Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°3 : La droite dans le plan

Exercice 1 : (**) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soient $A(1;2)$; $B(-5;4)$

1) Déterminer les coordonnées de I ; le milieu du segment [AB] et calculer $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
2) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$
3) Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$
4) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$
5) Déterminer les coordonnées du point D tel que : $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution :1) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$

Donc : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ c'est-à-dire : $I\left(\frac{1+(-5)}{2};\frac{2+4}{2}\right)$

Donc : $I(-2;3)$.

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

2) on a $A(1;2)$; $B(-5;4)$; $O(0;0)$

Donc $\overrightarrow{OA}(x_A-x_O;y_A-y_O)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OA}(1-0;2-0)$ alors : $\overrightarrow{OA}(1;2)$

$\overrightarrow{OB}(x_B-x_O;y_B-y_O)$ C'est-à-dire : $\overrightarrow{OB}(-5-0;4-0)$ alors : $\overrightarrow{OB}(-5;4)$

On a $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OC}(1+(-5);2+4)$ Donc $\overrightarrow{OC}(-4;6)$ alors : $C(-4;6)$

3) on a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ donc $OACB$ est un parallélogramme

On vérifie : on a $\overrightarrow{OA}(1;2)$ ①

Et $\overrightarrow{BC}(-4+5;6-4)$ c a d $\overrightarrow{BC}(1;2)$ ②

De ① et ② on a donc : $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ et alors : $OACB$ est un parallélogramme

4) on a $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{OA}(1;2)$ et $2\overrightarrow{OB}(-10;8)$

$\overrightarrow{IC}(-4+2;6-3)$ Donc $\overrightarrow{IC}(-2;3)$

On a : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$ donc $\vec{u}(1-10+2;1+8+3)$ alors : $\vec{u}(-11;13)$

5) $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}(-5-1;4-2)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}(-6;2)$

Et $\overrightarrow{DC}(-4-x;6-y)$

On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ Signifie que : $\begin{cases}-4-x=-6\\6-y=2\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ et par suite : $D(2;4)$

Exercice2 : (**) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soit m un paramètre réel

Discuter suivant les valeurs de m la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chaque cas :

1) $\vec{u}(3;2m+1)$ et $\vec{v}(2;m)$
2) $\vec{u}(m;1)$ et $\vec{v}(1;m)$

Solution :1) on a : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2m+1 & m\end{vmatrix}=3\times m-2(2m+1)=3m-4m-2=-m-2$

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ Équivaut à : $-m-2=0$ c'est-à-dire : $m=-2$

Si $m=-2$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m\neq-2$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)\neq0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

2) on a : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}m & 1\\ 1 & m\end{vmatrix}=m^2-1=m^2-1^2=(m+1)(m-1)$.

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ Équivaut à : $(m+1)(m-1)=0$.

Équivaut à : $m=-1$ ou $m=-1$

Si $m=1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $m=-1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $m\neq1$ et $m\neq-1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)\neq0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Exercice3 : (*) Donner un point et un vecteur directeur de la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases}x=-6t+5\\ y=-9\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Solution : On a : $\begin{cases}x=-6t+5\\ y=-9\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x=-6t+5\\ y=0t-9\end{cases}$ $A(5;-9)\in D$ et $\vec{u}(-6;0)$ est un vecteur directeur de la droite D.

Exercice4 : (*) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par les points : A (5 ; 13) et B (10; 23).

Solution : Les points A et B appartiennent à la droite (D), donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

On a $\overrightarrow{AB}(10-5;23-13)$ donc $\overrightarrow{AB}(5;10)$ en divisant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 5, nous obtenons le vecteur $\vec{u}(1;2)$ qui est aussi un vecteur directeur de la droite (D),

Donc b = 1 et a = -2

Une équation cartésienne de la droite d est donc :de la forme : - 2 x + y + c = 0

Comme le point A (5 ; 13) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation :

-2x5 + 13 + c = 0

Donc – 10 + 13 + c = 0 D'où : c = - 3

Une équation cartésienne de la droite (D), est donc : (D) : -2 x + y - 3 = 0

Exercice5 : (**) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1)Donner un vecteur directeur de la droite (Δ) d'équation : $(\Delta):2x+3y+5=0$

2) Déterminer une équation de la droite (D) parallèle à (Δ) et passant par le point $A(-2,3)$

3)Déterminer une équation de la droite (D_1) passant par $A(-2,3)$) et de vecteur directeur $\vec{u}(1,-4)$

Solutions : 1) On a : $(\Delta):2x+3y+5=0$

Par conséquent un vecteur directeur de cette droite est $\vec{v}(-3,2)$

2) On a : la droite (D) parallèle à (Δ) donc : une équation de la droite (D) de la forme :

$(D):2x+3y+c=0$

Comme : (D) passe par le point $A(-2,3)$ alors : $A(-2,3)\in(D)$

Donc : Les coordonnées du point $A(-2,3)\in(D)$ sont donc solution de l'équation : $(D): 2x+3y+c=0$

Donc : $2\times(-2)+3\times3+c=0$ c'est-à-dire : $-4+9+c=0$ c'est-à-dire : $c=-5$

Par suite : une équation de la droite (D) est : $(D): 2x+3y-5=0$

3) Un vecteur directeur de (D_1) est : $\vec{u}(1,-4)$

Donc équation cartésienne de cette droite est : $(D_1): 4x-y+c=0$

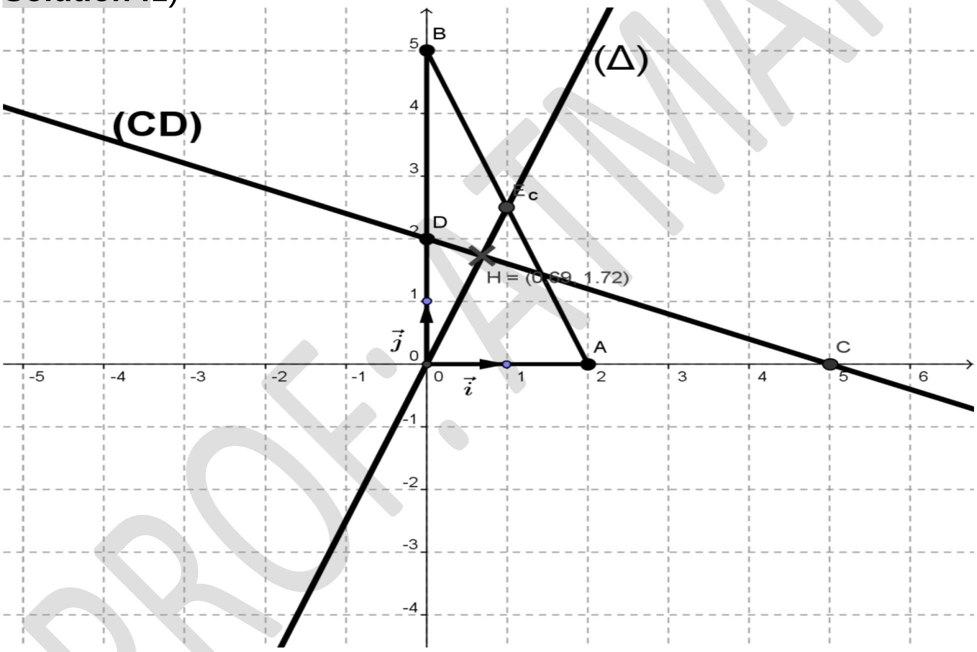
Comme : $A(-2,3)\in(D)$ alors : $4\times(-2)-3+c=0$ c'est-à-dire : $c=-5$

Par suite : une équation de la droite (D_1) est : $(D_1): -4x-y-5=0$ ou encore $(D_1): 4x+y+5=0$

Exercice6 : (***) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient les points A(2 ; 0), B (0 ; 5) ; C (5 ; 0) et D (0 ; 2).
1) Placer les points et donner une équation cartésienne de la médiane (Δ) issue de O dans le triangle OAB.
2) Donner une équation cartésienne de la droite (CD).
3) Donner une équation réduite de la droite (CD) et en déduire le coefficient directeur de la droite (CD).
4) Déterminer les coordonnées du point H intersection des droites (Δ) et (CD).
5) Montrer que la médiane issue de O dans le triangle OAB est la hauteur issue de O dans le triangle OCD.

Solution :1)



la médiane (Δ) issue de O dans le triangle OAB passe par O et E le milieu du segment [AB]

Le milieu E du segment [AB] a pour coordonnées $E\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$ c'est-à-dire : $E\left(1;\frac{5}{2}\right)$

Donc le vecteur $\overrightarrow{OE}\left(1;\frac{5}{2}\right)$ est un vecteur directeur de cette droite (Δ) (b = -1 et a = $\frac{5}{2}$)

Une équation cartésienne de la droite (Δ) est donc de la forme : (Δ) : $\frac{5}{2}x-y+c=0$

Comme le point O (0; 0) appartient à la droite (Δ) ses coordonnées vérifient l'équation : $\frac{5}{2}\times0-0+c=0$ c'est-à-dire : $c=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite (Δ) est donc : $\frac{5}{2}x - y = 0$ ou bien : (Δ) : $5x - 2y = 0$

2) Déterminons une équation cartésienne de la droite (CD).

Le vecteur $\overrightarrow{CD}(-5;2)$ est un vecteur directeur de cette droite (CD). (b = 5 et a = 2)

Une équation cartésienne de la droite (CD). est donc de la forme : (CD) : $2x+5y+c=0$

Comme le point C (5 ; 0) appartient à la droite (CD) alors : $2\times5+5\times0+c=0$

Donc : $c=-10$

D'où une équation cartésienne de la droite (CD) est donc : (CD) : $2x+5y-10=0$

3) Déterminons une équation réduite de la droite (CD) et le coefficient directeur de la droite (CD).

On a : (CD) : $2x+5y-10=0$ donc : $5y=-2x+10$

Par suite : $y=-\frac{2}{5}x+2$: l'équation réduite de la droite (CD)

Donc : $-\frac{2}{5}$ est le coefficient directeur de la droite (CD).

4) Déterminons les coordonnées du point H intersection des droites (Δ) et (CD).

On a : $\overrightarrow{CD}(-5;2)$ est un vecteur directeur de la droite (CD)

Et $\overrightarrow{OE}\left(1;\frac{5}{2}\right)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) et $\det\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{OE}\right)=\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 2 & \frac{5}{2}\end{vmatrix}=\frac{-25}{2}-2=\frac{-29}{2}\neq 0$

Donc : $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont non colinéaires

Par suite : des droites (Δ) et (CD) sont sécantes en un point H

Le point d'intersection vérifie le système : $\begin{cases}5x-2y=0\\ 2x+5y-10=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}5x-2y=0\\ 2x+5y=10\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=25+4=29\neq 0$ donc solution unique : $x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -2\\ 10 & 5\end{vmatrix}}{29}=\frac{20}{29}$ et $y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 0\\ 2 & 10\end{vmatrix}}{295}=\frac{50}{29}$

Donc : le point d'intersection est $H\left(\frac{20}{29};\frac{50}{29}\right)$

5)il suffit de montrer que : le triangle OHD est rectangle en H ? D (0 ; 2).

$OH=\sqrt{\left(\frac{20}{29}\right)^2+\left(\frac{50}{29}\right)^2}$ et $DH=\sqrt{\left(\frac{20}{29}\right)^2+\left(\frac{50}{29}-2\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{20}{29}\right)^2+\left(\frac{8}{29}\right)^2}$

$OD=\sqrt{(2)^2+(0)^2}=2$

On peut vérifier que ; $OH^2+DH^2=OD^2$ et par suite : le triangle OHD est rectangle en H

Exercice7 : (**)

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et Soient les points $A(-1,2)$; $B(3,1)$

Et les droites : $(D_1):2x+8y+2=0$ et $(D_2):x-y-2=0$

1) Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes et déterminer le point d'intersection H (x ; y)

2) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

3) Etudier la position relative des droites (AB) et (D_1)

4) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) Qui passe par le point $C(3,-1)$ et parallèle a (D_2)

Solution : 1) On a : $2\times(-1)-8\times1=-10\neq0$

Donc : (D_1) et (D_2) se coupent et Le point d'intersection vérifie le système : $\begin{cases}2x+8y+2=0\\x-y-2=0\end{cases}$

$\begin{cases}2x+8y+2=0\\x-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4y=-1\\x-y=2\end{cases}$

On utilise la méthode des déterminants par exemple pour résoudre ce système : $\Delta=\begin{vmatrix}1&4\\1&-1\end{vmatrix}=-5\neq0$

Donc : $x=\dfrac{\begin{vmatrix}-1&4\\2&-1\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-7}{-5}=\dfrac{7}{5}$ et $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{3}{5}$

Donc : le point d'intersection est $H\left(\dfrac{7}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$

2)la droite (AB) a une équation de la forme :(AB) : $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur est : $\overrightarrow{AB}(4,-1)$ $\overrightarrow{AB}(-b,a)$

Donc : $a=-1$ et $-b=4$ donc $b=-4$

L'équation devient : $-1x-4y+c=0$

On a : $A\in(AB)$ donc : $1-8+c=0$ cad $c=7$

Donc : (AB) $x+4y-7=0$

3) $(D_1):2x+8y+2=0$ et (AB) $x+4y-7=0$

Et on a : $2\times4-8\times1=0$ Donc : (D_1) et (AB) sont parallèles

4) (Δ) est parallèles (D_2) donc le vecteur directeur de (D_2) Est un vecteur directeur de (Δ)

Donc : $\vec{u}(1,1)$ est un vecteur (Δ) qui passe par $C(3,-1)$

Donc : : $(\Delta)\begin{cases}x=3+t\\y=-1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Exercice 8 : (***) ABC est un triangle quelconque : A', B' et C' sont les milieux respectifs de : [BC], [CA] et [AB] et M est le milieu de [BC'] et L est le symétrique de A' par rapport à B.

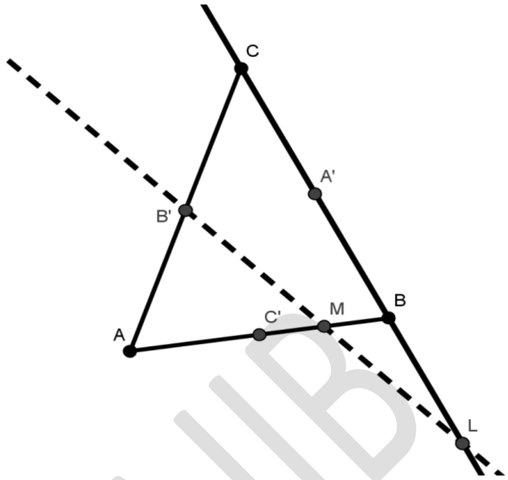
1) Faire une figure.

2) Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

3) Montrer que les points B', M et L sont alignés.

Solution : 1) La figure.

2) On a A est l'origine du repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ donc : $A(0;0)$



On a : $\overrightarrow{AB}=1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$ donc $B(1;0)$ et

On a : $\overrightarrow{AC}=0\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}$ donc : $C(0;1)$

On a : $\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$ donc : $C'\left(\frac{1}{2};0\right)$

On a : $\overrightarrow{AB'}=0\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc : $B'\left(0;\frac{1}{2}\right)$

On a : A' le milieu de [BC] Donc : $A'\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$

C'est-à-dire : $A'\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

M est le milieu de [BC'] donc : $M\left(\frac{x_B+x_{C'}}{2};\frac{y_B+y_{C'}}{2}\right)$ c'est-à-dire : $M\left(\frac{3}{4};0\right)$

L est le symétrique de A' par rapport à B. signifie : $\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{A'B}$

On a : $\overrightarrow{BL}\left(x_L-1;y_L\right)$ et $\overrightarrow{A'B}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{A'B}$ Signifie que : $\begin{cases}x_L-1=\frac{1}{2}\\ y_L=-\frac{1}{2}\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x_L=\frac{3}{2}\\ y_L=-\frac{1}{2}\end{cases}$ donc : $L\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

3) Montrons que les points B' , M et L sont alignés.
Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{B'M}$ et $\overrightarrow{B'L}$ sont colinéaires

On a : $M\left(\frac{3}{4};0\right)$ et $B'\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et $L\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ donc : $\overrightarrow{B'M}\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{B'L}\left(\frac{3}{2};-1\right)$

Et on a $\det\left(\overrightarrow{B'M};\overrightarrow{B'L}\right)=\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0$

Donc : $\overrightarrow{B'M}$ et $\overrightarrow{B'L}$ sont colinéaires par suite les points B' , M et L sont alignés.

Exercice9 : (***) Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ on considère les points Suivants : $A(-1;2)$; $B(4;4)$; $C(2;-1)$

1)Déterminer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ et Que peut-on conclure pour les Points A; B et C

2) Montrer que le triangle ABC est isocèle.

3) Soit (Δ) la droite définie par : $(\Delta): x-\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}=0$

a) Montrer que : $C\in(\Delta)$

b) Déterminer l'équation réduite de (Δ)

c) Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ') passant par A et perpendiculaire a (Δ)

4) Soit (D) la droite définie par : $(D)\begin{cases}x=2t-3\\ y=3t-3\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D)

b) Montrer que (D) et (Δ) sont sécantes.

c) Tracer A ; B, C; (D) ;(Δ) et(Δ') dans le Repère orthonormé$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Solution : On considère les points suivants : $A(-1;2)$; $B(4;4)$; $C(2;-1)$

1)Déterminons les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

On a : $\overrightarrow{AB}(4+1;4-2)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}(5;2)$

On a : $\overrightarrow{BC}(2-4;-1-4)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BC}(-2;-5)$

On a donc : $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix}5 & -2\\ 2 & -5\end{vmatrix}=5\times(-5)-(-2)\times 2=-25+4=-21\neq 0$

Donc : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non colinéaires par suite les Points A; B et C ne sont pas alignés

2) Montrons que le triangle ABC est isocèle.

On a : $\overrightarrow{AB}(5;2)$ donc : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

On a : $\overrightarrow{BC}(-2;-5)$ donc : $BC=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

Donc : $AB=BC$ par suite : le triangle ABC est isocèle en B

3) Soit (Δ) la droite définie par : $(\Delta): x-\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}=0$

a) Montrons que : $C\in(\Delta)$

On a : $C(2;-1)$ et $(\Delta): x-\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}=0$

$2-\frac{5}{2}\times(-1)-\frac{9}{2}=2+\frac{5}{2}-\frac{9}{2}=2-\frac{4}{2}=2-2=0$ Par suite : $C\in(\Delta)$

b) Déterminons l'équation réduite de (Δ) :

On a : $(\Delta): x-\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}=0$ signifie que : $-\frac{5}{2}y=-x+\frac{9}{2}$

Signifie que : $5y=2x-9$ (on multiplie par -2)

Signifie que : $y=\frac{2x-9}{5}$

Signifie que : $y=\frac{2}{5}x-\frac{9}{5}$

Donc : l'équation réduite de (Δ) est $y=\frac{2}{5}x-\frac{9}{5}$

c) Déterminons l'équation réduite de la droite (Δ') passant par $A(-1;2)$ et perpendiculaire a (Δ)

L'équation réduite de la droite (Δ') s'écrit sous la forme : $y=mx+p$

Comme les droites (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires alors : $m\times\frac{2}{5}=-1$ c'est-à-dire : $m=-\frac{5}{2}$

Donc : (Δ') s'écrit sous la forme : $y=-\frac{5}{2}x+p$

Et Comme : $A(-1;2)\in(\Delta')$ alors : $2=-\frac{5}{2}(-1)+p$ c'est-à-dire : $2=\frac{5}{2}+p$ et donc : $p=-\frac{1}{2}$

Donc : l'équation réduite de (Δ') est $y=-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$

4) Soit (D)la droite définie par : $(D)\begin{cases}x=2t-3\\y=3t-3\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite (D)

Méthode1 : Soit $t\in\mathbb{R}$; on a : $(D)\ \begin{cases}x=2t-3\\y=3t-3\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x+3=2t\\y+3=3t\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}=t\\\dfrac{y+3}{3}=t\end{cases}$

Donc on obtient : $\frac{x+3}{2}=\frac{y+3}{3}$ (On Ecrit cette Equation sous la forme ax + by + c = 0):

Équivaut à : $3(x+3)=2(y+3)$

Équivaut à : $3x+9=2y+6$

Équivaut à : $(D)\ 3x-2y+3=0$

Méthode2 : On a : $(D)\ \begin{cases}x=2t-3\\y=3t-3\end{cases}$

Donc : la droite (D) passe par $M(-3;-3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2;3)$

Une équation cartésienne de la droite (D)s'écrit sous la forme : $(D)\ ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (D)est $\vec{v}(-b;a)$ or on a : $\vec{v}(2;3)$

Donc : $a=3$ et $b=-2$ alors l'équation devient : (D) $3x-2y+c=0$

Or on sait que $M(-3;-3)$et $M\in(D)$

Donc : $3\times(-3)-2\times(-3)+c=0$ c'est-à-dire : $-9+6+c=0$donc : $c=3$

Par suite : $(D)\ :3x-2y+3=0$

b) Montrons que (D)et (Δ) sont sécantes.

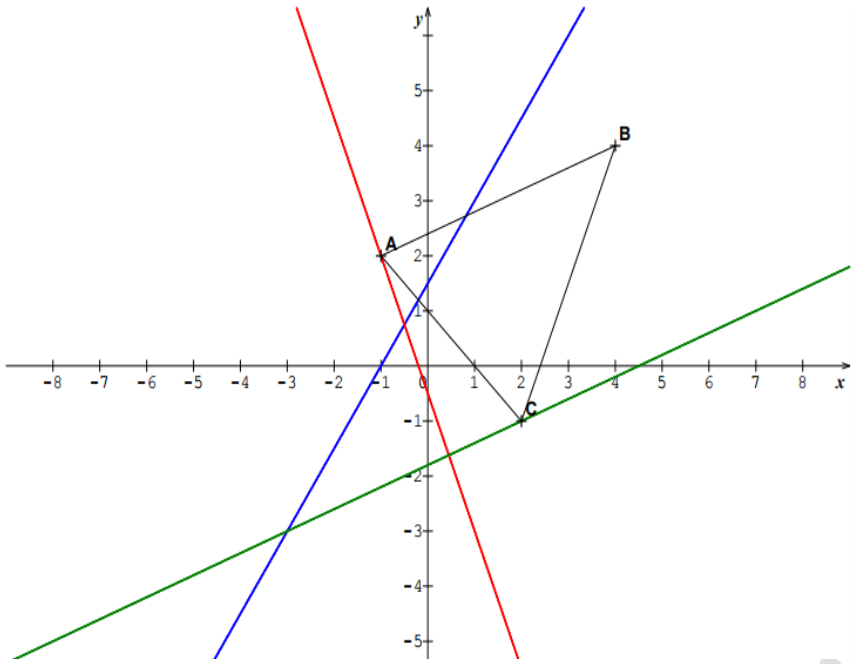
On a : $\vec{v}(2;3)$ est un vecteur directeur (D)

Et on a : (Δ): $x-\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}=0$ donc : $\vec{u}\left(\frac{5}{2};1\right)$ est un vecteur directeur (Δ)

Et on a : $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}\frac{5}{2} & 2\\1 & 3\end{vmatrix}=3\times\frac{5}{2}-2\times1=\frac{15}{2}-2=\frac{11}{2}\neq0$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires par suite les droites (D)et (Δ) sont sécantes

c)



Exercice10 : (***) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Soient : $A(-2;-1)$ et $B\left(\frac{1}{2};-2\right)$.

1)a) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

b) Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses

2) soit (Δ) la droite définie par la représentation paramétrique suivante $(\Delta)\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 4t-4 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Vérifier que : $B\in(\Delta)$.

b) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) .

3) Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} 4x-3y-8\leq 0 \\ 2x+5y+9\geq 0 \\ y\leq 0 \end{cases}$.

Solution :1) a) (AB): $ax+by+c=0$ on a : $\overrightarrow{AB}\left(\frac{5}{2};-1\right)$ un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}(-b;a)$

Donc : $a=-1$ et $b=-\frac{5}{2}$ et par suite l'équation devient (AB) : $-x-\frac{5}{2}y+c=0$.

Or on sait que : A (–2,-1) et $A\in(AB)$ donc : $-(-2)-\frac{5}{2}(-1)+c=0$ c'est-à-dire : $c=-\frac{9}{2}$

Par suite (AB): $-x-\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}=0$

On multiplie cette équation par : -2 on trouve (AB): $2x+5y+9=0$

b) Soit $I(x;y)$ les coordonnées du point I d'intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses

Donc il vérifie le système suivant : $\begin{cases} y=0 \\ 2x+5y+9=0 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} y=0 \\ 2x+5\times0+9=0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} y=0 \\ x=-\dfrac{9}{2} \end{cases}$ par suite : $I\left(-\dfrac{9}{2};0\right)$

2)a) On a $B\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$ et (Δ) $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=4t-4 \end{cases}$ ①

$B\in(\Delta)$ S'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} \dfrac{1}{2}=3t-1 \\ -2=4t-4 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{1}{2}=3t-1 \\ -2=4t-4 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $B\in(\Delta)$ pour : $t=\dfrac{1}{2}$

b) Une équation cartésienne de la droite (Δ) ?

On a : (Δ) $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=4t-4 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x+1=3t \\ y+4=4t \end{cases}$ donc : $\begin{cases} 4(x+1)=12t \\ 3(y+4)=12t \end{cases}$

Donc : $4(x+1)=3(y+4)$

Donc : $4x+4-3y-12=0$

Par suite : une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $(\Delta):4x-3y-8=0$

1) Résolution graphique du système :

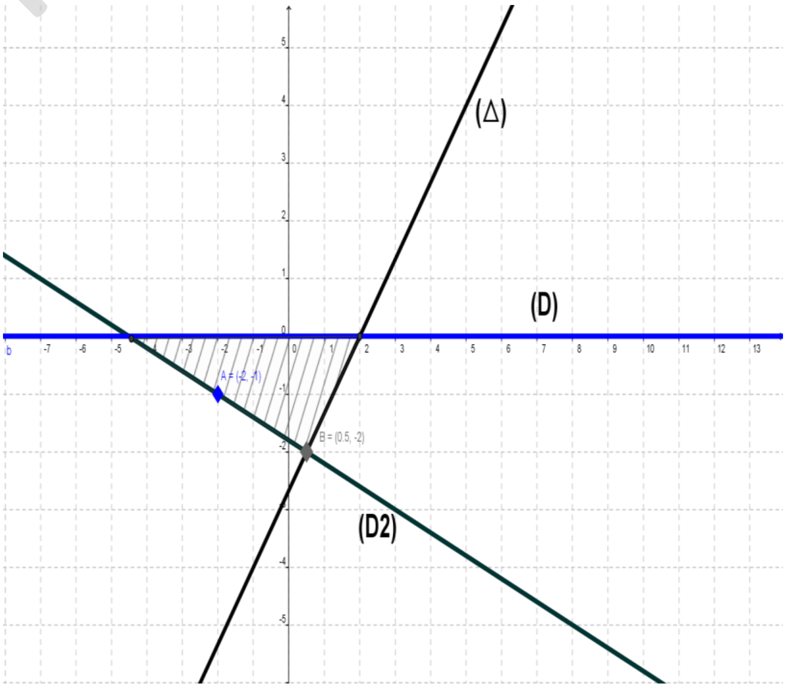
$\begin{cases} 4x-3y-8\le 0 \\ 2x+5y+9\ge 0 \\ y\le 0 \end{cases}$

Dans un premier temps : des inéquations précédentes on en déduit des équations de droites :

On a : $(\Delta):4x-3y-8=0$ est droite qui passe par : $B\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$ et par $C(-1;-4)$

Et (AB): $2x+5y+9=0$ et on pose : $(D): y=0$

On représente ces droites :



a)Pour la droite $(\Delta):4x-3y-8=0$: par exemple pour $O(0;0)$

On a $4\times0-3\times0-8\le 0$

Équivalent à : $-8\le 0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $4x-3y-8\le 0$

b) Pour la droite (AB): $2x+5y+9=0$ par exemple pour $O(0;0)$

On a $2\times0+5\times0+9\geq0$
Équivalent à : $9\geq0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $2x+5y+9\geq0$

b) Pour la droite $(D): y=0$:

Par exemple pour $E(0;1)$ On a $1\leq0$ donc : les coordonnes $E(0;1)$ vérifie l'inéquation. $y\leq0$

Donc les Solutions du système est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du plan hachuré

**Exercice11 : (*****) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On associe à chaque nombre réel m la droite : $(D_m):(3m+1)x-(m-2)y+2m-1=0$

Déterminer la valeur de m dans les cas suivants :

1) (D_m) passe par le point $A(1;2)$

2) (D_m) passe par l'origine de repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) (D_m) est parallèle à l'axe des abscisses

4) (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées

5) $(D_m)\parallel(\Delta_1)$ telle que : $(\Delta_1): 2x-3y+1=0$

6) $(D_m)\parallel(\Delta_2)$ telle que : $(\Delta_2): y=2x+1$

7) le nombre 1 est coefficient directeur de la droite (D_m)

Solution :1) $m\in\mathbb{R}$ $(D_m):(3m+1)x-(m-2)y+2m-1=0$

1) (D_m) passe par le point $A(1;2)$ cela Signifie que : $(3m+1)1-(m-2)2+2m-1=0$

Équivaut à : $3m+1-2m+4+2m-1=0$ équivaut à : $m=-\frac{4}{3}$

2) (D_m) passe par l'origine de repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Cela Signifie que : $(3m+1)0-(m-2)0+2m-1=0$ Équivaut à : $2m-1=0$ équivaut à : $m=\frac{1}{2}$

3) (D_m) est parallèle à l'axe des abscisses cela signifie que son équation s'écrit sous la forme : $y=d$

(C'est-à-dire le coefficient de x est nul et le coefficient de y est non nul)

Par suite : $3m+1=0$ équivaut à : $m=-\frac{1}{3}$

4) (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées cela signifie que son équation s'écrit sous la forme : $x=d$

(C'est-à-dire le coefficient de x est non nul et le coefficient de y est nul)

Par suite : $m-2=0$ équivaut à : $m=2$

5) déterminons la valeur de m telle que : $(D_m)\parallel(\Delta_1)$ avec $(D_m):(3m+1)x-(m-2)y+2m-1=0$ et $(\Delta_1): 2x-3y+1=0$

Le vecteur directeur de (D_m) est : $\vec{u}_m(-b;a)$ c'est-à-dire : $\vec{u}_m(m-2;3m+1)$

Et le vecteur directeur de (Δ_1) est : $\vec{v}(3;2)$.

$(D_m) \parallel (\Delta_1)$ Cela signifie que : $\det(\vec{u}_m ; \vec{v}) = 0$ équivaut à : $\begin{vmatrix} m-2 & 3 \\ 3m+1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Equivaut à : $2(m-2)-3(3m+1)=0$ Equivaut à : $2m-4-9m-3=0$ équivaut à $-7m-7=0$

Donc $(D_m) \parallel (\Delta_1)$ équivaut à $m=-1$

6) déterminons la valeur de m telle que : $(D_m) \parallel (\Delta_2)$avec $(\Delta_2): y = 2x+1$

$(\Delta_2): y = 2x+1$ Équivaut à : $(\Delta_2): 2x - y + 1 = 0$

Le vecteur directeur de (D_m)est : $\vec{u}_m(m-2;3m+1)$ et le vecteur directeur de (Δ_2) est : $\vec{w}(1;2)$

$(D_m) \parallel (\Delta_2)$ Cela Signifie que : $\det(\vec{u}_m ; \vec{w}) = 0$ équivaut à : $\begin{vmatrix} m-2 & 1 \\ 3m+1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Equivaut à : $2(m-2)-1(3m+1)=0$ Equivaut à : $2m-4-3m-1=0$ équivaut à $-m-5=0$

Donc $(D_m) \parallel (\Delta_2)$ équivaut à $m=-5$

7) Pour déterminer le coefficient directeur d'une droite qui n'est pas parallèle aux axes du repère on écrit son équation sous la forme : $(D): y = ax+b \quad (a \neq 0)$ et a est le coefficient directeur de (D)

On a : $(D_m):(3m+1)x-(m-2)y+2m-1=0$

Si $m-2 \neq 0$ c'est-à-dire : $m \neq 2$ alors : $(D_m): y = \frac{3m+1}{m-2}x + \frac{2m-1}{m-2}$

Et puisque le nombre 1 est coefficient directeur de la droite (D_m)donc : $\frac{3m+1}{m-2} = 1$

Cela signifie que : $3m+1 = m-2$ et par suite : $m = -\frac{3}{2}$

Exercice12 : (****) Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé$(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$on considère les points suivants : $K\left(1;\frac{1}{2}\right)$; $M(a;0)$ tel que : $a \in \mathbb{R}$

1)a) Déterminer en fonction de a les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{JM}$

b) Montrer que les points J ; M ; K sont alignés si et seulement si : $a = 2$

2) On suppose que : $a \neq 2$

Déterminer les valeurs de a pour que le triangle JMK soit rectangle en K .

Solution :1) a) Rem : $I(1;0)$et $J(0;1)$

On cherche les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{JM}$

On a : $\overrightarrow{MK}(x_K - x_M ; y_K - y_M)$ et $\overrightarrow{JM}(x_M - x_J ; y_M - y_J)$

Donc : $\overrightarrow{MK}\left(1-a;\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{JM}(a;-1)$

b) Montrons que les points J ; M ; K sont alignés si et seulement si : $a = 2$

Les points J ; M ; K sont alignés si et seulement si : $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{JM}$ sont colinéaires

Si et seulement si : $\det(\overrightarrow{MK};\overrightarrow{JM}) = 0$

Si et seulement si : $\begin{vmatrix} 1-a & a \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0$

Si et seulement si : $-1(1-a)-\frac{1}{2}\times a = 0$

Si et seulement si : $-1+a-\frac{a}{2} = 0$

Si et seulement si : $-1+\frac{a}{2} = 0$

Si et seulement si : $a = 2$

2) On suppose que : $a \neq 2$
On cherche les valeurs de a telles que JMK rectangle en K:
Le triangle JMK est rectangle en K alors d'après le théorème de Pythagore on a

$JM^2 = JK^2 + MK^2$ et comme $JM^2 = a^2+1$ et $MK^2 = (1-a)^2 + \frac{1}{4}$ et $JK^2 = \frac{5}{4}$

Donc : $JM^2 = JK^2 + MK^2$ signifie que : $a^2+1 = (1-a)^2 + \frac{3}{2}$

Signifie que : $a^2+1 = 1-2a+a^2+\frac{3}{2}$ Signifie que : $2a = \frac{3}{2}$ Signifie que : $\boxed{a = \frac{3}{4}}$

Pour que le triangle JMK soit rectangle en K il faut que : $a = \frac{3}{4}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien