Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°2 : Calcul vectoriel dans le plan

Exercice1 : (*) Compléter les pointillés à l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{B...}$

$\overrightarrow{...E}=\overrightarrow{F...}+\overrightarrow{G...}$ *et* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{....}$ $\overrightarrow{H...}=\overrightarrow{....}+\overrightarrow{IJ}$ *et* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{...C}+\overrightarrow{...D}+\overrightarrow{....}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{...A}+\overrightarrow{A...}$ *et* $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{...P}+\overrightarrow{....}$

$\overrightarrow{....}=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{...M}$ *et* $\overrightarrow{...Y}=\overrightarrow{XJ}+\overrightarrow{....}+\overrightarrow{...R}$

Corrigé : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE}$

et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

et $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{JM}=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XJ}+\overrightarrow{RY}+\overrightarrow{JR}$

Exercice2 : (*) Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P) Montrer que : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

Correction : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$ d'après la relation de Chasles.

Donc : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\right)$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CC}$

Donc : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)+\vec{0}$

Par suite : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

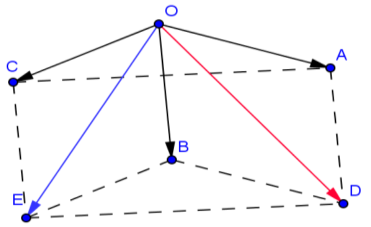
Exercice3 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan et A, B, C, D, O, E des points du plan tel que :

$\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{OE}=\vec{v}+\vec{w}$

1) Faire une figure.

2) Montrer que : ACED est un parallélogramme et justifier votre réponse

Correction :1) la figure



2) On a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}$

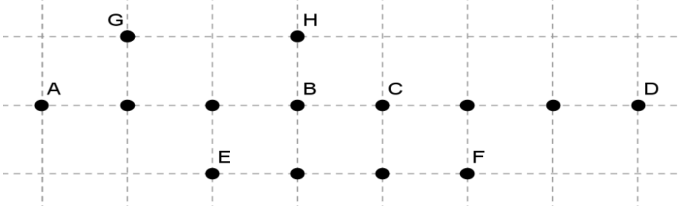
Donc : (1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OB}$

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}$ donc (2) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OB}$.**PROF: ATMANI NAJIB**

D'après (1) et (2) on a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}$

Donc : ACED est un parallélogramme.

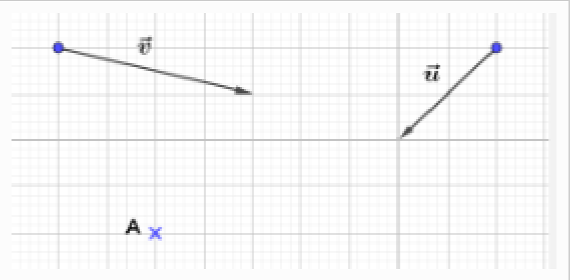
Exercice 4 : (*) Soient A, B ; C. D ; E ; F ; G ; H des points du plan tels que (voir figure)



Écrire les vecteurs : $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

Corrigé : $\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{DA}=-\frac{7}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

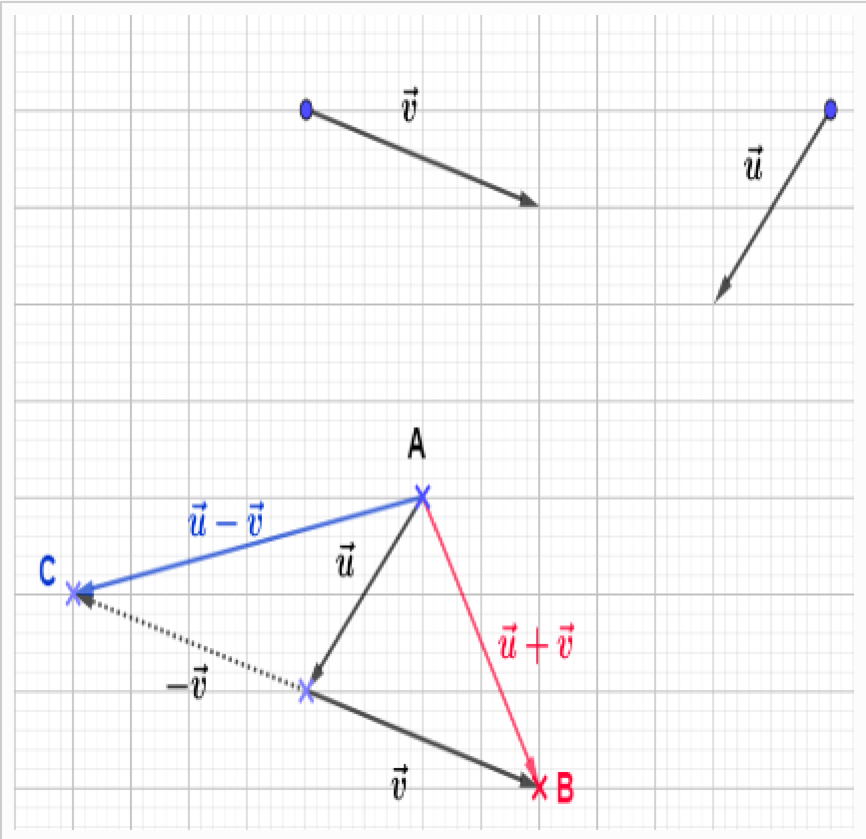
Exercice 5 : On considère la figure ci-dessous :



Construire les points B et C tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$

Représenter les vecteurs : $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$

Correction :



Exercice 6 : (*) Soient A, B deux points du plan et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ tels que : $AB = 6$ et $\|\vec{u}\| = 3$; Calculer :

$H = -8\|-\vec{u}\| + \|-5\overrightarrow{AB}\| + 2$

Correction : $H = -8\|-\vec{u}\| + \|-5\overrightarrow{AB}\| + 2 = -8 \times |-1|\|\vec{u}\| + |-5|\|\overrightarrow{AB}\| + 2$

$H = -8 \times 3 + 5 \times 6 + 2 = -24 + 30 + 2 = 8$

Exercice 7 : (*) Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{W_1} = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 4\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right)$ et $\overrightarrow{W_2} = \frac{1}{3}(3\vec{u} - 9\vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 6\vec{v}) - 2\vec{u}$

Corrigé : $\overrightarrow{W_1} = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 4\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right) = 2\vec{u} + 2\vec{v} - 4 \times \frac{1}{2}\vec{u} + 4\vec{v}$

$\overrightarrow{W_1} = 2\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{u} + 4\vec{v} = 6\vec{v} + \vec{0} = 6\vec{v}$

$\overrightarrow{W_2} = \frac{1}{3}(3\vec{u} - 9\vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 6\vec{v}) - 2\vec{u} = \vec{u} - 3\vec{v} + \vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{u} = 2\vec{u} + \vec{0} - 2\vec{u} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

Exercice 8 : (**) A, B et C trois points non alignés.

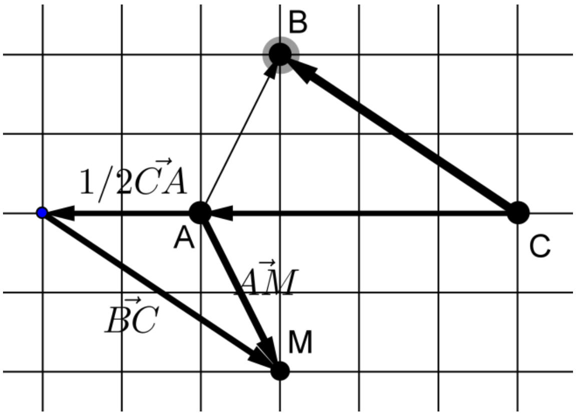
Placer les points M, N et P définis par les égalités suivantes : 1) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$ 3) $2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{BC}$

Corrigé :1) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

M est le point inconnu, il apparait une fois dans le vecteur $\overrightarrow{AM}$, qui est isolé **PROF: ATMANI NAJIB**

On peut donc tout de suite le placer



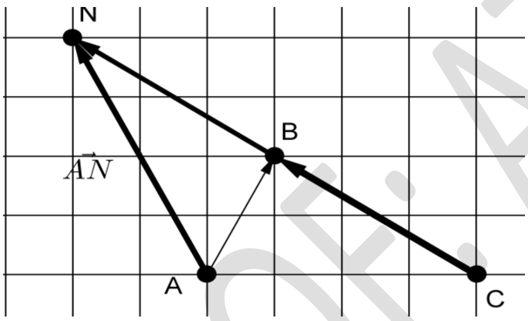
2) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$

N est le point inconnu, il apparait une fois dans le vecteur $\overrightarrow{AN}$

On isole ce vecteur : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ Signifie que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

Et On place le point N



3) $2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{BC}$

P est le point inconnu ; il apparait dans les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BP}$ on choisit de garder $\overrightarrow{BP}$

Et on transforme $\overrightarrow{AP}$ en faisant apparaitre le vecteur conservé $\overrightarrow{BP}$

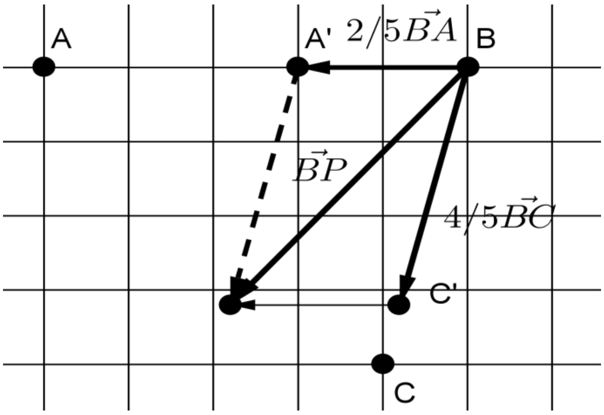
On a : $2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{BC}$

Signifie que : $2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}\right) + 3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{BC}$

Signifie que : $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{BC}$

Signifie que : $5\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$

Signifie que : $\overrightarrow{BP} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$



Méthode : Regarder combien de fois apparait le point « Inconnu » dans l'égalité.

- S'il apparait dans un seul vecteur, dans un membre de l'égalité, le point peut être placé directement
- S'il apparait dans plusieurs vecteurs, on choisit le vecteur qu'on veut conserver,

On transforme les autres vecteurs contenant le point inconnu grâce à la relation de Chasles et au vecteur conservé. On les remplace dans l'égalité par la nouvelle écriture, puis on isole ce vecteur et on place le point.

Exercice 9 : (**) Soit ABCD est un parallélogramme et soient :

E le milieu du segment $[BC]$ et F le milieu du segment $[CD]$

Montrer que : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Correction : On a : E le milieu du segment $[BC]$ et F le milieu du segment $[CD]$

Donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

Alors : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}$

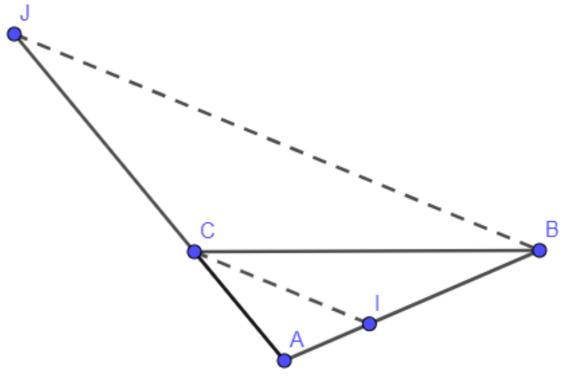
PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Exercice 10 : (**) Soit ABC un triangle et I et J sont deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure
2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3) En déduire que : les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.
4) Que peut-on dire des deux droites (IC) et (BJ) ?

Correction : 1) La figure :



2) Nous avons : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

On obtient alors à l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

De même à l'aide de la relation de Chasles en introduisant le point B dans $\overrightarrow{AJ}$ On obtient alors :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{AC}$ et donc : $\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) de : $\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ on déduit que $\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{IC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

4)On a les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{IC}$)

Donc : les deux droites (IC) et (BJ) sont parallèles

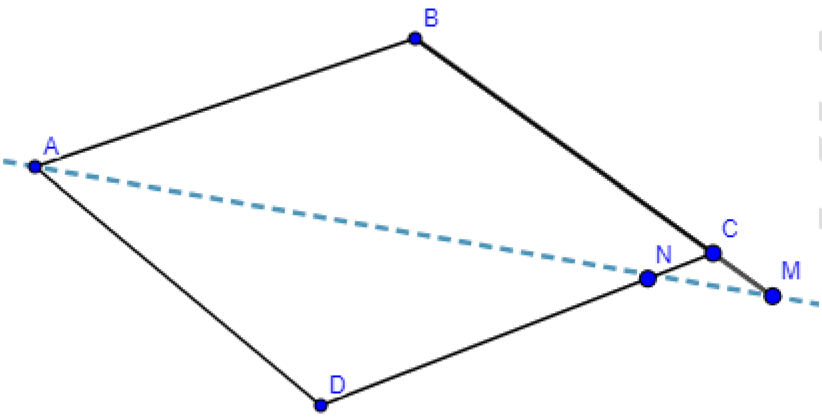
Exercice 11 : (**) Soit ABCD un parallélogramme et M et M des points tels que : $\overrightarrow{BM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{DC}$

1) Faire une figure.

2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}$

3) En déduire que les points A ; M et N sont alignés

Correction : 1)



2) a) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ et on a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ car ABCD est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BM}$ or $\overrightarrow{BM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}+\frac{6}{5}\overrightarrow{BC}}$

b) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ et on a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ car ABCD est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DN}$ or $\overrightarrow{DN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{DC}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BC}+\frac{5}{6}\overrightarrow{DC}}$

3) Déduction que les points A ; M et N sont alignés

On a : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}+\frac{6}{5}\overrightarrow{BC}=\frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{6}{5}\overrightarrow{AN}$

Donc : $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AN}$

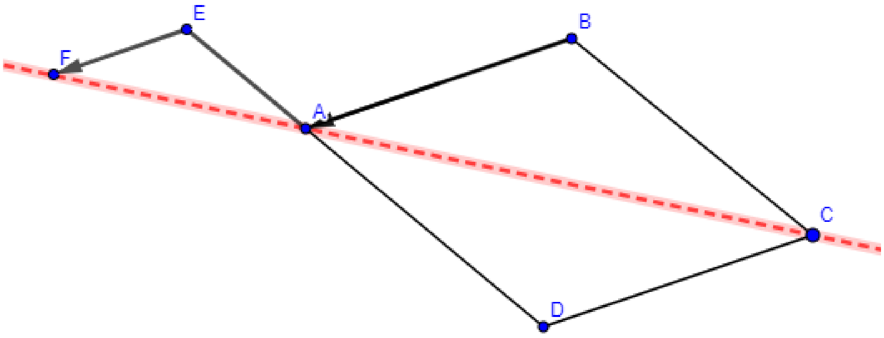
Par suite les points A ; M et N sont alignés

Exercice12 : (**) Soit ABCD est un parallélogramme ; E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

1) Faire une figure

2) Montrer que : Les points E, F et C sont alignés

Correction : 1) La figure :



2)La relation de Chasles donne : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ car : $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}\right)$ or ABCD est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ **PROF: ATMANI NAJIB**

Donc : $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Par suite : Les points E, F et C sont alignés

Exercice 13 : (**) Soit ABC un triangle et I ; J ; J sont des points tels que :

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure

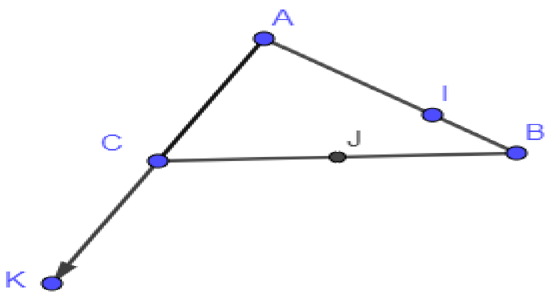
2)a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

3) En déduire que : les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires.

4) Que peut-on dire des points I ; J et K ?

Correction : 1) La figure : Voir la figure ci-dessous



2)a) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

On a : $\begin{cases}\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{cases}$ et on a : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$

C'est à dire : $\overrightarrow{IJ}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{IJ}=\left(-\frac{2}{3}+1\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$

b) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

On a : $\begin{cases}\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{cases}$ et on a : $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}$

C'est à dire : $\overrightarrow{JK}=-\overrightarrow{BJ}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{JK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{JK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}}$

3) Déduction que : les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{JK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=3\overrightarrow{IJ}$

On déduit que : $\overrightarrow{JK}=3\overrightarrow{IJ}$ ce qui montre que : les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.

4) Puisque : les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires. **PROF: ATMANI NAJIB**

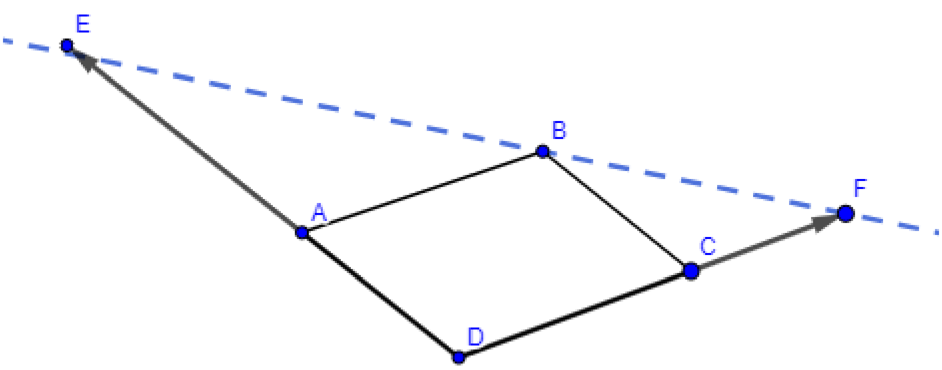
Alors : les points I ; J et K sont alignés

Exercice 14: (**) Soit ABC est un triangle et $k\in\mathbb{R}$ et E ; F deux points tels que :

$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+(1+k)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}=(1+k)\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

1) Montrer que : les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires pour tout $k\in\mathbb{R}$
2) Calculer la valeur de k si $E=F$
3) Calculer la valeur de k pour que le quadrilatère BCEF soit un parallélogramme

Correction : 1)



1) Montrons que : les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires pour tout $k\in\mathbb{R}$

Pour montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires pour tout $k\in\mathbb{R}$

Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{EF} = \lambda\overrightarrow{CB}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AE} + (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = -\left(3\overrightarrow{AB} + (1+k)\overrightarrow{AC}\right) + (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = -3\overrightarrow{AB} - (1+k)\overrightarrow{AC} + (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = -3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + k\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) = 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + k\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CB} = (-2+k)\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{EF} = (k-2)\overrightarrow{CB} = \lambda\overrightarrow{CB}$ avec $\lambda = k-2 \in \mathbb{R}$

Par suite : les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires pour tout $k \in \mathbb{R}$

2) Calculons la valeur de k si $E = F$

si $E = F$ alors : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$ et on a : $\overrightarrow{EF} = (k-2)\overrightarrow{CB}$

Donc : $(k-2)\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ qui signifie que : $k-2=0$ ou $\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ mais on a $C \neq B$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$

$E = F$ Signifie que : $\boxed{k=2}$

3) Calculons la valeur de k pour que le quadrilatère BCEF soit un parallélogramme

BCEF est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}$ et comme : $\overrightarrow{EF} = (k-2)\overrightarrow{CB}$

Alors : $\overrightarrow{CB} = (k-2)\overrightarrow{CB}$ Signifie que : $\overrightarrow{CB} - (k-2)\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

Signifie que : $(1-k+2)\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

Qui signifie que : $1-k+2=0$ ou $\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ mais on a $C \neq B$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$

Qui signifie que : $3-k=0$

Qui signifie que : $k=3$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien