (BC) sont parallèles

Exercice 08 : Soit un triangle ABC et soient les points D et E vérifiant : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$; Que peut-on en déduire géométriquement ?

2) Construire les points D et E

3) Montrer que : $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}$; Déduire de cette égalité et de la précédente que E, B et D sont alignés.

4) Soit I le milieu de $[AB]$ Justifier que $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CI}$; Qu'en déduire pour les droites (AE) et (CI) ?

Correction :1) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

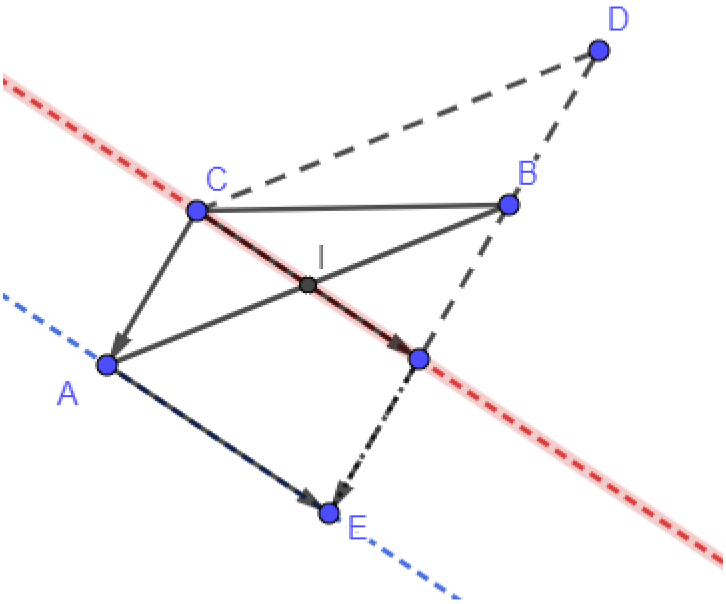
Donc : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$

On en déduit que ABDC est un parallélogramme.

2) Construction des points D et E :

On a : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$

Donc on peut construire les points D et E :



3) Montrons que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}$

On en déduit que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{BD}$

Donc : $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires et par suite les points E, B et D sont alignés.

4)Comme I le milieu de $[AB]$ on a donc : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

D'où : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{CI}$

On en déduit que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CI}$

Donc : $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont donc colinéaires

Par suite les droites (AE) et (CI) sont parallèles

PROF: ATMANI NAJIB

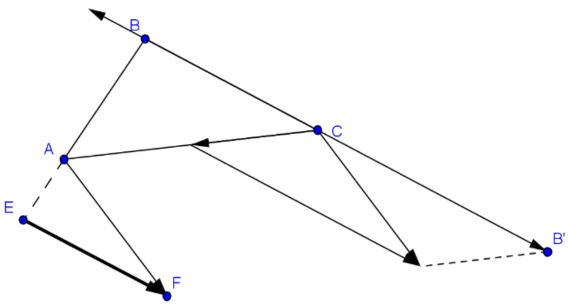
Exercice 09 : Soit ABC est un triangle. Soient les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure.

2) Montrer que : $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

3) Que peut-on déduire ?

Correction : 1) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



2) On a : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right) + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ Donc : $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{EF} = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC}$ et par suite : $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

3) On a : $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$

Donc : Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et par suite : les deux droites (EF) et (BC) sont parallèles

Exercice 10 : Soit ABCD un parallélogramme et E et F sont deux points tels que :
$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ Et $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

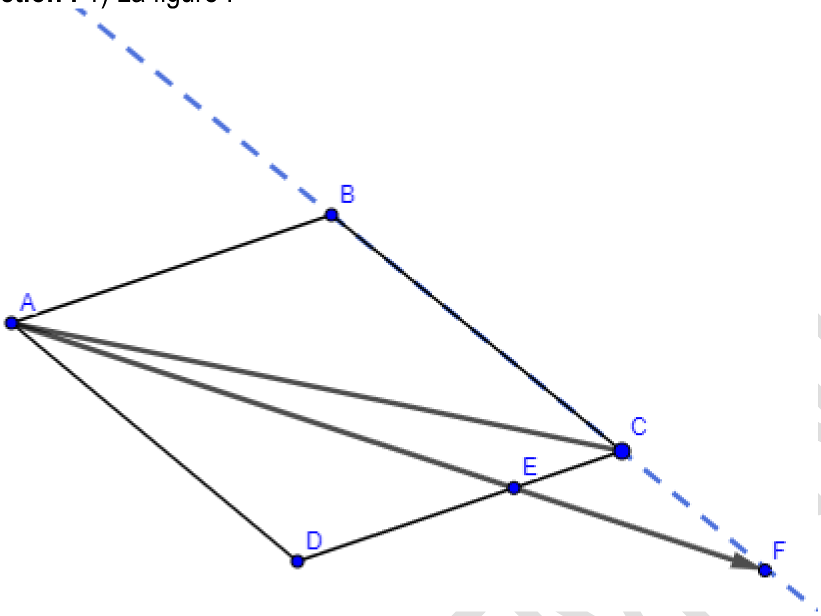
1) Faire une figure

2)a) Montrer que : $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$

b) Montrer que : $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$

3) En déduire que : Les points B, C et F sont alignés

Correction : 1) La figure :



2)a) Montrons que : $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$

$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ et comme : $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{FA}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

Donc : $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$

2)b) Montrons que : $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$

PROF: ATMANI NAJIB

$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{CD}\right)$ et puisque : ABCD un parallélogramme alors : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$

Donc : $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$

3) Déduisons que: Les points B, C et F sont alignés

On a : $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont colinéaires, ceci signifie que les points B, C et F sont alignés

Exercice 11 : ABC est un triangle et I un point du plan tel que : $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

1) Représenter le point I

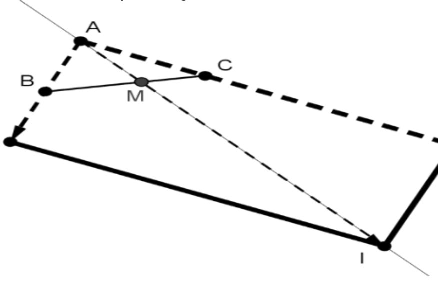
2) Soit M le point d'intersection des droites :(AI) et (BC)

On pose : $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CM}=y\overrightarrow{MB}$ avec x et y des réels

a) Montrer que : $(x-5)\overrightarrow{AM}=(2-3y)\overrightarrow{MB}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AI}$

Correction : 1) la figure



2) On a : $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ Donc : $\overrightarrow{AI}=2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+3\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)$

Or on sait que : $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CM}=y\overrightarrow{MB}$ donc : $x\overrightarrow{AM}=2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+3\left(\overrightarrow{AM}-y\overrightarrow{MB}\right)$

Donc : $x\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AM}-3y\overrightarrow{MB}$

Donc : $x\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{AM}+(2-3y)\overrightarrow{MB}$

Donc : $(x-5)\overrightarrow{AM}=(2-3y)\overrightarrow{MB}$

1) On a : $(x-5)\overrightarrow{AM}=(2-3y)\overrightarrow{MB}$ et puisque les points : A ; B ; M ne sont pas alignés

Alors on a nécessairement : $x-5=0 \ et \ 2-3y=0$

Donc : $x=5 \ et \ y=\frac{2}{3}$

Et puisque : $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AM}$ alors : $\overrightarrow{AI}=5\overrightarrow{AM}$ et par suite : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AI}$.

Exercice 12 : ABC est un triangle. Soient D et E deux points du plan tels que : $3\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{AB}$

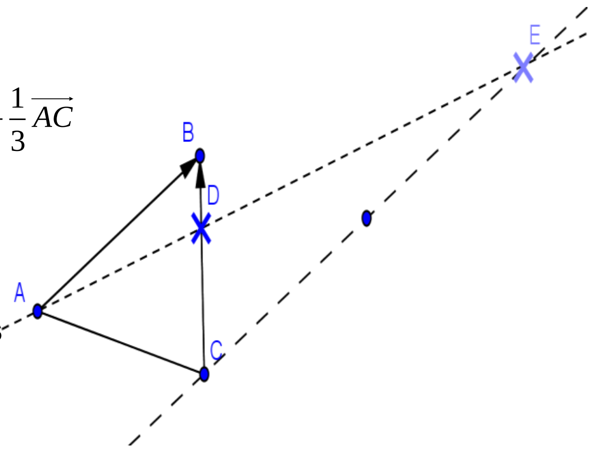
1) Faire une figure

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) b) En déduire que les points : A , E et D sont alignés.

3) Montrer que : $AD\leq\frac{1}{3}(CE+AC)$

Correction : 1) la figure



2) a) On a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$ Donc : $\boxed{\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}}$

2) b) On a : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ Par suite les points : A , E et D sont alignés

3) On a : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}\right)\right\|=\left|\frac{1}{3}\right|\left\|\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}\right)\right\|$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\leq\frac{1}{3}\left(\left\|\overrightarrow{CE}\right\|+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\right)$ Donc : $AD\leq\frac{1}{3}(CE+AC)$

Exercice 13 : Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I le milieu du segment $[AB]$

La parallèle à (AC) passant par D coupe la parallèle à (BD) passant par C en J

Montrer que : les points : O , I et J sont alignés.

Correction : Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{OJ}=k\overrightarrow{OI}$ avec $k\in\mathbb{R}^*$

L'examen de la figure montre que : $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ peuvent s'exprimer en fonction de $\overrightarrow{BC}$

Dans le triangle ABC on a I est le milieu du segment $[AB]$

et O le milieu du segment $[AC]$

Donc d'après le théorème des milieux : $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{OI}$ (1)

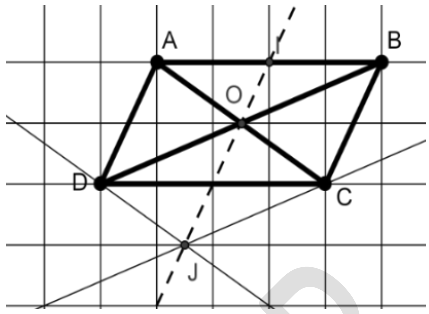
Par construction $OCJD$ est un parallélogramme d'où : $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

Comme O le milieu du segment $[BD]$ alors : $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$

D'où : $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{BC}$ (2)

D'après Les égalités (1) et (2) On a alors : $\overrightarrow{OJ}=-2\overrightarrow{OI}$

Par suite les points : O, I et J sont alignés.



Exercice 14 : Soit ABCD un parallélogramme et I et J sont milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

1) a) Démontrer que : $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{JB}$

b) En déduire la nature du quadrilatère DIBJ.

2) a) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ Et $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Exprimer $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

c) En déduire que les points I, M, D sont alignés

d) Montrer de même que les points J, N, B sont alignés

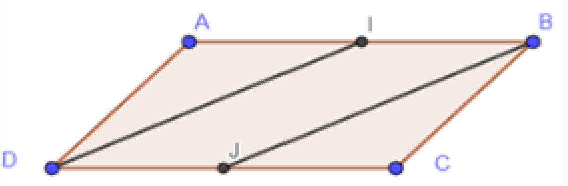
3) Soit ABC, un triangle de centre de gravité G, H le milieu de [BC].

Démontrer que pour tout point M du plan :

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

b) $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{HA}$

Correction :



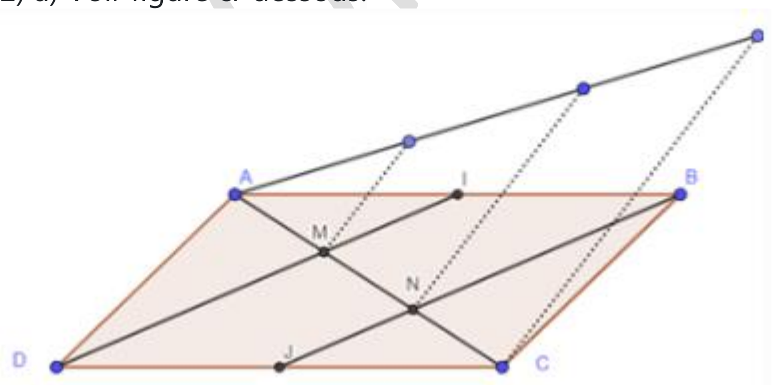
1)On a par définition de I et J : $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ Et $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Or $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ puisque ABCD est un parallélogramme **PROF: ATMANI NAJIB**

Donc : $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{DJ}$ et par conséquent le quadrilatère IBJD ou (DIBJ)est aussi un parallélogramme.

Par suite : $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{JB}$

2) a) Voir figure ci-dessous.



b) $\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Il en résulte que : $\overrightarrow{ID}=3\overrightarrow{IM}$ et par conséquent les points I, D et M sont alignés.

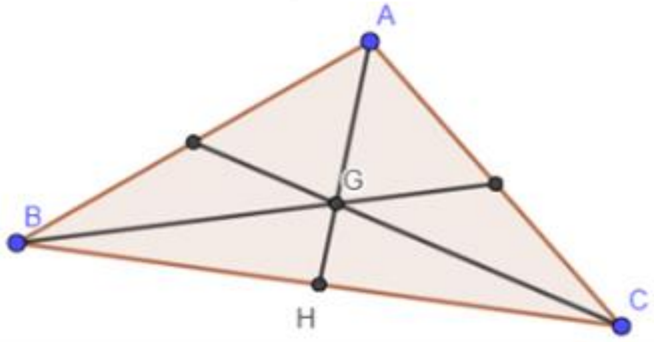
c) $\overrightarrow{JN}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

D'où : $\overrightarrow{JB}=3\overrightarrow{JN}$ t l'alignement des points J, B et N

3) a) Introduire G dans : $\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MC}$ et tenir compte du fait que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

b) Introduire H dans : $2\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MC}$ et utiliser le fait que : $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$



Exercice 15 : ABC est un triangle. Soient M et N deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure

2)Démontrer que (MN) et (BC)sont parallèles.

3) Soit S et T les milieux respectifs de [BC] et [MN].

Démontrer que A, S et T sont alignés

Exercice 16 : Soit ABCD un parallélogramme et I et J sont milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

1) Démontrer que les droites (ID) et (JB)sont parallèles.

2) Construire les ponts Het N tels que : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ Et $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

3) Exprimer $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{ID}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

En déduire que H appartient à la droite (ID).

3) Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

En déduire que N appartient à la droite (JB)

5° Démontrer que HINJ est un parallélogramme.

Soit G le point du plan tel que : $\overrightarrow{GD}-2\overrightarrow{GI}=\vec{0}$

6)Démontrer que B est le milieu du segment [CE].

7) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MI}\right\|=4$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien