Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 : La droite dans le plan

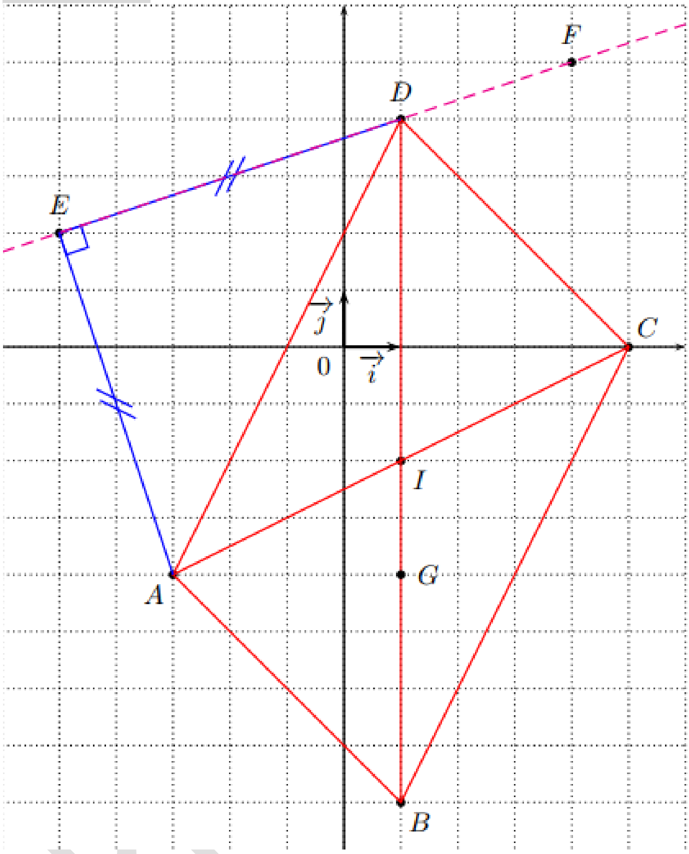
Exercice1 : (**) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient les points : $A\left(-3;-4\right)$; $B\left(1;-8\right)$; $C\left(5;0\right)$; $D\left(1;4\right)$; $E\left(-5;2\right)$ et $F\left(4;5\right)$

Toute réponse devra être soigneusement justifiée. On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

1) Montrer que ABCD est un parallélogramme.
2) Calculer les coordonnées du point I, point de concours des diagonales de ABCD.
3) Quelle est la nature du triangle AED ?
4) Les points E, D et F sont-ils alignés ?
5) Déterminer les coordonnées du point G tel que : $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ et que représente le point G ?

Solution :



1) Montrons que ABCD est un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

On a : $\overrightarrow{AB}\left(1+3;-8+4\right)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}\left(4;-4\right)$

Et On a : $\overrightarrow{DC}\left(5-1;0-4\right)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{DC}\left(4;-4\right)$

On a donc : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Par suite : $ABCD$ est un parallélogramme

2) Calculons les coordonnées du point I, point de concours des diagonales de ABCD.

Le point I, point de concours des diagonales de ABCD est le milieu du segment [AC]

Le milieu I du segment [AC] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ c'est-à-dire : $I\left(\frac{-3+5}{2};\frac{-4+0}{2}\right)$

C'est-à-dire : $I(1;-2)$

3) Déterminons la nature du triangle AED ?

2) Calculons les distances suivantes : AE et ED et AD

$AE=\left\|\overrightarrow{AE}\right\|=\sqrt{(x_E-x_A)^2+(y_E-y_A)^2}=\sqrt{(5+3)^2+(2+4)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$ED=\left\|\overrightarrow{ED}\right\|=\sqrt{(x_D-x_E)^2+(y_D-y_E)^2}=\sqrt{(1+5)^2+(4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$AD=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}=\sqrt{(1+3)^2+(4+4)^2}=\sqrt{80}$

On a : $AE^2+ED^2=40+40=80$ et $AD^2=80$

Donc : $AE^2+ED^2=AD^2$

Par suite d'après le théorème de Pythagore réciproque le triangle AED est rectangle en E

Et puisque on a aussi : $EA=ED$

Alors : le triangle AED est rectangle et isocèle en E

4) Les points E, D et F sont-ils alignés ?

On a : $\overrightarrow{DE}(-5-1;2-4)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{DE}(-6;-2)$

Et on a : $\overrightarrow{DF}(4-1;5-4)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{DF}(3;1)$

Et on a : $\det\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DF}\right)=\begin{vmatrix}-6 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-6\times1-(-2)\times3=-6+6=0$

Donc : $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires par suite les points E, D et F sont alignés.

5) Déterminons les coordonnées du point G tel que : $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

On a : $\overrightarrow{BI}(1-1;-2+8)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BI}(0;6)$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}\left(\frac{2}{3}\times0;\frac{2}{3}\times6\right)$ c'est-à-dire : $\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}(0;4)$

Et $\overrightarrow{BG}(x_G-1;y_G+8)$ et on a : $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ Signifie que : $\begin{cases}x_G-1=0\\ y_G+8=4\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x_G=1\\ y_G=-4\end{cases}$ donc : $G(1;-4)$ et G est le centre de gravité du triangle ABC

Exercice2 : (***) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes et déterminer le point d'intersection H (x ; y)

Dans les cas suivants :

1) $(D_1)\begin{cases}x=3t-7\\ y=2t-2\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ et $(D_2)\begin{cases}x=-2k+1\\ y=k+1\end{cases}(k\in\mathbb{R})$

2) (D_1) y $\begin{cases}x=-t+2\\ x=-t+3\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ et $(D_2):x+3y-5=0$

Solutions :1)

Un vecteur directeur de (D_1) est : $\vec{u}_1(3;2)$ et un vecteur directeur de (D_2) est : $\vec{u}_2(-2;1)$

$\det\left(\vec{u}_1;\vec{u}_2\right)=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3+4=7\neq0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

Par suite : (D_1) et (D_2) se coupent

Le point d'intersection vérifie le système : $\begin{cases} 3t-7=-2k+1 \\ 2t-2=k+1 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 3t+2k=8 \\ 2t-k=3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3t+2k=8 \\ 2t-k=3 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} 3t+2k=8 & (1) \\ 4t-2k=6 & (2) \end{cases}$

$(1)+(1)$ Donne : $7t=14$ c'est-à-dire : $t=2$ et puisque : $2t-k=3$ alors : $k=1$

Par suite : $\begin{cases} x=3\times 2-7=-1 \\ y=2\times 2-2=2 \end{cases}$ Par conséquent : $(D_1)\cap(D_2)=\{I(-1;2)\}$.

2) $(D_1)\begin{cases} x=-t+2 \\ x=-t+3 \end{cases}(t\in\mathbb{R})$ et $(D_2): x+3y-5=0$

Un vecteur directeur de (D_1) est : $\vec{u}_1(-1;-1)$ et un vecteur directeur de (D_2) est : $\vec{u}_2(-3;1)$

$\det(\vec{u_1};\vec{v_2})=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+3=2\neq 0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

Par suite : (D_1) et (D_2) se coupent.

Le point d'intersection vérifie le système : $\begin{cases} x=-t+2 \\ x=-t+3 \\ x+3y-5=0 \end{cases}$

Donc : $(-t+2)+3(-t+3)-5=0$ c'est-à-dire : $-4t+6=0$ par suite : $t=\frac{3}{2}$

Alors : $I:\begin{cases} x=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2} \end{cases}$ et par conséquent : $(D_1)\cap(D_2)=\left\{I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\right\}$

Exercice3 : (**)

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D): 3x-5y+6=0$ et $(D'): x-y=0$.

1) Donner une représentation paramétrique des Droites (D) et (D').

2) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) Qui passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC) .Avec : $E(3;3)$ et $C(4;0)$

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) et déterminer les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D').

4) Montrer que J est le milieu de $[IB]$.

Solution : 1) a) un vecteur directeur de $(D): 3x-5y+6=0$ est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}(5;3)$

Déterminons un point de (D) ?

Si $x=0$ alors : $(D): 3\times 0-5y+6=0$ donc $y=\frac{6}{5}$

Donc : une représentation paramétrique de la droites (D) est : $(D)\begin{cases} x=0+5t \\ y=\frac{6}{5}+3t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$

b) un vecteur directeur de $(D'): x-y=0$ est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}'(1,1)$

Déterminons un point de (D') ?

Si $x=0$ alors : $(D'): 0-y=0$ donc $y=0$

Donc : une représentation paramétrique de la droite (D') est : $(D')\begin{cases} x=0+1k \\ y=0+1k \end{cases} (k\in\mathbb{R})$

2) (Δ) passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC)

Donc : $\overrightarrow{EC}$ un vecteur directeur de (Δ) : $\overrightarrow{EC}(1;-3)$

Et on sait que : $\vec{u}(-b;a)$ donc : Donc : $a=-1$ et $b=-3$ par suite (Δ): $-3x-y+c=0$

Et on sait que (Δ) passe par $B(1;0)$ on trouve $c=3$ donc : (Δ) $-3x-y+3=0$

3)a) Déterminons les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) ?

On va résoudre le système $\begin{cases} 3x-5y=-6 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$ (1)

On fait la somme des deux équations membre a membre on trouve : $-6y=-9 \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve : $-3x-\dfrac{3}{2}+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Donc le point d'intersection I de (Δ) et (D) est $I\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

b) Déterminons les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D') ?

On va résoudre le système $\begin{cases} x-y=0 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$ (1)

$x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve : $-3x-x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$

Donc le point d'intersection J de (Δ) et (D') est $J\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right)$

4) Montrons que J est le milieu de $[IB]$

Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$?

On a : $\overrightarrow{IJ}\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{JB}\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{4}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$

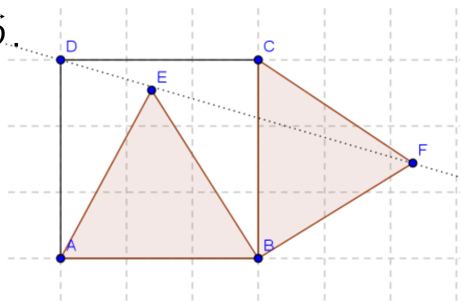
Donc : J est le milieu de $[IB]$

<u>Exercice4 :</u> (***) Soient $ABCD$ un carré tel que : $AB=a$ avec $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et ABE et BCF deux triangles équilatérales (voir figure ci-contre)

1) Exprimer les vecteurs : $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2) En déduire les coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

2) Montrer que les points : D ; E ; F sont alignés.



Solution : 1) Soit I Le milieu de $[AB]$ et Puisque ABE est un triangle équilatéral alors :

$AE^2 = AI^2 + IE^2$ Donc : $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + IE^2$.

Donc : $IE^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$.

Donc : $IE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ par suite : $\overrightarrow{IE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$

Or on a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$ par suite on a : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$.

Soit J Le milieu de $[BC]$

De la même façon on trouve que : $JF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\overrightarrow{JF} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$ Or on a : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JF}$

Par suite on a : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AF} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

2) Déduction des coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repère : $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

On a $A(0;0)$ et $A(1;0)$

On a aussi : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc : $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

On a aussi : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$ donc : $E\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On a aussi : $\overrightarrow{AF} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc : $F\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

3) Montrons que les points : D ; E ; F sont alignés.

On a : $\overrightarrow{DE}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$ et $\overrightarrow{DF}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} - 1\right) = 0$$

Les points : D ; E ; F sont alignés.

Exercice5 : **(******) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

On associe à chaque nombre réel m la droite : $(D_m): x + y - m = 0$

Et soient les droites : $(\Delta): 3x + 2y - 5 = 0$ et $(\Delta'): 3x + y - 2 = 0$

1) Montrer que tous les droites $(D_m): x + y - m = 0$ sont parallèles pour tout m dans $\mathbb{R}$

2) Montrer que pour tout m dans $\mathbb{R}$ la droite : (D_m) coupe la droite (Δ) en un point A_m et la droite (D_m) coupe la droite (Δ') en un point A'_m et déterminer les coordonnées des points A_m et A'_m

3) Soit I_m le milieu du segment $[A_m A'_m]$

a) Déterminer les coordonnées des points I_m en fonction de m

b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

Solution :1) On a : $(D_m): x+y-m=0$ et $m\in\mathbb{R}$

Donc : $\vec{u}(-1;1)$ est un vecteur directeur de (D_m)

Et puisque $\vec{u}(-1;1)$ est un vecteur constant (ne dépend pas de m) alors tous les droites $(D_m): x+y-m=0$ ont la même direction donc sont parallèles pour tout m dans $\mathbb{R}$.

1)a) On a : $(\Delta): 3x+2y-5=0$ donc : $\vec{v}(-2;3)$ est un vecteur directeur de (Δ)

Et on a : $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Par suite la droite (D_m) coupe la droite (Δ) en un point A_m

b) On a : $(\Delta'): 3x+y-2=0$ donc : $A\left(\frac{-5}{4};\frac{9}{4}\right)$ est un vecteur directeur de (Δ')

Et on a : $\det(\vec{u};\vec{v}') = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}'$ sont non colinéaires.

Par suite la droite (D_m) coupe la droite (Δ') en un point A'_m

c)déterminons les coordonnées des points A_m :

Posons : $A_m(x;y)$ et pour déterminer le couple $(x;y)$ on va résoudre le système (1)

$$\begin{cases} x+y-m=0 \\ 3x+2y-5=0 \end{cases}$$

Équivaut à : $\begin{cases} -2x-2y+2m=0 \ (1) \\ 3x+2y-5=0 \ (2) \end{cases}$

$(1)+(1)$ Donne : $x+2m-5=0$ c'est-à-dire : $x=-2m+5$ et donc : $y=3m-5$

Et par suite : $A_m(-2m+5;3m-5)$

d) Déterminons les coordonnées des points A'_m :

Posons : $A'_m(x;y)$ et pour déterminer le couple $(x;y)$ on va résoudre le système (1)

$$\begin{cases} x+y-m=0 \\ 3x+y-2=0 \end{cases}$$

Équivaut à : $\begin{cases} -x-y+m=0 \ (1) \\ 3x+y-2=0 \ (2) \end{cases}$

$(1)+(1)$ Donne : $2x+m-2=0$ c'est-à-dire : $x=\frac{2-m}{2}$ et donc : $y=\frac{3m-2}{2}$

Et par suite : $A'_m\left(\frac{2-m}{2};\frac{3m-2}{2}\right)$

3) a) I_m le milieu du segment $[A_mA'_m]$ donc : $x_{I_m}=\frac{x_{A_m}+x_{A'_m}}{2}=\frac{-5m+12}{4}$ et $y_{I_m}=\frac{y_{A_m}+y_{A'_m}}{2}=\frac{9m-12}{4}$

Par suite : $I_m\left(\frac{-5m+12}{4};\frac{9m-12}{4}\right)$ c'est-à-dire : $I_m\left(3-\frac{-5}{4}m;-3+\frac{9}{4}m\right)$

b) soit (E) l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

$M(x;y)\in(E)$ Équivaut à : qu'il existe un réel m tel que : $\begin{cases} x=3-\frac{-5}{4}m \\ y=-3+\frac{9}{4}m \end{cases}$

Ce système est la représentation paramétrique d'une droite qui passe par le point $A(3;-3)$ et de vecteur directeur : $\vec{w}\left(\frac{-5}{4};\frac{9}{4}\right)$

Donc : l'ensemble (E) des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$ est une droite d'équation cartésienne :
$(E)\ 9x+5y-12=0$

**Exercice6 : (******) Soient ABCD un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$

Les diagonales $[BD]$ et $[AC]$ se coupent I et les droites (AD) et (BC) se coupent J

Et on considère le Repère : $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ et on pose : $a=x_C$ avec : $a\succ 0$

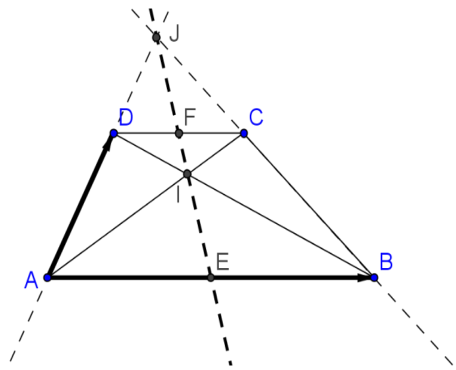
1) Donner une équation cartésienne des droites (AC) et (BD) et vérifier que $\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$ sont les coordonnées du point I

2) Donner une équation cartésienne des droites (AD) et (BC) et en déduire les coordonnées du point J

3) a) Donner une équation cartésienne de la droite (IJ) et montrer que les points E et F les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ appartiennent à la droite (IJ) (voir la figure).

b) Que peut-on dire des points : I ; E ; F et J ?

Solution :



On considère le Repère : $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ et on pose : $a=x_C$ avec : $a\succ 0$

On a : $A(0;0)$ et $B(1;0)$ et $D(0;1)$ et $C(a;1)$

1) a) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (AC)

On a : $A(0;0)$ et $C(a;1)$ donc : $\overrightarrow{AC}(a;1)$

Soit $M(x;y)\in(AC)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}\right)=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x & a \\ y & 1 \end{vmatrix}=0$ Equivaut à : $x-ay=0$

Par suite : $(AC): x-ay=0$

b) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (BD)

On a : $B(1;0)$ et $D(0;1)$ donc : $\overrightarrow{BD}(-1;1)$

Soit $M(x;y)\in(BD)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BD}\right)=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix}=0$ donc : : $x+y-1=0$

Par suite : $(BD): x+y-1=0$.

Vérifions que : $\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$ sont les coordonnées du point I ?

On a I est le point d'intersection des droites (AC) et (BD)

Puisque : $\frac{a}{a+1}-a\frac{1}{a+1}=0$ alors : $G\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)\in(AC)$

Et puisque : $\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}-1=\frac{a+1}{a+1}-1=1-1=0$ alors : $G\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)\in(BD)$

Donc : $G\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$ est le point d'intersection des droites (AC) et (BD)

Donc : $G=I$ et par suite : $I\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$

2) a) *Méthode 1:* Détermination d'une équation cartésienne de la droite (AD)

On a : $A(0;0)$ et $D(0;1)$ donc : $\overrightarrow{AD}(0;1)$

Soit $M(x;y)\in(AD)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AD}\right)=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix}=0$ cela est équivaut à : $x=0$ Par suite : $(AD): x=0$

Méthode 2: (AD) est l'axe des ordonnées donc son équation est : $(AD): x=0$

b) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (BC)

On a : $B(1;0)$ et $C(a;1)$ donc : $\overrightarrow{BC}(a-1;1)$

Soit $M(x;y)\in(BC)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}\right)=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x-1 & a-1 \\ y & 1 \end{vmatrix}=0$ Equivaut à : $x-1-(a-1)y=0$

Par suite : $(BC): x-(a-1)y-1=0$

Détermination des coordonnées du point J ?

On a J est le point d'intersection des droites (BC) et (AD)

Et puisque : $J\in(AD)$ alors : $x_J=0$ donc : $J(0;\alpha)$

Et puisque : $J\in(BC)$ et $(BC): x-(a-1)y-1=0$ alors : $0-(a-1)\alpha-1=0$

Donc : $(a-1)\alpha=-1$ et puisque : les droites (AD)et (BC) se coupent J alors $a\neq1$

Car si non ABCD sera un parallélogramme.

Donc : $\alpha=\frac{-1}{a-1}=\frac{1}{1-a}$ et par suite : $J\left(0;\frac{1}{1-a}\right)$

3)a) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (IJ)

On a : $I\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$ et $J\left(0;\frac{1}{1-a}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}\left(0-\frac{a}{a+1};\frac{1}{1-a}-\frac{1}{a+1}\right)$ 'est-à-dire :

$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{-a}{a+1};\frac{-2a}{a^2-1}\right)$

Soit $M(x;y)\in(IJ)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{JM};\overrightarrow{IJ}\right)=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x & \frac{-a}{a+1} \\ y+\frac{1}{a-1} & \frac{-2a}{a^2-1}\end{vmatrix}=0$ Equivaut à : $\frac{-2a}{a^2-1}x+\frac{a}{a+1}\left(y+\frac{1}{a-1}\right)=0$

Après simplification on trouve : $(IJ):-2x+(a-1)y+1=0$

Montrons que les points E et F appartiennent à la droite (IJ) ?

On a : $A(0;0)$et $B(1;0)$et $D(0;1)$ et $C(a;1)$

E est le milieu du segment $[AB]$ donc : $E\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ par suite : $E\left(\frac{1}{2};0\right)$

F est le milieu du segment $[CD]$ donc : $F\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right)$ par suite : $F\left(\frac{a}{2};1\right)$

On a : $(IJ):-2x+(a-1)y+1=0$

Puisque : $-2\frac{1}{2}+(a-1)0+1=0$ alors : $E\in(IJ)$

Puisque : $-2\frac{a}{2}+(a-1)1+1=-a+a-1+1=0$ alors : $F\in(IJ)$.

b) Puisque : $F\in(IJ)$et $E\in(IJ)$ alors les points I ; E ; F et J sont alignés.

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien