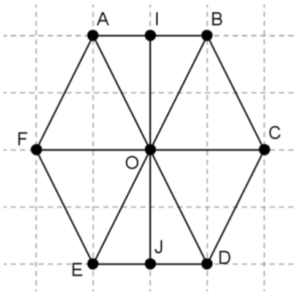
PROF: ATMANI NAJIB

http://www.xriadiat.com/

Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°1 : Calcul vectoriel dans le plan

Exercice1 : (*) On considère un hexagone régulier ABCDEF de centre O, et I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [ED].
En utilisant les lettres de la figure citer :



1) Deux vecteurs égaux
2) Deux vecteurs de même direction, de sens contraire et de normes différentes
3) Deux vecteurs de même direction, de même sens et de normes différentes
4) Deux vecteurs de direction différentes et de même norme
5) Deux vecteurs opposés

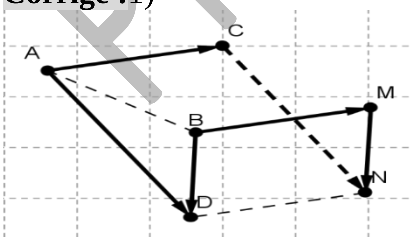
Corrigé :1) Des vecteurs égaux sont par exemple : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}$
2) Deux vecteurs de même direction, de sens contraire et de normes différentes sont :
Par exemple : $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CF}$.
3) Deux vecteurs de mêmes directions, de même sens et de normes différentes sont par exemple : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FC}$
4) Deux vecteurs de direction différentes de même norme sont par exemple : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$
5) Deux vecteurs opposés sont par exemple : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$

Exercice2 : (*) On considère les vecteurs :$\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ Et $\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$
Simplifier les vecteurs : $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Corrigé :$\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$
D'après la relation de Chasles :
$\vec{U}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$
$\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}$
$\vec{V}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EF}$

Exercice3 : (*) Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P).
1) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
2) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{MN}$

Corrigé :1)



2) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

Exercice4 : (**) Soit ABC est un triangle et M un point du plan et on considère D et E du plan tel que :

$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$

Quelle est la nature des quadrilatères ABCD et ACBE ? Justifier votre réponse

Corrigé :1) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$ signifie : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$

Signifie que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Donc : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

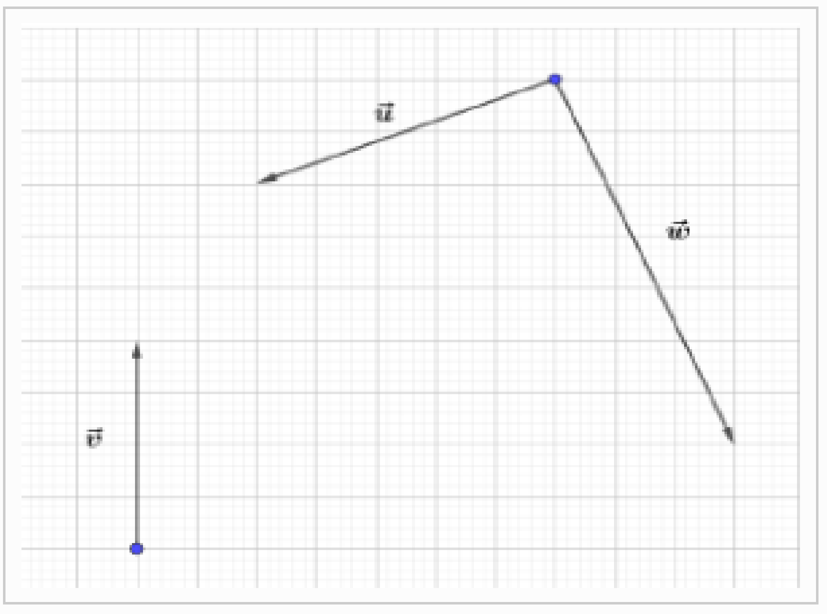
2) $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$ signifie : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

Signifie : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ signifie : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ Signifie : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$

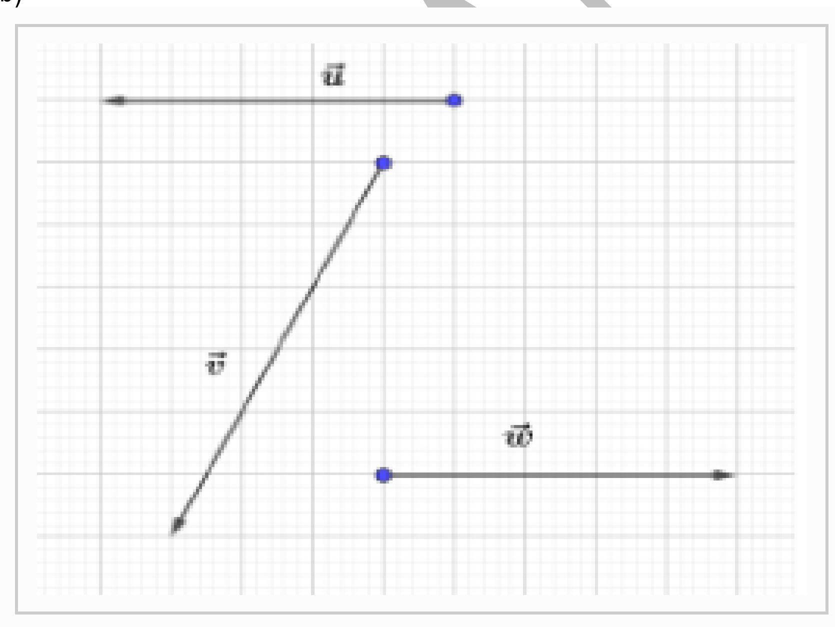
Donc : le quadrilatère ACBE est un parallélogramme

Exercice5 : (*) Reproduire le quadrillage, puis construire le vecteur : $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ dans les cas suivants

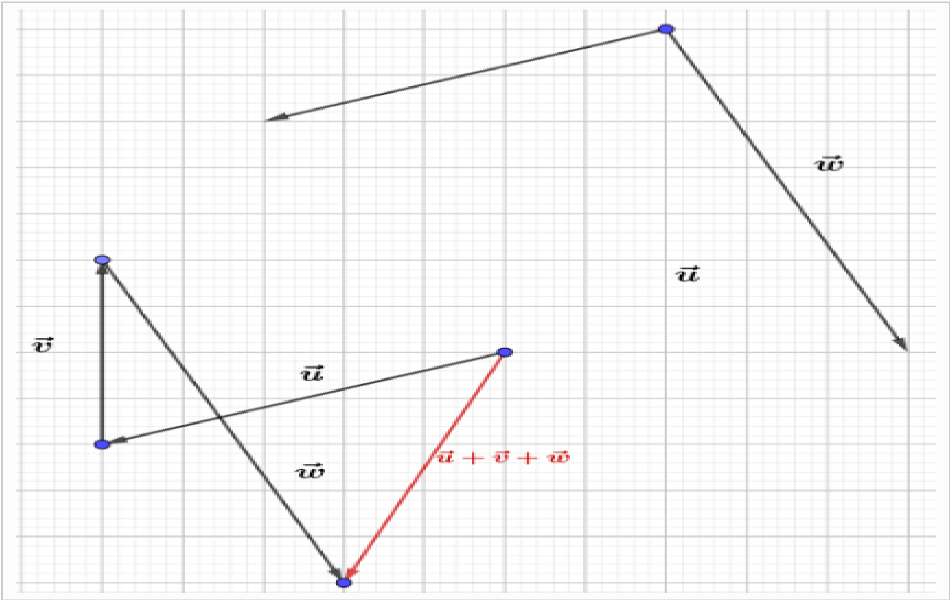
a)



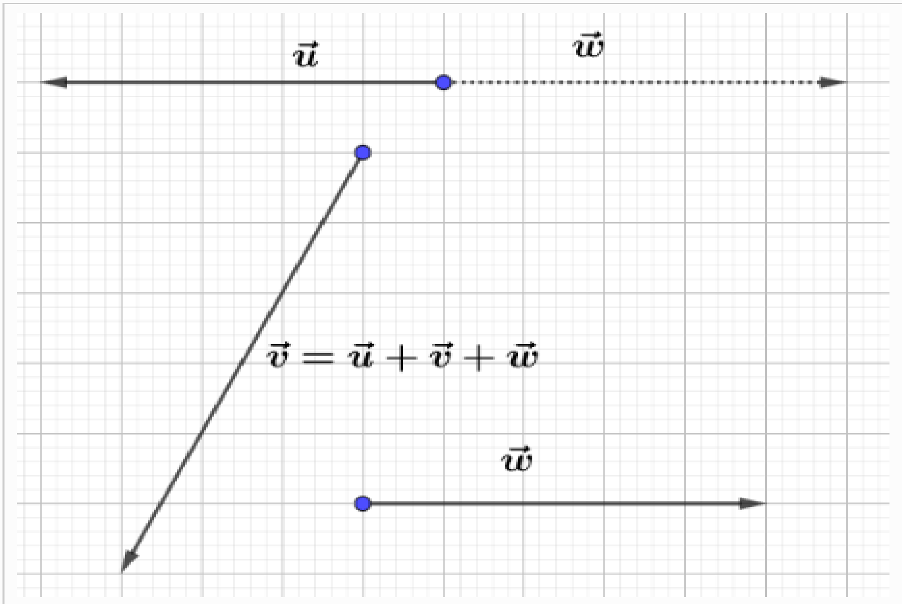
b)



Corrigé : a)



b)



Ici, on remarque que : $\vec{u}+\vec{w}=\vec{0}$ de sorte que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{v}$

Exercice 6 : (**) 1) Placer trois points A, D et C non alignés et construire le point B tel que :

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$ La parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E et (DC) en F.

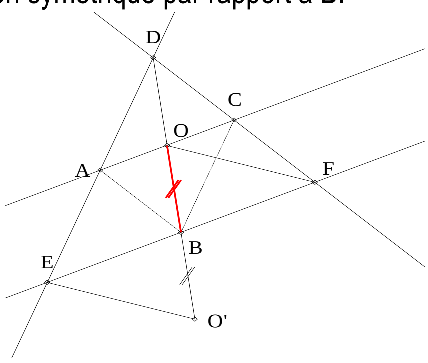
2)Démontrer que : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EB}$ et que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$.

En déduire que B est le milieu de $[EF]$

3)On note O le point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD et O' son symétrique par rapport à B.

Démontrer que : $\overrightarrow{EO'}=\overrightarrow{OF}$

Corrigé :1)



2) On a : $\overrightarrow{DB}$ = $\overrightarrow{DA}$ + $\overrightarrow{DC}$ alors DABC est un parallélogramme donc : (DA) // (BC).
Par ailleurs on a construit (EB) // (AC).
Le quadrilatère ACBE, ayant ses côtés parallèles deux à deux est un parallélogramme.
En conséquence : $\overrightarrow{AC}$ = $\overrightarrow{EB}$.
De la même manière, on montre que $\overrightarrow{AC}$ = $\overrightarrow{BF}$.
Conclusion : les deux vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont égaux car ils sont égaux au même vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Comme $\overrightarrow{EB}$ = $\overrightarrow{BF}$, le point B est le milieu du segment [EF] .

3) Par symétrie, B est le milieu du segment [OO'].

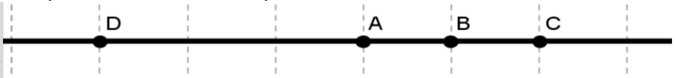
Dans le quadrilatère OFO'E, les diagonales ont le même Milieu, donc c'est un parallélogramme.

Et par conséquent, $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$

Exercice7 : (*) Soient A, B deux points du plan tels que : $AB = 1cm$

Construire les points C et D tels que : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$ et calculer les distances : AC et AD

Corrigé :



On a : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = |2|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $AC = |2|\, AB$ et par suite : $AC = 2cm$

On a : $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|-3\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $AD = 3AB$ et par suite : $AD = 3cm$

Exercice 8 : (*) Soient les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que : $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) - 4\left(2\vec{i} + \vec{j}\right)$

1) Simplifier $\vec{u}$

2) Ecrire $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$; $\vec{v}$

Corrigé : 1) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) - 4\left(2\vec{i} + \vec{j}\right) = 2\vec{i} + 3\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{i} - 4\vec{j} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$

2) On a : $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ ① et $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ Donc : $2\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ ②

②-① donne : $2\vec{v} - \vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \left(-3\vec{i} + 2\vec{j}\right) = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{i} - 2\vec{j}$

Donc : $2\vec{v} - \vec{u} = 7\vec{i}$ par suite : $\vec{i} = \frac{2}{7}\vec{v} - \frac{1}{7}\vec{u}$

Et on a : $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ donc : $\vec{j} = \vec{v} - 2\vec{i}$

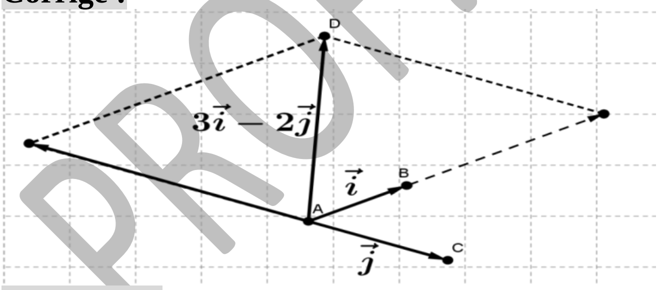
Donc : $\vec{j} = \vec{v} - 2\left(\frac{2}{7}\vec{v} - \frac{1}{7}\vec{u}\right) = \vec{v} - \frac{4}{7}\vec{v} + \frac{2}{7}\vec{u} = \frac{2}{7}\vec{u} + \frac{3}{7}\vec{v}$

Par suite : $\vec{j} = \frac{2}{7}\vec{u} + \frac{3}{7}\vec{v}$

Exercice 9 : (*) Soit ABC est un triangle et on pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$

Construire le vecteur $3\vec{i} - 2\vec{j}$.

Corrigé :



Exercice 10 : (**) Soit ABC est un triangle et soit le point D tel que : $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$

Montrer que : Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont **colinéaires** et construire le point D

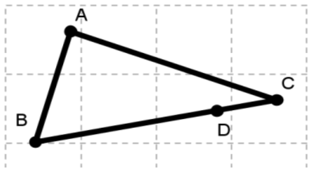
Corrigé : $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$ Signifie $\overrightarrow{BD} = 3\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}\right)$

Signifie $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BC}$

Signifie $\overrightarrow{BD}-3\overrightarrow{DB}=3\overrightarrow{BC}$

Signifie $\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$

Signifie $4\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$



Par suite : Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

Exercice11 : (**) Soit ABC est un triangle. E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

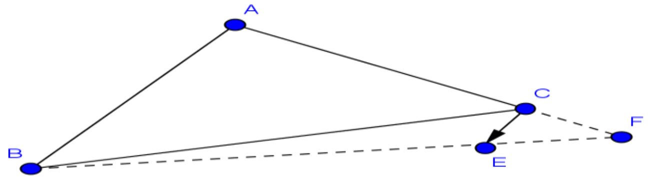
1) Faire une figure

2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

4) En déduire que : Les points E, F et B sont alignés

Corrigé : 1) La figure :



2) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$

$=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$

3) Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}}$

4) Déduisons que : Les points E, F et B sont alignés ?

$\overrightarrow{BF}=-\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ Donc $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$

Donc : Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires

D'où : Les points E, F et B sont alignés

Exercice 12 : (**) Soit ABC est un triangle. I et J sont deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$

1) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) Déduisez que : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

Corrigé : 1) a) Expression de $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? D'après la relation de Chasles :

On a : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}$ d'où : $\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ (1)

b) Expression de $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}$ D'où : $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ (2)

2) Pour démontrer que les droites (IC) et (BJ)

Sont parallèles il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires

Donc : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

Exercice 13 : (**) Soit ABCD un parallélogramme et I le milieu du segment $[BC]$ et J le point tel que : $\overrightarrow{JA} = -2\overrightarrow{JC}$

1) Faire une figure.

2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{JB}$; $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{JI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{JI}$

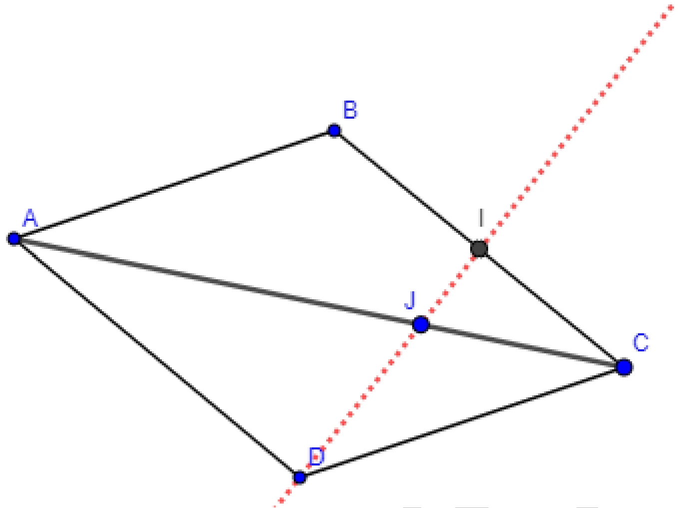
4) Que peut-on dire des points I ; J et D ?

Corrigé : 1) $\overrightarrow{JA} = -2\overrightarrow{JC}$ Signifie que : $\overrightarrow{JA} = -2\left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}\right)$

Signifie que : $\overrightarrow{JA} = -2\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{AC}$

Signifie que : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AJ}$

Signifie que : $\boxed{\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$ La figure : Voir la figure ci-dessous



2) On a : $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AB}$ PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\boxed{\overrightarrow{JB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}}$

On a aussi : $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}$

On a aussi : $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{JI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}}$

3) Montrons que : $\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{JI}$

On a : $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = 3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}\right) = 3\overrightarrow{JI}$

4) On a : $\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{JI}$ donc : les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires.

Par suite : les points I ; J et D sont alignés

Exercice 14 : (**) Soit ABCD un parallélogramme.

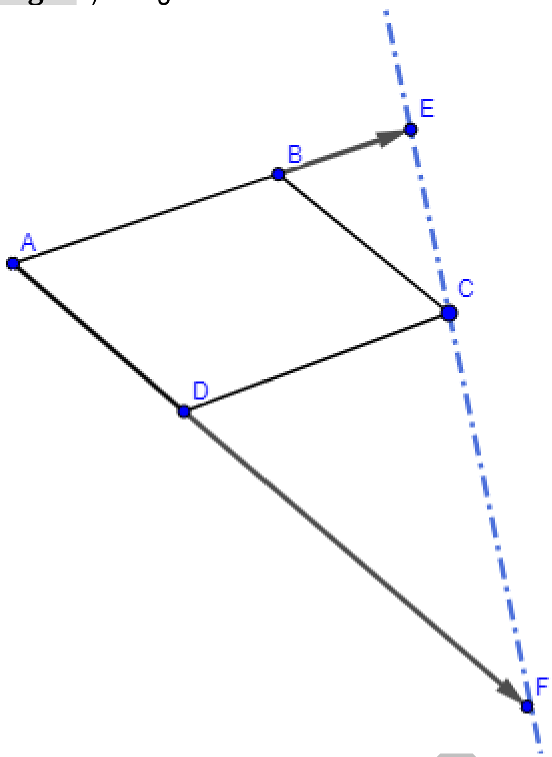
E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1) Faire une figure

2) Montrer que $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$ et que : $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}$

3) En déduire que : Les points E, F et C sont alignés

Corrigé : 1) La figure :



2) Montrons que $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Montrons que $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}$

De même : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$

3) Déduisons que : Les points E, F et C sont alignés

On a : $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$ donc : $\boxed{-\overrightarrow{EF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}}$ (1) or $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$

Donc : $\boxed{3\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}}$ (2)

De : (1) et (2) En déduit que : $3\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{EF}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{EF}=-3\overrightarrow{CE}$

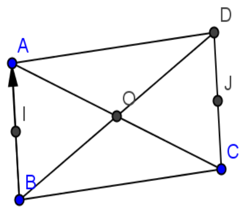
Donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires.

D'où : les points E, F et C sont alignés

Exercice 15 : (**) Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I et J sont les milieux respectivement des segments $[AB]$ et $[CD]$

1) Montrer que : $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

2) En déduire que O est le milieu du segment $[IJ]$



Corrigé :

1) On considère le triangle ABC on a I est le milieu du segment $[AB]$

Et O est le milieu du segment $[AC]$

Donc : d'après une propriété on a : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

De même : On considère le triangle ACD on a J est le milieu du segment $[AB]$ et O est le milieu du segment $[AC]$

Donc : d'après une propriété on a : $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2) Pour montrer que O est le milieu du segment $[IJ]$ il suffit de montrer que : $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$??

$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et puisque ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

On a donc : $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{O}$

Et par suite : O est le milieu du segment $[IJ]$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien