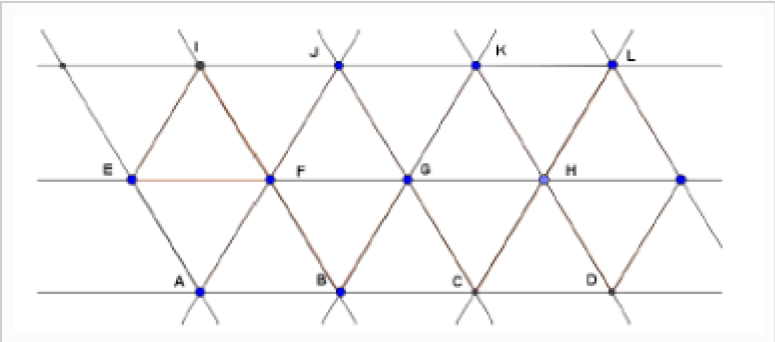
Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 : Calcul vectoriel dans le plan

Exercice 01 : On considère la figure ci-dessous constituée de triangles équilatéraux. Les points A, B,..., L sont les sommets des précédents triangles.



Compléter : 1) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{A...}$ 2) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{A...}$ 3) $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{....}$ 4) $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{E...}$

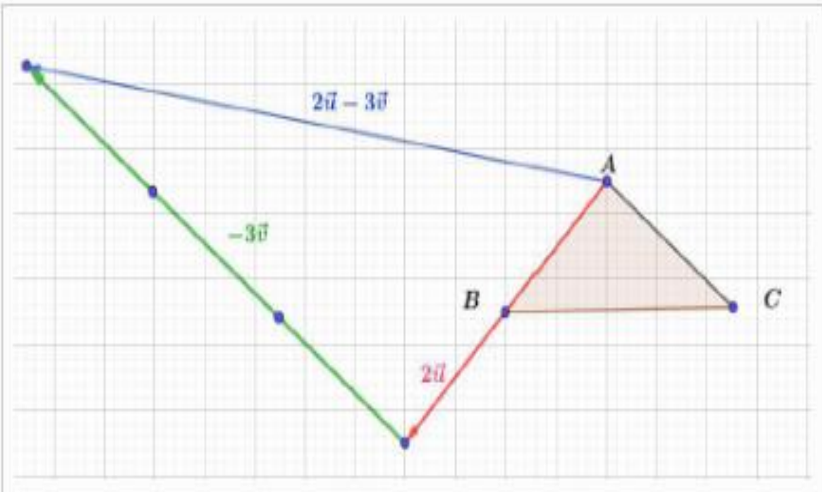
Correction :

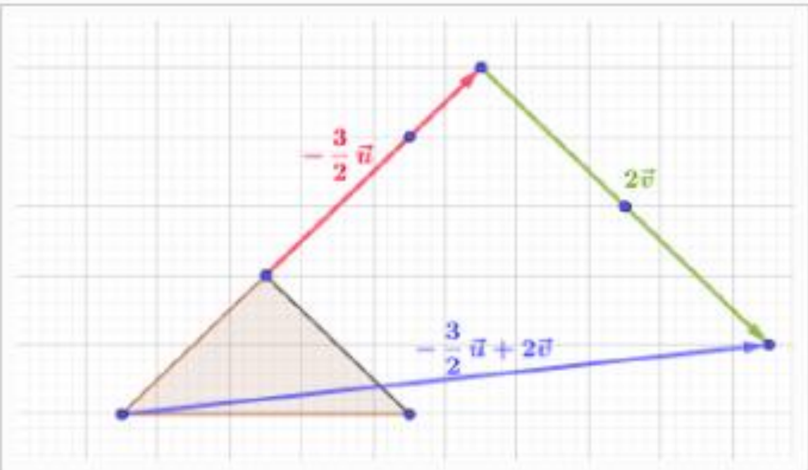
1) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AI}$ 2) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{AK}$ 3) $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GE}=\vec{0}$ 4) $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EK}$

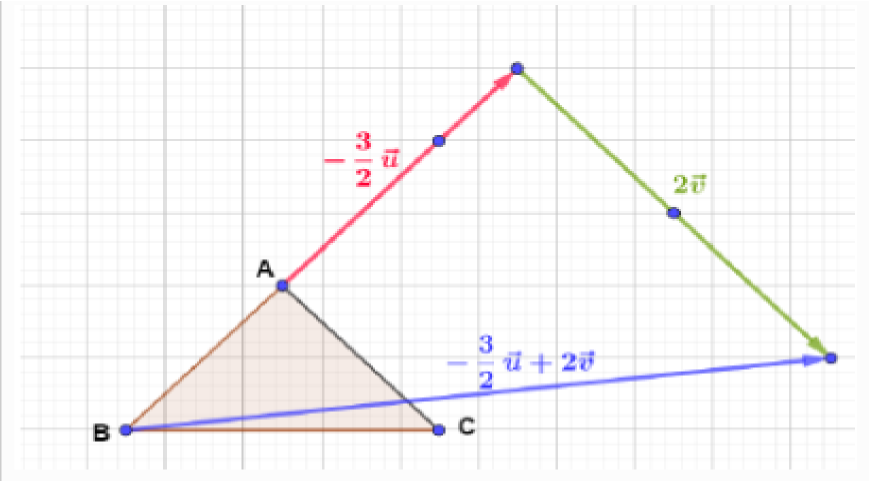
Exercice 02 : On considère un triangle ABC et on pose : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$

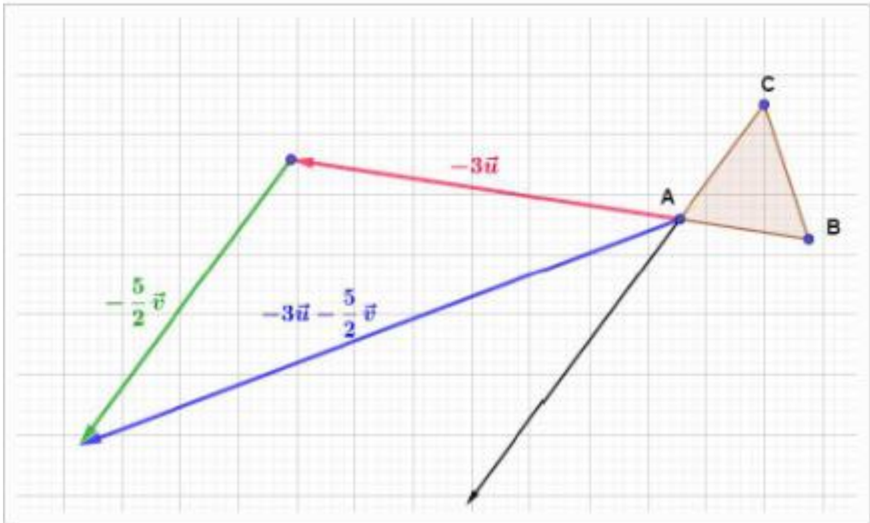
Construire les vecteurs : $2\vec{u}-3\vec{v}$; $-\frac{3}{2}\vec{u}+2\vec{v}$; $-3\vec{u}-\frac{5}{2}\vec{v}$

Correction :

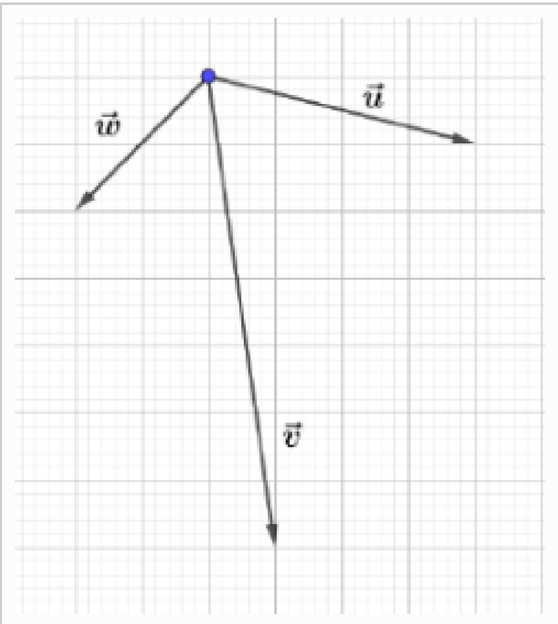




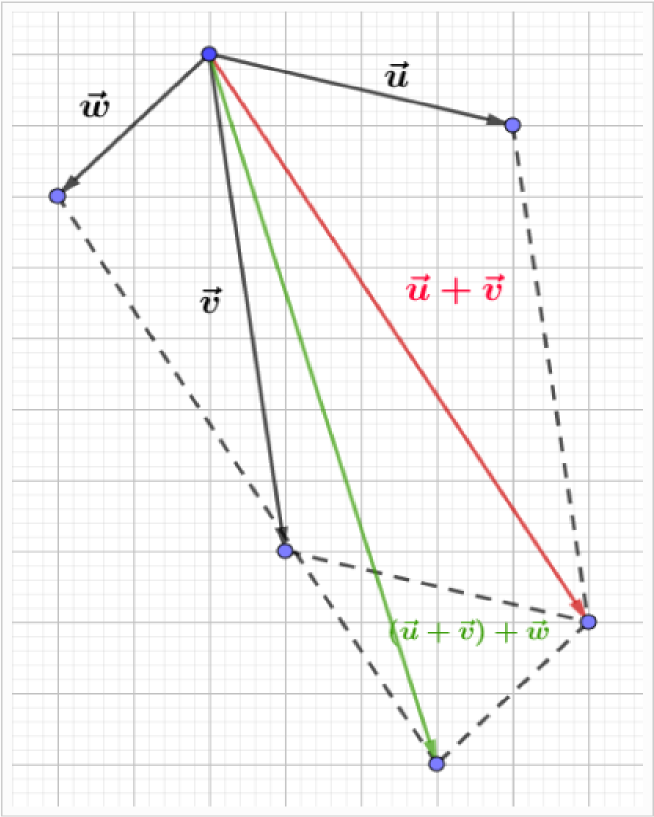




Exercice 03 : Reproduire le quadrillage, puis construire le vecteur : $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ **PROF: ATMANI NAJIB**



Correction : On construit successivement deux parallélogrammes, le premier sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont la diagonale donne le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ puis le second sur $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{w}$ dont la diagonale donne le vecteur $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$



Exercice 04 : Soit un triangle ABC et soient les points D et E vérifiant : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$; Que peut-on en déduire géométriquement ?
2) Construire les points D et E
3) Montrer que : $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}$; Déduire de cette égalité et de la précédente que E, B et D sont alignés.
4) Soit I le milieu de $[AB]$ Justifier que $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CI}$; Qu'en déduire pour les droites (AE) et (CI) ?

Correction :1) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$

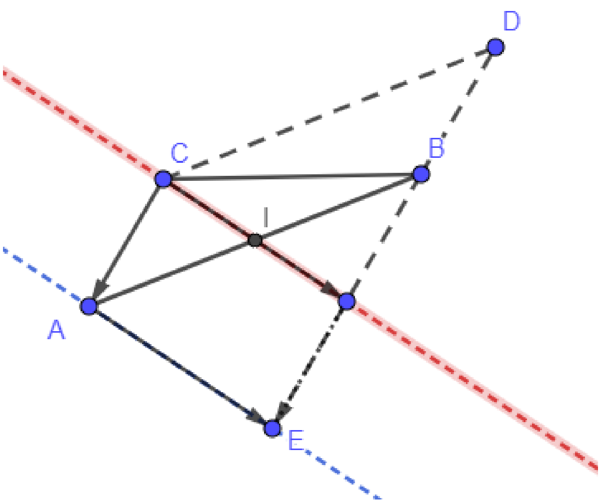
On en déduit que ABDC est un parallélogramme.

2) Construction des points D et E :

On a : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$

Donc on peut construire les points D et E :

PROF : ATMANI NAJIB



3) Montrons que : $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}$

On en déduit que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{BD}$

Donc : $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires et par suite les points E, B et D sont alignés.

4)Comme I le milieu de $[AB]$ on a donc : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

D'où : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{CI}$

On en déduit que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CI}$

Donc : $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont donc colinéaires

Par suite les droites (AE) et (CI) sont parallèles

Exercice 05 : Soit ABCD est un parallélogramme et soient M ; N ; E et F des points tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{NB}$

1) Faire une figure.

2) Montrer que : $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DE}$ et en déduire la nature du quadrilatère DEBF

3) Montrer que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$ et en déduire la nature du quadrilatère AECF

4) Montrer que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DB}\right)$

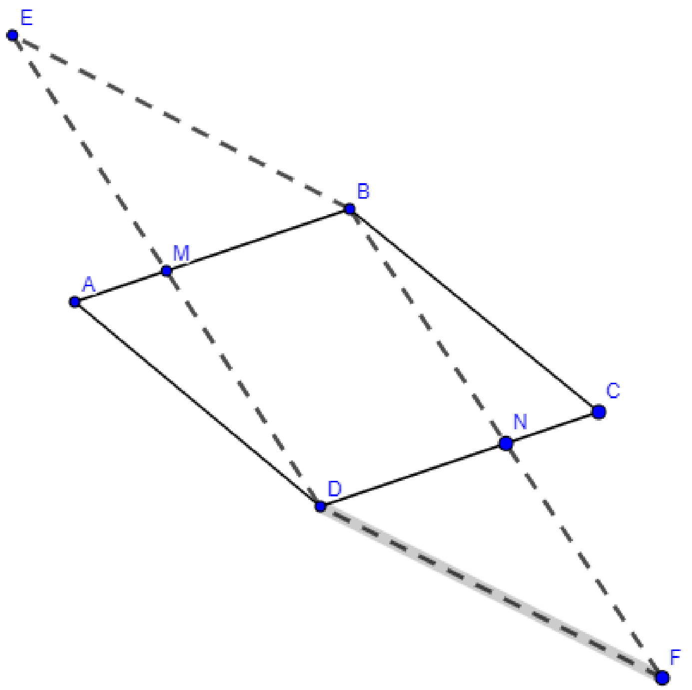
Correction : 1) La figure : Voir la figure ci-dessous

On a : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

Et on a : $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{ME}$ donc : M est le milieu du segment $[DE]$

Et on a : $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{NB}$ donc : N est le milieu du segment $[FB]$

PROF: ATMANI NAJIB



2) a) Montrons que : $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$

On a : $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}$ et on a : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DM}$ car M est le milieu du segment $[DE]$

Donc : $\overrightarrow{DE}=2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)$ c'est-à-dire : $\boxed{\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}}$

Montrons que : $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DE}$

On a : $\overrightarrow{DN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{NC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et on a : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CB}$ Donc : $\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ car : $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ et puisque $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ alors : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{DM}$

N est le milieu du segment $[FB]$ donc : $\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{NB}$

et puisque $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{DN}$ alors : $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DE}$

On a donc $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DE}$ par suite : le quadrilatère DEBF est un parallélogramme

3) Montrons que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$ et déduction de la nature du quadrilatère AECF

On a : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}$ et on a : $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{NC}$ et on a : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ME}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FN}$

Donc : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$

On a donc $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$ par suite : le quadrilatère AECF est un parallélogramme

4) Montrons que : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EB}$

On a : $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EB}$ (1) car DEBF est un parallélogramme

et on a : $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FB}$

Donc : $\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{DM}$ par suite : le quadrilatère DMNF est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{MN}$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EB}$

Montrons que : $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}\right)$

On a : $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}\right)+\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}\right)$

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DE}\right)+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EB}$ donc : $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EB}$

D'après la question précédente on a : $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{MN}$

Donc : $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DF}$

Donc : $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}$

Donc : $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}\right)$

Exercice 06 : (**) Soient A, B et M quatre points du plan tels que : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Montrer que Le point M appartient à la droite (AB)

Correction : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $2\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : - $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $5\overrightarrow{MA}=-6\overrightarrow{AB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : les points A, B et M sont alignés

Par suite : le point M appartient à la droite (AB)

Exercice 07: Soit ABC est un triangle.

1) Soit le vecteur : $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

2) Soit le vecteur : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

a) Exprimer le vecteur $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires sachant que : $\vec{w}=9\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

Correction : 1) On a : $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ donc : $\vec{u}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\vec{u}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Par suite : les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

2) a) On a : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ Donc : $\vec{v}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) b) $\vec{w}=9\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=-3\left(-3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\vec{w}=-6\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-6\vec{v}$

Par suite : les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

Exercice 08 : Soit ABC est un triangle

1) Représenter les points J ; K et L tels que : $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL}=2\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que : $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{KL}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

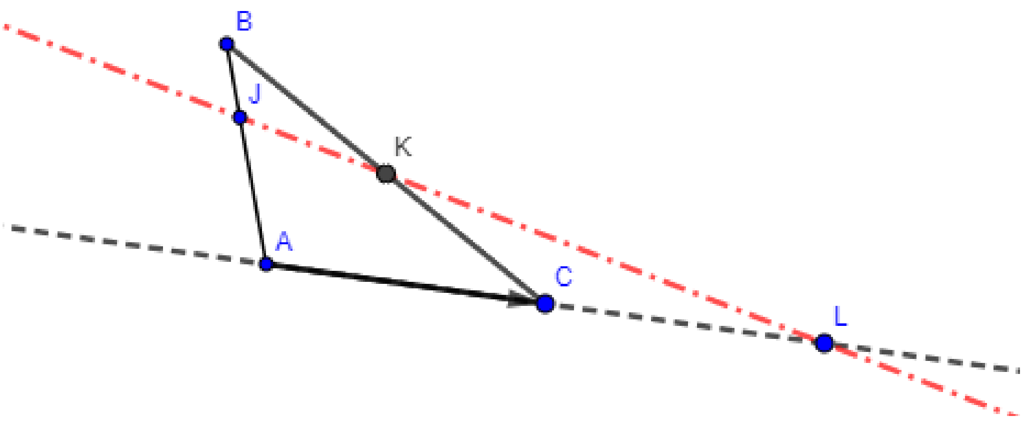
3) En déduire que : les points J ; K et L sont alignés

Correction : 1) On a : $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc K est le milieu du segment $[BC]$

On a : $\overrightarrow{AL}=2\overrightarrow{AC}$ donc C est le milieu du segment $[AL]$

On a : aussi $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

La figure : Voir la figure ci-dessous



2) a) Montrons que : $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

On a : $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=-\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{KL}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

On a : $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=-\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AL}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{KL}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{KL}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

3) Montrons que : les points J ; K et L sont alignés

On a : $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{KL}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

Et On a : $3\overrightarrow{JK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$ donc : $\overrightarrow{KL}=3\overrightarrow{JK}$

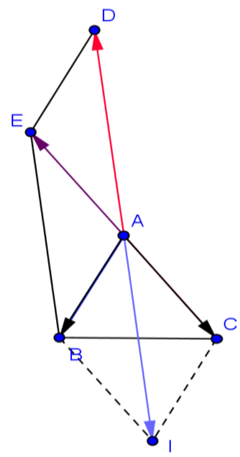
Donc : les points J ; K et L sont alignés

Exercice 09 : Soit ABC est un triangle.

1) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

2) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

3) Montrer que : A est le milieu du segment $[CE]$



Correction : 1) Construction du point D : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ Signifie que $\overrightarrow{AD}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

2) Construction du point E : On a : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ donc $ABED$ est un parallélogramme

3) Pour montrer que A est le milieu du segment $[CE]$

Il suffit de Montrer que : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$?

On a : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Par suite : A est le milieu du segment $[CE]$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 10 : Soit ABC est un triangle. Et M un point tel que : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$

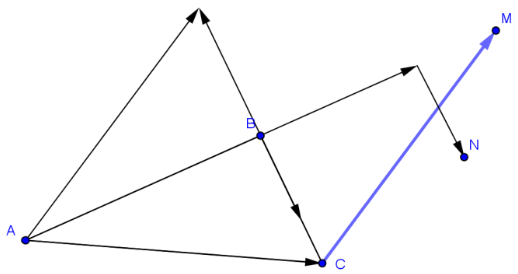
1) Faire une figure et construire le point M

2) Démontrer que : Les points A, B et M sont alignés.

3) Construire le point N tel que : $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

4) Démontrer que : Les droites (BN) et (AC) sont parallèles

Correction : 1) Le point M est obtenu par la construction ci-dessous



2) Pour montrer l'alignement de trois points ou le parallélisme de deux droites on montre la colinéarité de deux vecteurs bien choisis

Pour montrer que les points A, B et M sont alignés il Suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ Sont colinéaires, c'est-à-dire trouver un réel k tel que ; $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

Or : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{AM} = 2\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = 2\overrightarrow{AB}$

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Par suite les points A, B et M sont alignés.

3) Le point N est obtenu par la construction ci-dessus.

4) Pour montrer que Les droites (BN) et (AC) sont parallèles il Suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire trouver un réel k tel que ; $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Donc : $\overrightarrow{BN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$ et par suite : $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Par suite : Les droites (BN) et (AC) sont parallèles.

Exercice 11 : Soit ABCD un parallélogramme et E et F sont deux points tels que :

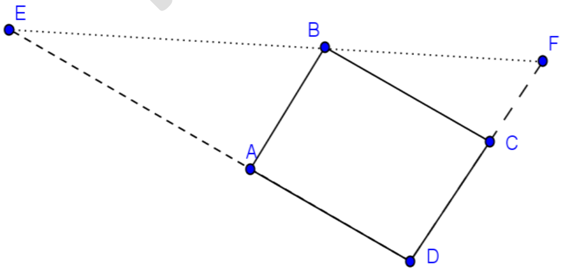
$\overrightarrow{DE} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ Et $\overrightarrow{DF} = \frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

1) Faire une figure et Montrer que : $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$ et que : $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$ **PROF: ATMANI NAJIB**

2) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Vérifier que : $2\overrightarrow{BE} + 3\overrightarrow{BF} = \vec{0}$ et en déduire que : Les points E, F et B sont alignés

Correction : 1) La figure :



On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ Donc $\boxed{\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}}$

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$ Donc $\boxed{\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}}$

2)a) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$ Car : $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ (ABCD un parallélogramme)

Donc : $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$ Par suite : $\boxed{\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$ (1)

Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$ donc : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Par suite : $\boxed{\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$ (2)

2) b) Vérifions que : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$.

$2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=2(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC})+3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

4) Déduisons que : Les points E, F et B sont alignés ?

On a : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ donc : $2\overrightarrow{BE}=-3\overrightarrow{BF}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BF}$ D'où les points E, F et B sont alignés.

Exercice 12 : ABC est un triangle.

1. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et F est le milieu de [AC].
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$
3. a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

PROF: ATMANI NAJIB

b) En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AE}$

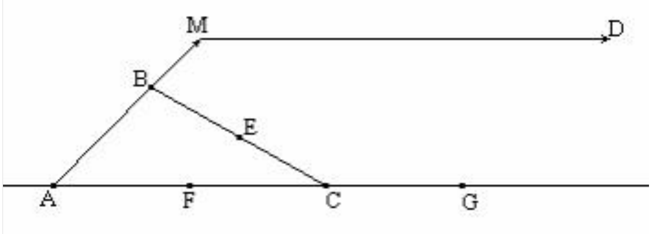
c) Que peut-on alors conclure ?

4. a) Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C et montrer que : $\overrightarrow{GA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que : $\overrightarrow{GD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG.

Correction : 1)



2) Dans le triangle ABC, E est le milieu de [BC]

F est le milieu de [AC] Donc d'après le théorème des milieux : $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{FE}$

3)a) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$ d'après la relation de Chasles

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) $3\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où : $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AE}$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont alors colinéaires et les points A, D et E sont alignés.

4. a) $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ nous donne $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

On a alors $-2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (ceci nous permet alors de placer le point M).

b) G est le symétrique de F par rapport à C

D'où C est le milieu de [FG] et $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{FC}$.

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

D'où $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ c) On a alors : $\overrightarrow{GD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

D'où : $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AM}$ et le quadrilatère AMDG est un parallélogramme.

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien