**Tronc commun Sciences BIOF**

# Correction Série N°4 : La droite dans le plan

**Exercice 1 :** (**) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Soient les points $A(1;2)$ ; $B(-3;-1)$ ; $C(3;-2)$ et les vecteurs $\vec{u}(-2;3)$ et $\vec{v}(2;4)$

1) Déterminer les coordonnées du point $D$ tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$
2) Déterminer les coordonnées de $I$ le milieu du segment [AB]
3) Calculer les distances suivantes : $AB$ ; $AC$ et $BC$

**Solution :1)** $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB}(-3-1;-1-2)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}(-4;-3)$

$\overrightarrow{BD}\left(x_D-x_B;y_D-y_B\right)$ C'est-à-dire : $\overrightarrow{BD}\left(x_D+3;y_D+1\right)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D+3=-4 \\ y_D+1=-3 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} x_D=-7 \\ y_D=-4 \end{cases}$

2) On a : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{1-3}{2};\frac{2-1}{2}\right)$ c'est-à-dire : $I\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

3) $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(-3-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$AC=\sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$BC=\sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}=\sqrt{(3+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$

**Exercice2 :** (**) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soit m un paramètre réel

Discuter suivant les valeurs de m la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chaque cas :

1) $\vec{u}(-2m;9)$ et $\vec{v}(-1;2m)$
2) $\vec{u}(3m+1;4)$ et $\vec{v}(1;3m+1)$

**Solution :** 1) On a : $\vec{u}(-2m;9)$ et $\vec{v}(-1;2m)$

$$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} -2m & -1 \\ 9 & 2m \end{vmatrix}=-4m^2+9=9-(2m)^2=(3-2m)(3+2m)$$

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ Équivaut à : $(3-2m)(3-2m)=0$ . Équivaut à : $3-2m=0$ .ou$3+2m=0$

Équivaut à : $m=\frac{3}{2}$ ou $m=-\frac{3}{2}$

Si $m=\frac{3}{2}$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $m=-\frac{3}{2}$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $m\neq\frac{3}{2}$ et $m\neq-\frac{3}{2}$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)\neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

2) On a : $\vec{u}(3m+1;4)$ et $\vec{v}(1;3m+1)$

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3m+1 & 1 \\ 4 & 3m+1 \end{vmatrix} = (3m+1)^2 - 4 = (3m+1)^2 - 2^2 = (3m+1-2)(3m+1+2) = (3m-1)(3m+3)$$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ Équivaut à : $(3m-1)(3m+3) = 0$ . Équivaut à : $3m-1=0$ .ou $3m+3=0$

Équivaut à : $m = \frac{1}{3}$ ou $m = -1$

Si $m = \frac{1}{3}$ alors $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $m = -1$ alors $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $m \neq \frac{1}{3}$ et $m \neq -1$ alors $\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

**Exercice3 :** (**) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Etudier la position relative des droites $(D_1)$ et $(D_2)$ dans les cas suivants et s'ils sont sécantes déterminer leurs points d'intersection H (x ; y)

1) $(D_1)\begin{cases} x = 5t-1 \\ y = -t+3 \end{cases}(t\in\mathbb{R})$ et $(D_2)\begin{cases} x = -15k+9 \\ y = 3k+1 \end{cases}(k\in\mathbb{R})$

2) $(D_1)$ : $\begin{cases} x = -5t+1 \\ y = t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$ et $(D_2): 2x - y + 10 = 0$

**Solutions :** 1) Un vecteur directeur de $(D_1)$ est : $\vec{u_1}(5;-1)$

Un vecteur directeur de $(D_2)$ est : $\vec{u_2}(-15;3)$

$\det(\vec{u_1};\vec{u_2}) = \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 15 = 0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Par suite : $(D_1)$ et $(D_2)$ sont strictement parallèles ou confondus

On a : $A(-1;3) \in (D_1)$ on va voir s'il appartient a $(D_2)$ ????

$\begin{cases} -1 = -15k+9 \\ 3 = 3k+1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} -10 = -15k \\ 2 = 3k \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} \frac{2}{3} = k \\ \frac{2}{3} = k \end{cases}$

Donc : $A(-1;3) \in (D_2)$

Par suite : $(D_1)$ et $(D_2)$ sont confondus

2) $(D_1)$ : $\begin{cases} x = -5t+1 \\ y = t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$ et $(D_2): 2x - y + 10 = 0$

Un vecteur directeur de $(D_1)$ est : $\vec{u_1}(-5;1)$ et un vecteur directeur de $(D_2)$ est : $\vec{u_2}(1;2)$

$\det(\vec{u_1};\vec{u_2}) = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 1 = -11 \neq 0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

Par suite : $(D_1)$ et $(D_2)$ se coupent.

Le point d'intersection vérifie le système : $\begin{cases} x = -5t+1 \\ y = t \\ 2x - y + 10 = 0 \end{cases}$

Donc : $2(-5t+1)-t+10=0$ c'est-à-dire : $-11t+12=0$ par suite : $t=\frac{12}{11}$

Alors : $I:\begin{cases} x = -5\times\frac{12}{11}+1 \\ y=\frac{12}{11} \end{cases}$ c'est-à-dire : $I:\begin{cases} x = -\frac{49}{11} \\ y=\frac{12}{11} \end{cases}$ et par conséquent : $(D_1)\cap(D_2)=\left\{I\left(-\frac{49}{11};\frac{12}{11}\right)\right\}$

**Exercice4 :** (***) Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ on considère les points suivants : $A(-7;2)$ ; $B(-1;-6)$ ; $C(8;-5)$ et $E(-4;0)$

1) Soit $(\Delta)$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\Delta)$

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$

c) Montrer que : $B\in(\Delta)$

d) Déterminer les coordonnées du point $F$ d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe des ordonnées.

e) Déterminer les coordonnées du point $G$ d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe des abscisses.

2) Soit $(D)$ la droite définie par la représentation paramétrique suivante: $(D)\begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(D)$

b) Montrer que les droites $(D)$ et $(\Delta)$ sont sécantes, puis déterminer leurs points d'intersection.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(D')$ parallèles a $(D)$ passant par $A(-7;2)$

**Solution :1)** a) Soit $(\Delta)$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

a) On cherche une équation cartésienne de la droite $(\Delta)$

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(\Delta)$

$M(x;y)\in(\Delta)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+7;y-2)$ et $\vec{u}(3;-4)$ sont colinéaires

Équivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x+7 & 3 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $-4(x+7)-3(y-2)=0$

Équivaut à : $-4x-28-3y+6=0$ Équivaut à : $-4x-3y-22=0$

Équivaut à : $-(4x+3y+22)=0$

Équivaut à : $4x+3y+22=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite $(\Delta)$ est : $(\Delta):4x+3y+22=0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite $(\Delta)$ s'écrit sous la forme : $(\Delta)$ $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de $(\Delta)$ est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(3;-4)$

Donc : $a=-4$ et $b=-3$ alors l'équation devient : (D) $-4x-3y+c=0$

Or on sait que $A(-7;2)$ et $A\in(\Delta)$

Donc : $-4\times(-7)-3\times 2+c=0$ c'est-à-dire : $28-6+c=0$ donc : $c=-22$

Par suite : $(\Delta):-4x-3y-22=0$ ou $(\Delta):4x+3y+22=0$

b) On cherche une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$

On a : la droite $(\Delta)$ passe par $A(-7;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

Donc : une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ est : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-7\\y=-4t+2\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

c) Montrons que : $B\in(\Delta)$

Méthode1 : On a : $(\Delta):4x+3y+22=0$ et $B(-1;-6)$

Alors : $4x_B+3y_B+22=4\times(-1)+3\times(-6)+22$

$=-4-18+22$

$=0$ Par suite : $B\in(\Delta)$

Méthode2 : On a : : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-7\\y=-4t+2\end{cases}$ et $B(-1;-6)$ alors : $\begin{cases}-1=3t-7\\-6=-4t+2\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}6=3t\\-8=-4t\end{cases}$ signifie que : $\begin{cases}t=2\\t=2\end{cases}$ (On trouve la même valeur pour $t\in\mathbb{R}$ )

Par suite : $B\in(\Delta)$

Remarque : si on trouve des valeurs différentes pour $t$ alors le point n'appartient pas a la droite

d) On cherche les coordonnées du point $F$ d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OY)$.

Méthode1 : On a : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-7\\y=-4t+2\end{cases}$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\y=-4t+2\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}3t-7=0\\y=-4t+2\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}t=\frac{7}{3}\\y=-4t+2\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}t=\frac{7}{3}\\y=-4\times\frac{7}{3}+2=-\frac{22}{3}\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}x=0\\y=-\frac{22}{3}\end{cases}$ par suite : $F\left(0;-\frac{22}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OY)$

Méthode2 : On a : $(\Delta):4x+3y+22=0$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\4x+3y+22=0\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\4\times 0+3y+22=0\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 3y=-22 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{22}{3} \end{cases}$

Par suite : $F\left(0;-\dfrac{22}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OY)$

e) On cherche les coordonnées du point $G$ d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OX)$.

Méthode1 : On a : $(\Delta)\begin{cases} x=3t-7 \\ y=-4t+2 \end{cases}$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=3t-7 \\ y=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=3t-7 \\ -4t+2=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=3t-7 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=3\times\dfrac{1}{2}-7=-\dfrac{11}{2} \\ y=0 \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\dfrac{11}{2};0\right)$ est le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OX)$

Méthode2 : On a : $(\Delta):4x+3y+22=0$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 4x+3y+22=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 4x+3\times0+22=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 4x=-22 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ x=-\dfrac{22}{4}=-\dfrac{11}{2} \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\dfrac{11}{2};0\right)$ est le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OX)$

2) Soit $(D)$ la droite définie par la représentation paramétrique suivante: $(D)\begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite $(D)$

Méthode1 : Soit $t\in\mathbb{R}$ ; on a : $(D)\begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x+4=-5t \\ y=t \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} \dfrac{x+4}{-5}=t \\ y=t \end{cases}$

Donc on obtient : $\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y}{2}$ (On Ecrit cette Equation sous la forme ax + by + c = 0):

Équivaut à : $\dfrac{x+4}{-5}=y$

Équivaut à : $x+4=-5y$

Équivaut à : $x+5y+4=0$

Équivaut à : $(D)$ : $x+5y+4=0$

Méthode2 : on a : $(D)\ \begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$

Donc : la droite $(D)$ passe par $E(-4;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-5;1)$

Une équation cartésienne de la droite $(D)$s'écrit sous la forme : $(\Delta)\ ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de $(D)$est $\vec{v}(-b;a)$ or on a : $\vec{v}(-5;1)$

Donc : $a=1$ et $b=5$ alors l'équation devient : (D) $x+5y+c=0$

Or on sait que $E(-4;0)$ et $E\in(D)$

Donc : $-4+5\times0+c=0$ c'est-à-dire : $-4+0+c=0$ donc : $c=4$

Par suite : $(D)\ x+5y+4=0$

C'est-à-dire après simplification : $(D)$ : $x+5y+4=0$

2)b) Montrons que les droites $(D)$et $(\Delta)$ sont sécantes, puis déterminons leurs points d'intersection.

Méthode1 : On a : $(\Delta)$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

On a : $(D)\ \begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$ : Un vecteur directeur de $(D)$est $\vec{v}(-5;1)$

Ou On a : $(D)$ : $x+5y+4=0$ : Un vecteur directeur de $(D)$est $\vec{v}(-5;1)$

$$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=3\times1-(-4)\times(-5)=3-20=-17\neq0$$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires alors les droites $(D)$et $(\Delta)$ sont sécantes

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases} (D): x+5y+4=0 \\ (\Delta): 4x+3y+22=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x+5y=-4 \\ 4x+3y=-22 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x+5y=-4 & (\times-4) \\ 4x+3y=-22 & (\times1) \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} -4x-20y=16 \\ 4x+3y=-22 \end{cases}$

On fait la somme des Equations (1) et (2) on obtient : $-17y=-6$ Équivaut à : $y=\dfrac{6}{17}$

D'où : $x+5y=-4$ Équivaut à : $x=-5y-4$ Équivaut à : $x=-5\times\dfrac{6}{17}-4=-\dfrac{30}{17}-4=-\dfrac{98}{17}$

Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\dfrac{98}{17};\dfrac{6}{17}\right)\right\}$

Méthode2 : On a : $(\Delta): 4x+3y+22=0$ et on a : $(D)\ \begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \\ (\Delta):4x+3y+22=0 \end{cases}$

D'où : $4(-5t-4)+3t+22=0$ Équivaut à : $-20t-16+3t+22=0$

Équivaut à : $-17t+6=0$ Équivaut à : $-17t=-6$ Équivaut à : $t=\frac{6}{17}$

Donc : $\begin{cases} x=-5\times\frac{6}{17}-4=-\frac{30}{17}-4=-\frac{98}{17} \\ y=\frac{6}{17} \end{cases}$ Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{98}{17};\frac{6}{17}\right)\right\}$

3) Déterminons une représentation paramétrique de la droite $(D')$ parallèles a $(D)$ passant par $A(-7;2)$

On a : $(D')$ passe par le point $A(-7;2)$ et parallèle a $(D)$ et $\vec{v}(-5;1)$ un vecteur directeur de $(D)$

Donc : $\vec{v}(-5;1)$ est aussi un vecteur directeur de $(D')$

Donc : $(D')$ passe par le point $A(-7;2)$ et $\vec{v}(-5;1)$ un vecteur directeur de $(D')$

Donc : une représentation paramétrique de la droite $(D')$ est : $(D')\begin{cases} x=-5t-7 \\ y=t+2 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

**Exercice5 :** (***) Soient $A$ ; $B$ ; $C$ trois points du plan ; $E$ et $F$ deux points tel que :
$\overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

1) Montrer que les points $C$ ; $E$ ; $F$ sont alignés

2) Déterminer les coordonnées des points : $A$ ; $B$ ; $C$ ; $E$ ; $F$ dans le repère : $\left(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

3) Montrer par une autre méthode que les points : $C$ ; $E$ ; $F$ sont alignés

**Solution :** 1) on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$ Par suite : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$ $(1)$

D'autre part on a : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{4}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$ $(2)$.

De $(1)$ et $(2)$ en déduit que : $\overrightarrow{CE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CF}$ par suite : les points $C$ ; $E$ ; $F$ sont alignés.

2) En considérant le repère : $\left(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ on a $C(0;0)$

On a $\overrightarrow{CA}=1\overrightarrow{CA}+0\overrightarrow{CB}$ donc $A(1;0)$ et on a $\overrightarrow{CB}=01\overrightarrow{CA}+1\overrightarrow{CB}$ donc $B(0;1)$

On a : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$ donc : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et par suite : $F\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$ donc : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ par suite : $E\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

3) Montrons par une autre méthode que les points : $C$ ; $E$ ; $F$ sont alignés ?

Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires : $\det\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CF}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{4}\end{vmatrix}=-\frac{2}{12}+\frac{2}{12}=0$.

Donc : $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires par suite les points $C$ ; $E$ ; $F$ sont alignés.

**Exercice6:** (****) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

$m$ est un réel donné et $\left(D_m\right)$ est la famille de droites d'équation : $\left(D_m\right):\left(m+2\right)x+\left(2m+2\right)y+2=0$

1)Déterminer et construire la droite : $\left(D_0\right)$

2)Déterminer et construire les droites $\left(D_m\right)$ qui sont parallèles aux axes.

3)Montrer, de deux façons différentes, que deux droites quelconques ne peuvent pas être parallèles.

4)Existe-t-il une droite $\left(D_m\right)$ qui passe par le point $A\left(3;2\right)$? une qui passe par $B\left(-4;2\right)$?

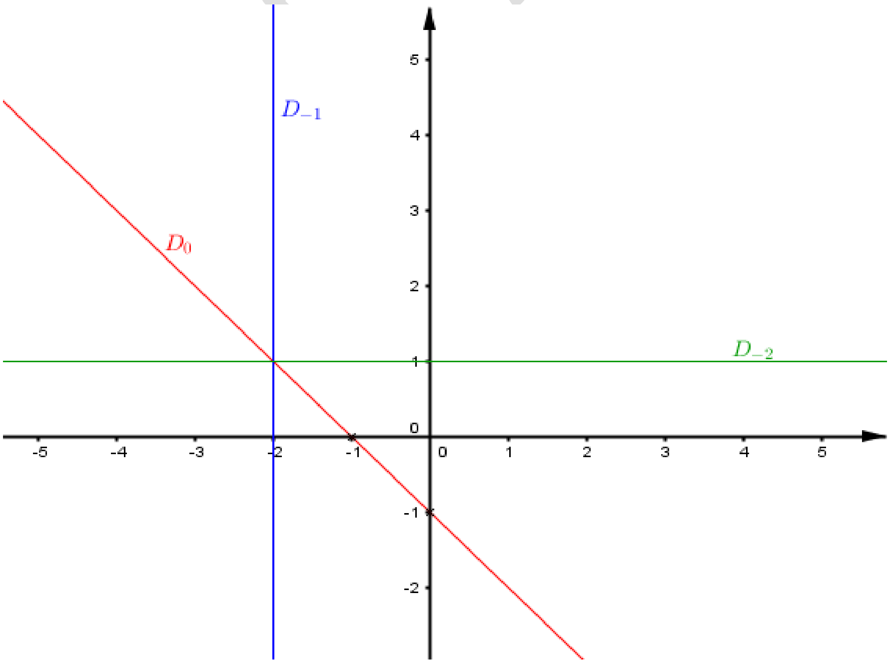
5)Pour quelles valeurs de $m$ les droites $\left(D_m\right)$ ne rencontrent-elles pas la parabole

d'équation : $y=\frac{x^2}{4}$

**Solution :**1)1)Une équation cartésienne de $\left(D_0\right):\left(0+2\right)x+\left(2\times0+2\right)y+2=0$ c'est-à-dire :

$\left(D_0\right):2x+2y+2=0$ ou également $\left(D_0\right):x+y+1=0$

Les points de coordonnées (−1;0) et (0;−1) appartiennent de façon évidente à la droite $\left(D_0\right)$



2)

• $(D_m)$ Parallèle à l'axe des abscisses signifie : $m+2=0$ c'est-à-dire : $m=-2$

Une équation cartésienne de $(D_{-2}):(-2+2)x+(2\times(-2)+2)y+2=0$

C'est-à-dire : $(D_{-2}):-2y+2=0$ C'est-à-dire : $(D_{-2}):y=1$

• $(D_m)$ Parallèle à l'axe des ordonnées signifie : $2m+2=0$ c'est-à-dire : $m=-1$

Une équation cartésienne de $(D_{-1}):(-1+2)x+(2\times(-1)+2)y+2=0$

C'est-à-dire : $(D_{-1}):x+2=0$ C'est-à-dire : $(D_{-1}):x=-2$

3) **Première méthode :** Montrons que le point $I(-2;1)$) appartient à toutes les droites $(D_m)$

$$(m+2)\times(-2)+(2m+2)\times1+2=-2m-4+2m+2+2$$
$$=0$$

Le point $I(-2;1)$) appartient donc à toutes les droites $(D_m)$.

Les droites $(D_m)$ ont donc un point en commun.

Montrons que deux droites ne sont pas confondues.

Supposons qu'il existe deux nombres $a$ et $b$ tels que $(D_a)$ et $(D_b)$ soient confondues.

La seule parallèle à l'axe des ordonnées est $(D_{-1}):x=-2$. On peut donc considérer le point d'intersection des deux droites $(D_a)$ et $(D_b)$ avec l'axe des ordonnées qui a pour coordonnées $(0;y)$

On obtient donc :

Pour $(D_a)$ : $(2a+2)y+2=0$ C'est-à-dire : $(D_m):y=-\dfrac{2}{2a+2}$

Pour $(D_b)$ : $(2b+2)y+2=0$ C'est-à-dire : $(D_m):y=-\dfrac{2}{2b+2}$

On a donc : $-\dfrac{2}{2a+2}=-\dfrac{2}{2b+2}$ qui signifie que : $2a+2=2b+2$ qui signifie que : $a=b$

Deux droites quelconques $(D_m)$ ne peuvent donc pas être parallèles

**Deuxième méthode :** Un vecteur directeur de $(D_m)$ est $\vec{u}_m(-2m-2;m+2)$

On considère deux réels quelconques $a$ et $b$ .

Les vecteurs directeurs associés sont donc : $\vec{u}_a(-2a-2;a+2)$ et $\vec{u}_b(-2b-2;b+2)$

Les droites $(D_a)$ et $(D_b)$ sont parallèles signifie que : $\vec{u}_a$ et $\vec{u}_b$ sont colinéaires

Signifie que : $\det(\vec{u}_a;\vec{u}_b)=\begin{vmatrix}-2a-2 & -2b-2\\ a+2 & b+2\end{vmatrix}=0$

Signifie que : $(-2a-2)(b+2)-(-2b-2)(a+2)=0$

Signifie que : $-2ab-4a-2b-4+2ab+2a+4b+4=0$

Signifie que : $-2a+2b=0$

Signifie que : $a=b$

Deux droites distinctes $(D_m)$ ne sont donc jamais parallèles.

4)a) Existe-t-il un réel $m$ tel que droite $(D_m)$ qui passe par le point $A(3;2)$ ?

$3(m+2)+2(2m+2)+2=0$ Signifie que : $3m+6+4m+4+2=0$

Signifie que : $7m+12=0$ Signifie que : $m=-\frac{12}{7}$

Par conséquent le point $A(3;2)$ appartient à la droite : $\left(D_{-\frac{12}{7}}\right)$

b) Existe-t-il un réel $m$ tel que droite $(D_m)$ qui passe par le point $B(-4;2)$?

$-4(m+2)+2(2m+2)+2=0$ Signifie que : $-4m-8+4m+4+2=0$

Signifie que : $-2=0$

Par conséquent le point $B(-4;2)$ n'appartient à aucune droite $(D_m)$

1) Déterminons quelles valeurs de $m$ les droites $(D_m)$ ne rencontrent-elles pas la parabole d'équation : $y=\frac{x^2}{4}$

On a :Le point $I(-2;1)$) appartient donc à toutes les droites $(D_m)$.

Et $\frac{(-2)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$ donc : $I(-2;1)$ appartienne à la parabole d'équation : $y=\frac{x^2}{4}$

Les droites $(D_m)$ rencontrent donc toujours cette parabole.

**Exercice7 :** (*) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Déterminer et représenter l'ensemble $(E)$ des points $M(x;y)$ dans les cas suivants :

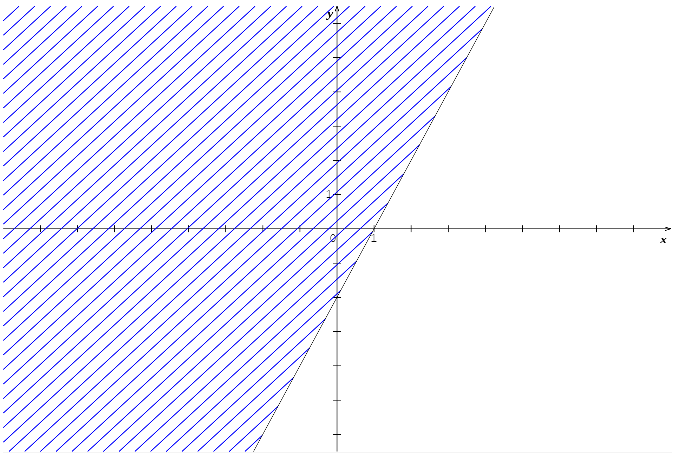
1) $2x-y-2<0$ 2) $x-y-3\geq 0$

**Solution :**1) Dans un premier temps : de l'inéquation $2x-y-2<0$ on en déduit L'équation de la Droite $(D)$ : $2x-y-2=0$.

Cette droite passe par les points $A(0;-2)$ et $B(1;0)$ détermine Deux demi-plans $P_1$ et $P_2$ (Il nous reste à trouver lequel des deux demis plans qui est la solution de l'inéquation.)

(Nous choisissons un point pris dans l'un des demi-plans, relevons ses coordonnées et nous contrôlons si ce point vérifie l'inéquation.

*Conseil :* On choisit de référence le point « O » de coordonnées (0 ; 0 ) ; c'est-à-dire x= 0 et y = 0 . Les calculs sont donc simplifiés. (si la droite passe par « O », on prendra un autre point…)




Soit $O(0;0)$ On a $2\times 0-0-2<0$

Donc : les coordonnes (0 ; 0) vérifie l'inéquation.

Donc : l'ensemble $(E)$ des points $M(x;y)$ tel que $2x-y-2<0$ est le demi- plan $P_1$ hachuré qui contient le point $O(0;0)$ privé de la droite $(D)$.

**2)** Dans un premier temps : De l'inéquation précédente on en déduit l'équation de la droite : $(D)$ :

$x-y-3=0$ qui détermine deux demi-plans $P_1$ et $P_2$.

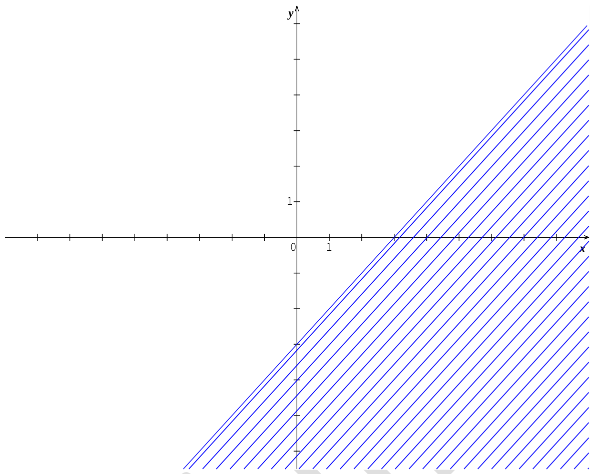
Cette droite passe par les points $A(0;-3)$ et $B(1;-2)$

On a : $0-0-3\geq 0$ c'est-à-dire : $-3\geq 0$ on constate que le résultat est impossible

Donc : les coordonnes (0 ; 0) ne vérifie pas l'inéquation.

Donc l'ensemble $(E)$ des points $M(x;y)$ tel que :

$x-y-3\geq 0$ est le demi- plan $P_1$ hachuré qui ne contient pas le point $O(0;0)$ .




**PROF: ATMANI NAJIB**

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*