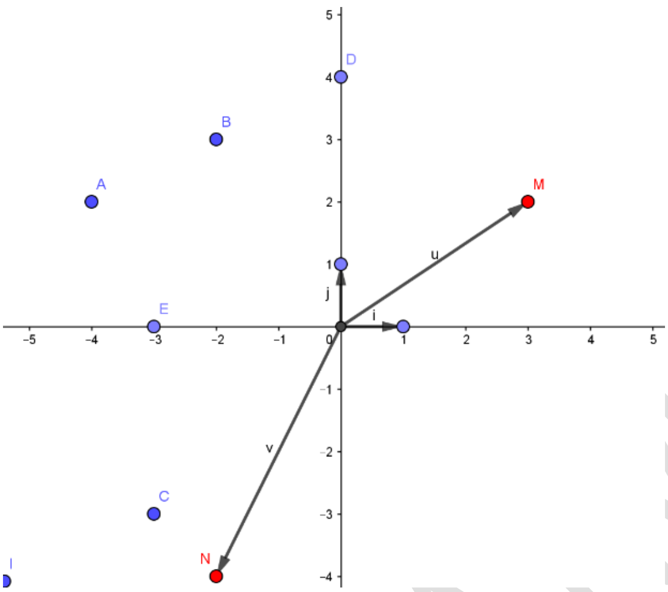
Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°1 : La droite dans le plan

Exercice1 : (*) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Construire les points $A(-4;2)$; $B(-2;3)$; $C(-3;3)$ $E(0;4)$; $F(-3;0)$ et les vecteurs $\vec{u}(3;2)$ $\vec{v}(-2;-4)$

Solution : Soit M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ donc $M(3;2)$ et soit N tel que $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ donc $N(-2;-4)$



Exercice2 : (*) le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient les points A (-2 ; 1) et B (1 ; −1).

1) Calculer les coordonnées du point M tel que A soit le milieu du segment [BM]

2) Calculer les coordonnées du point N, symétrique de A par rapport à` B.

3) Démontrer que [AB] et [M N] ont même milieu.

Solution : 1) A soit le milieu du segment [BM] signifie que : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$

On a : $\overrightarrow{AM}(x_M+2;y_M-1)$ et $\overrightarrow{BA}(3;-2)$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$ Signifie que : $\begin{cases} x_M+2=-3 \\ y_M-1=2 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x_M=-5 \\ y_M=3 \end{cases}$ donc : $M(1;-1)$

2) N symétrique de A par rapport à *B signifie que :* $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{BN}(x_N-1;y_N+1)$ et $\overrightarrow{AB}(-3;2)$

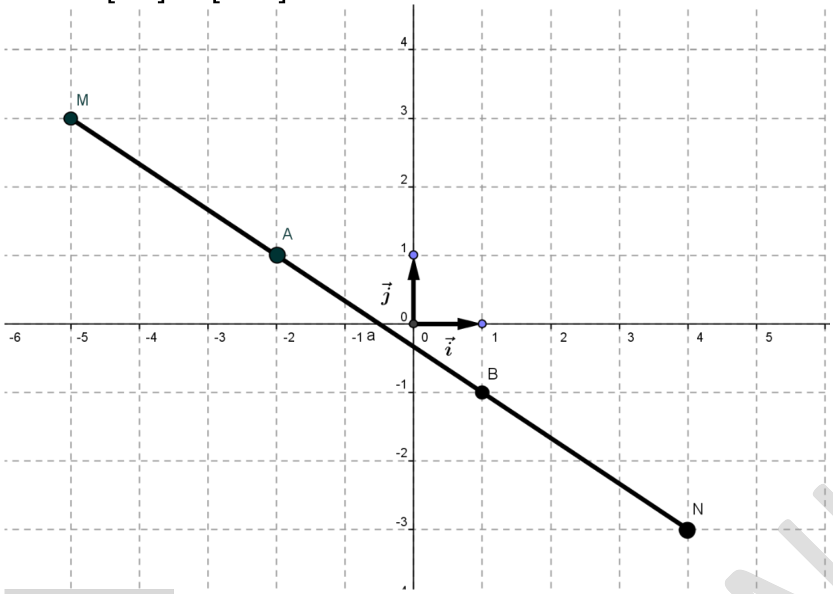
$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}$ Signifie que : $\begin{cases} x_N-1=-3 \\ y_N+1=2 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x_N=-2 \\ y_N=1 \end{cases}$ donc : $N(-2;1)$

3) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$ c'est-à-dire : $I\left(\frac{-1}{2};0\right)$

Le milieu J du segment [M N] a pour coordonnées $J\left(\frac{x_M+x_N}{2};\frac{y_M+y_N}{2}\right)$ c'est-à-dire : $J\left(\frac{-1}{2};0\right)$

Donc : [AB] et [M N] ont même milieu car : $I=J$

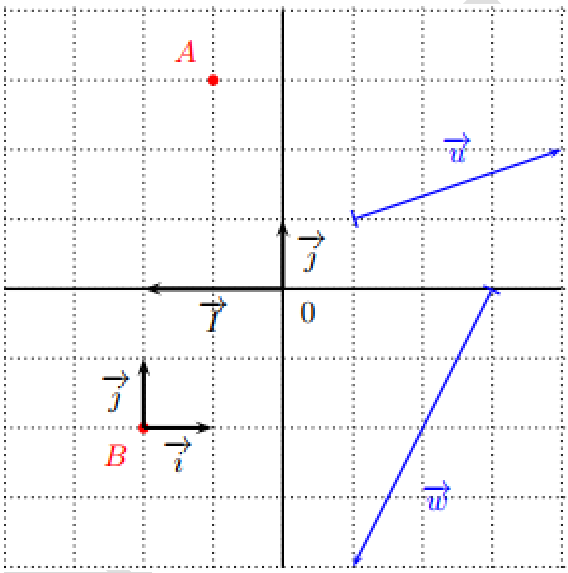


Exercice3 : (**) On considère la figure ci-dessous :

Donner les coordonnées des objets suivants : a) le point A b) le point B c) le vecteur $\vec{u}$ d) le vecteur $\vec{w}$

1)Dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

2) Dans le repère $\left(B;\vec{i};\vec{j}\right)$



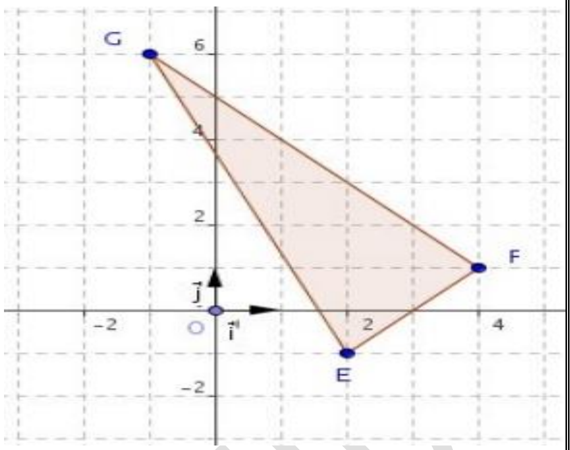
Solution : 1) Dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

a) $A\left(-\frac{1}{2};3\right)$. b) $B(-1;-2)$. c) $\vec{u}\left(-\frac{3}{2};1\right)$. c) $\vec{w}(1;-4)$.

2) Dans le repère $\left(B;\vec{i};\vec{j}\right)$

a) $A(1;5)$. b) $B(0;0)$. c) $\vec{u}(3;1)$. c) $\vec{w}(-2;-4)$.

Exercice4 : (**) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$



1) Placer les points E (2 ; −1), F (4 ; 1) et G (-1 ; 6).

2) Quelle est la nature du triangle EFG ?

Solution : 1) voir figure

2) Calculons les distances suivantes : EF et FG et EG

$$EF = \left\|\overrightarrow{EF}\right\| = \sqrt{\left(x_F - x_E\right)^2 + \left(y_F - y_E\right)^2} = \sqrt{\left(4-2\right)^2 + \left(1+1\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$EG = \left\|\overrightarrow{EG}\right\| = \sqrt{\left(x_G - x_E\right)^2 + \left(y_G - y_E\right)^2} = \sqrt{\left(-1-2\right)^2 + \left(6+1\right)^2} = \sqrt{58}$$

$$FG = \left\|\overrightarrow{FG}\right\| = \sqrt{\left(x_G - x_F\right)^2 + \left(y_G - y_F\right)^2} = \sqrt{\left(-1-4\right)^2 + \left(6-1\right)^2} = \sqrt{50}$$

On a : $EF^2 + FG^2 = 8 + 50 = 58$ et $EG^2 = 58$

Donc : $EF^2 + FG^2 = EG^2$

Par suite d'après le théorème de Pythagore réciproque le triangle EFG est rectangle en F

Exercice5 : (**) (Questions de cours)

On considère le réel k et les vecteurs : $\vec{u}\left(x;y\right)$ et $\vec{v}\left(x';y'\right)$

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si . . .
- Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont . . .
- Les coordonnées de $k\vec{u}$ sont . . .

Solution :

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$
- Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont : $\left(x + x'; y + y'\right)$
- Les coordonnées de $k\vec{u}$ sont : $\left(k \times x; k \times y\right)$

Exercice6 : (*) On considère les vecteurs : $\vec{u}\left(3,-2\right)$ et $\vec{v}\left(-6,4\right)$

Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

Solution : <u>Methode1 :</u> $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - \left(-6\right) \times \left(-2\right) = 12 - 12 = 0$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

<u>Methode2 :</u> $\vec{u}\left(3,-2\right)$ donc : $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

On a : $\vec{v}\left(-6,4\right)$ donc : $\vec{v} = -6\vec{i} + 4\vec{j}$

On remarque que : $\vec{v} = -6\vec{i} + 4\vec{j} = -2\left(3\vec{i} - 2\vec{j}\right) = -2\vec{u}$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exercice7 : (**) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient les points : $A\left(\frac{1}{2};3\right)$; $B\left(-2;-2\right)$; $C\left(1;4\right)$ et le vecteur $\vec{u}\left(1;3\right)$

1) Déterminer le réel x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}\left(x-2,5\right)$ soient colinéaires

2) Montrer que les points A ; B et C sont alignés

Solution : $\vec{u}(1;3)$ et $\vec{v}(x-2,5)$ sont colinéaires équivaut à : $\det(\vec{u};\vec{v})=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} 1 & x-2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=0$ signifie que $5\times1-3(x-2)=0$

Équivaut à : $5-3x+6=0$ c'est-à-dire : $x=\dfrac{11}{3}$

2) $\overrightarrow{AB}\left(-2-\dfrac{1}{2};-2-3\right)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}\left(-\dfrac{5}{2};-5\right)$ et on a aussi : $\overrightarrow{AC}\left(1-\dfrac{1}{2};4-3\right)$ donc : $\overrightarrow{AC}\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

Et on a : $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix} -\dfrac{5}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -5 & 1 \end{vmatrix}=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires par suite les A ; B et C sont alignés.

Exercice8 : (**) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

On donne les points suivants : A(0; 2), B(5; 7), C(−3; 7), D(9; 3)

1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

2) Trouver les équations réduites des droites (AB) et (CD)

3) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection

Solution :

1) Les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si le déterminant de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ n'est pas nul.

On a : $\overrightarrow{AB}(5-0;7-2)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}(5;5)$

Et On a : $\overrightarrow{DC}(-3-9;7-3)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{DC}(-12;4)$

Et on a : $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC})=\begin{vmatrix} 5 & -12 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=5\times4-(-12)\times5=20+60=80\neq0$

Donc : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont non colinéaires par suite les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

2) a) l'équation réduite de la droite (AB) s'écrit sous la forme : $y=mx+p$

$m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{5-0}{7-2}=\dfrac{5}{5}=1$ Donc : (AB) : $y=1x+p$

Et puisque : $A\in(AB)$ alors : $2=1\times0+p$ c'est-à-dire : $p=2$

Donc : l'équation réduite de la droite (AB) est : $y=x+2$

b) l'équation réduite de la droite (CD) s'écrit sous la forme : $y=mx+p$

$m=\dfrac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\dfrac{3-7}{9+3}=\dfrac{-4}{12}=-\dfrac{1}{3}$ Donc : (CD) : $y=-\dfrac{1}{3}x+p$

Et puisque : $C\in(CD)$ alors : $7=-\dfrac{1}{3}\times(-3)+p$ c'est-à-dire : $p=6$

Donc : l'équation réduite de la droite (CD) est : $y=-\dfrac{1}{3}x+6$

3) Calculons les coordonnées du point d'intersection des droites : (AB) et (CD)

Soit $I(x;y)$ le point d'intersection de (AB) et (CD), on a les relations :

$\begin{cases} y_I = x_I + 2 \\ y_I = -\frac{1}{3}x_I + 6 \end{cases}$ On a alors $-\frac{1}{3}x_I + 6 = x_I + 2$ (en multipliant par 3) :

Donc : $-x_I + 18 = 3x_I + 6$

Donc : $12 = 4x_I$

Donc : $x_I = 3$ et comme : $y_I = x_I + 2$

Alors : $x_I = 3$ et $y_I = 5$ d'où : $I(3;5)$

Exercice9 : (*) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Donner une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$ qui passe par $A(3;-5)$ et $\vec{u}(-2;3)$ un vecteur directeur.

Solution : Une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$ est : $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -5+3t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$

Exercice10 : (*) le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient les points A(1 ; 2) et B(-3 ; 0)

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Déterminer si chacun des points suivants appartient ou non à la droite (AB) :

$C(0;2)$; $D(-1;1)$; $E(9;6)$

Solution :1) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), ses composantes sont : $\overrightarrow{AB}$ (-4, -2)

La représentation paramétrique de (AB) est donnée par le système :

① $\begin{cases} x = -4t + 1 \\ y = -2t + 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

2) On a $C(0;2)$ on remplace les coordonnées de C dans le système ①

Donc $\begin{cases} 0 = -4t + 1 \\ 2 = -2t + 2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = 0 \end{cases}$ or $\frac{1}{4} \neq 0$ don $C \notin (AB)$

On a $D(-1;1)$ on remplace les coordonnées de D dans le système ①.

Donc $\begin{cases} -1 = -4t + 1 \\ 1 = -2t + 2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc : $D \in (AB)$.

On a $E(9;6)$ on remplace les coordonnées de E dans le système ①.

Donc $\begin{cases} 9 = -4t + 1 \\ 6 = -2t + 2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$ donc : $E \in (AB)$.

Exercice11 : (**) le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Dans chacun des cas, dire si le point A appartient à la droite (D)

1) Une équation cartésienne de (D) est : $2x + 4y - 5 = 0$ et $A(-1;2)$

2) Une équation cartésienne de (D) est : $3x - 2y + 4 = 0$ et $A(-2;-1)$

Solution :

1) Une équation cartésienne de (D) est : $2x + 4y - 5 = 0$ et $A(-1;2)$

$2\times(-1) + 4\times(2) - 5 = -2 + 8 - 5 = 8 - 7 = 1 \neq 0$

Donc : $A \notin (D)$

2) Une équation cartésienne de (D) est : $3x-2y+4=0$ et $A(-2;-1)$

$3\times(-2)-2\times(-1)+4=-6+2+4=6-6=0$

Donc : $A \in (D)$

Exercice12 : (**) le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Déterminer deux vecteurs directeurs à coordonnées entières pour chacune de ces droites.

1) Une équation cartésienne de (D) est : $3x-5y+1=0$

2) Une équation cartésienne de (D) est : $-7x+9y+4=0$

Solution : On utilise la propriété qui dit qu'un vecteur directeur d'une droite dont une équation Cartésienne est $ax+by+c=0$ est : $\vec{u}(-b;a)$

Mais aussi $k\vec{u}(-kb;ka)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est un vecteur directeur

1) (D) : $3x-5y+1=0$

Un vecteur directeur de(D) est : $\vec{u}(5;3)$ ou $\vec{v}(10;6)$

2) (D) : $-7x+9y+4=0$

Un vecteur directeur de(D) est : $\vec{u}(-9;-7)$ ou $\vec{v}(9;7)$

Exercice13 : (*) Soit la droite (D) passant par A(–1,2) et de vecteur directeur $\vec{v}(3;-1)$

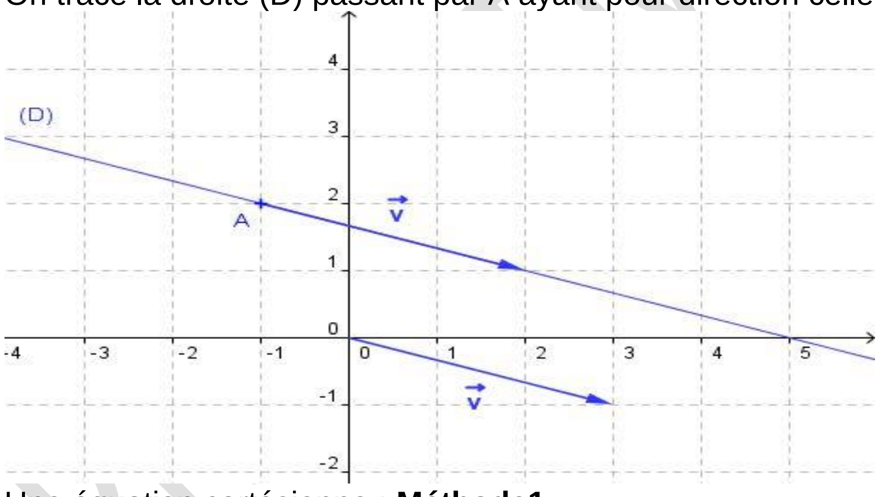
1) Tracer la droite (D) et en écrire une équation cartésienne.

2) Donner les coordonnées d'un point B de cette droite.

3) Le point C (–4,3) appartient-il à cette droite ?

Solution :1) On place le point A, et on applique le vecteur $\vec{v}(3;-1)$ en ce point.

On trace la droite (D) passant par A ayant pour direction celle de $\vec{v}$.



Une équation cartésienne : **<u>Méthode1 :</u>**

Soit M un point de coordonnées : $M(x;y) \in (D)$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+1;y-2)$ et $\vec{v}(3;-1)$ sont colinéaires si, et seulement si $\det(\overrightarrow{AM};\vec{v})=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y-2 & -1 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $-1(x+1)-3(y-2)=0$

Équivaut à : $-1x-1-3y+6=0$

Équivaut à : (D) : $-x-3y+5=0$

Une équation cartésienne de la droite (D) est : $-x-3y+5=0$

<u>Méthode2 :</u>(D) : $ax+by+c=0$ et on a : $\vec{v}(3;-1)$ un vecteur directeur de (D) $(\vec{v}(-b;a))$

Donc : $a=-1$ et $b=-3$

Donc l'équation devient : (D) $-x-3y+c=0$

Or on sait que : A(–1,2) et $A\in(D)$ donc : $-(-1)-3(2)+c=0$ donc : $c=5$

Par suite : (D) : $-x-3y+5=0$

2°) Affectons une valeur à x et déterminons la valeur correspondant à y.
Par exemple, prenons x = 1. Comme B appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation de (D)

À savoir. $-x_B-3y_B+5=0$ Ainsi $-1-3y_B+5=0$ soit. $-3y_B=-4$

On a finalement $y_B=\frac{4}{3}$ et $B\left(1;\frac{4}{3}\right)$ est un point de (D).

3°) Le point C(–4,3) appartient-il à cette droite ?
Dire que $C\in(D)$ revient à dire que les coordonnées de C vérifient l'équation de (D).

Or $-x_C-3y_C+5=-(-4)-3(3)+5=4-9+5=0$

Donc, oui : C est sur (D).

Exercice14 : (*) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par les points : A (2 ; 4) et B (5 ; -1)

Solution : Methode1 :

Soit M un point de coordonnées : M (x ; y)

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-2;y-4)$ et $\overrightarrow{AB}(3;-5)$ sont colinéaires si, et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-4 & -5 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $-5(x-2)-3(y-4)=0$

Équivaut à : $-5x+10-3y+12=0$

Une équation cartésienne de la droite (D) est : $-5x-3y+22=0$

Methode2 : (D) : $ax+by+c=0$

$\overrightarrow{AB}(3,-5)$ Un vecteur directeur de (D) et on a : $\overrightarrow{AB}(-b,a)$ donc : $a=-5$ et $b=-3$

Donc l'équation devient : (D) $-5x-3y+c=0$

Or on sait que : $A\in(AB)$ donc : $-5\times2-3\times4+c=0$ c'est-à-dire : $c=22$

Par suite : (D) $-5x-3y+22=0$.

Exercice15 : Représenter graphiquement les droites suivantes :

1) (D) la droite d'équation cartésienne (D) : $2x+y-3=0$

2) (D') la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$

3) (Δ)) la droite d'équation cartésienne (Δ) : *x = 3*

4) (Δ') la droite d'équation cartésienne (Δ') : *y = 2*

Solution : 1) Pour Représenter une droite il suffit de connaitre deux points :
Affectons une valeur à x et déterminons la valeur correspondant à y.
Par exemple prenons x = 1 : $2\times1+y-3=0$ signifie que : $y=1$

Ainsi $A(1;1)$ est un point de (D).

Prenons : x = 0 : $2\times0+y-3=0$ signifie que : $y=3$ Ainsi $B(0;3)\in(D)$

Donc : $(D)=(AB)$(voir la figure)

(D)	x	0	1
	y	3	1

2) (D') : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Par exemple prenons $t=0$ donc : $\begin{cases} x &= 1+2\times 0 = 1 \\ y = 2+3\times 0 = 2 \end{cases}$ par suite : $C(1;2)\in(D')$

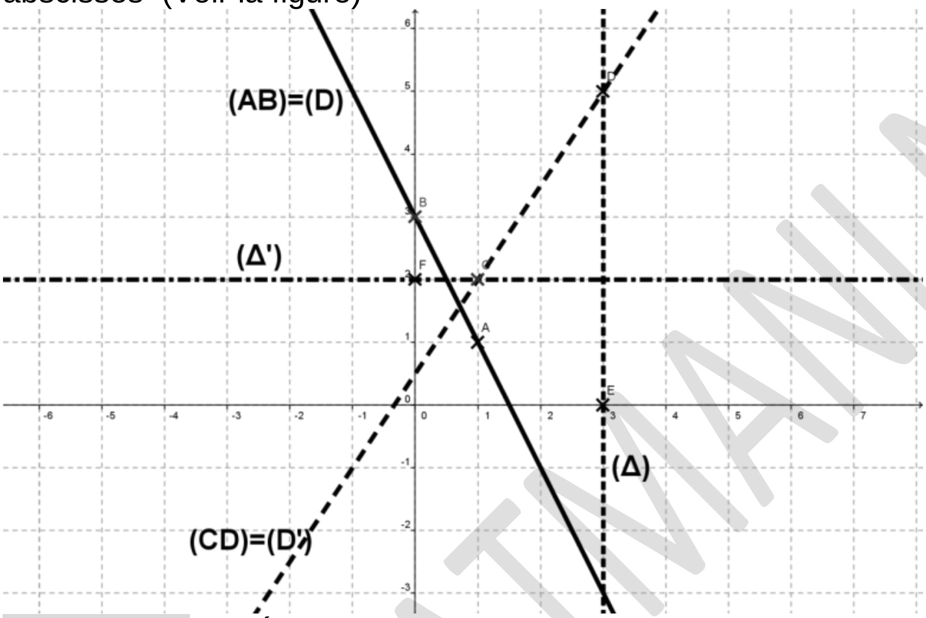
Prenons $t=1$ donc : $\begin{cases} x &= 1+2\times 1 = 3 \\ y = 2+3\times 1 = 5 \end{cases}$ par suite : $D(3;5)\in(D')$

Donc : $(D)=(AB)$(voir la figure)

(D')	x	1	3
	y	2	5

3) la droite d'équation cartésienne (Δ) : *x = 3* passe par $E(3;0)$ et parallèle à l'axe des ordonnées (Voir la figure)

4) la droite d'équation cartésienne (Δ') : *y = 2* passe par $F(0;2)$ et parallèle à l'axe des abscisses (Voir la figure)



Exercice16 : (**) Étudier la position relative des deux droites D) et (D') dans chaque cas suivant :

1) (D) **:** $2x-4y+3=0$ ***et*** (D') **:** $-x+2y+5=0$

2) (D) : $2x+5y-2=0$ ***et*** (D') **:** $x+3y-2=0$

3) (D) : $10x+35y-15=0$ ***et*** (D') **:** $14x+49y-21=0$

Solution :1) On a : (D) *2x – 4 y + 3 = 0* donc $\vec{u}(4;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **:** -x +2 y + 5 = 0 donc $\vec{v}(-2;-1)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4+4=0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (D) et (D') sont parallèles

Soit $A(x;y)\in(D)$ on prend $x=0$

Alors **:** 0 – *4 y + 3 = 0* donc $y=\frac{3}{4}$ c'est-à-dire : $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\in(D)$

On vérifie si : $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\in(D')$?

On a : $-0+2\times\frac{3}{4}+5=\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}\neq 0$ donc $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\notin(D')$ D'où : $(D)\parallel(D')$ strictement parallèles

2) on a : (D) 2x + 5 y -2 = 0 donc $\vec{u}(-5;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **:** x +3 y -2 = 0 donc $\vec{v}(-3;1)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5+6 = 1 \neq 0$

Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc (D) et (D') sont sécantes.
On détermine le point d'intersection de (D) et (D').

Soit $E(x;y)$ ce point d'intersection de (D) et (D') Alors **:** $(x;y)$ vérifie le système : $\begin{cases} 2x+5y-2=0 \\ x+3y-2=0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 2x+5y=2 \\ x+3y=2 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 2x+5y=2 \\ x=2-3y \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 2(2-3y)+5y=2 \\ x=2-3y \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 4-6y+5y=2 \\ x=2-3y \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 4-y=2 \\ x=2-3y \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} y=2 \\ x=2-3y \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} y=2 \\ x=-4 \end{cases}$ alors : $E(-4;2)$.

3) (D) : $10x+35y-15=0$ ***et*** (D') **:** $14x+49y-21=0$

On a : (D) **:** $10x+35y-15=0$ donc $\vec{u}(-35;10)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **:** $14x+49y-21=0$ donc $\vec{v}(-49;14)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -35 & -49 \\ 10 & 14 \end{vmatrix} = -490+490 = 0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (D) et (D') sont parallèles.

Soit $A(x;y) \in (D)$ on prend $y=0$

Alors **:** $10\times x+35\times 0-15=0$ signifie que : $10\times x-15=0$ donc $y=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$ c'est-à-dire :

$A\left(\frac{3}{2};0\right) \in (D)$

On vérifie si : $A\left(\frac{3}{2};0\right) \in (D')$?

On a : $14\times\frac{3}{2}+49\times 0-21=21-21=0$ donc $A\left(\frac{3}{2};0\right) \in (D')$ D'où : (D) et (D') sont confondues

Exercice17 : (***) Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points suivants : $A(-2;1)$; $B(3;-2)$; $C(4;-1)$ et $E(-3;0)$

1) Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ)

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

c) Montrer que : $B \in (\Delta)$

d) Déterminer les coordonnées du point F d'intersection de la droite (Δ) et l'axe des ordonnées.

e) Déterminer les coordonnées du point G d'intersection de la droite (Δ) et l'axe des abscisses.

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante: $(D)\begin{cases} x=6t-3 \\ y=2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D)

b) Montrer que les droites (D)et (Δ) sont sécantes, puis déterminer leurs points d'intersection.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') parallèles a (D) passant par $C(4;-1)$

Solution :1) a) Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

a) On cherche une équation cartésienne de la droite (Δ)

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(\Delta)$

$M(x;y)\in(\Delta)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+2;y-1)$et $\vec{u}(5;-3)$sont colinéaires

Équivaut à : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-1 & -3 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $-3(x+2)-5(y-1)=0$

Équivaut à : $-3x-6-5y+5=0$ Équivaut à : $-3x-5y-1=0$

Équivaut à : $-(3x+5y+1)=0$

Équivaut à : $3x+5y+1=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite (Δ)est : $(\Delta):3x+5y+1=0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite (Δ)s'écrit sous la forme : (Δ) $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (Δ)est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(5;-3)$

Donc : $a=-3$et $b=-5$ alors l'équation devient : (D) $-3x-5y+c=0$

Or on sait que $A(-2;1)$et $A\in(\Delta)$

Donc : $-3\times(-2)-5\times1+c=0$ c'est-à-dire : $6-5+c=0$donc : $c=-1$

Par suite : $(\Delta):-3x-5y-1=0$ ou $(\Delta):3x+5y+1=0$

b) On cherche une représentation paramétrique de la droite (Δ)

On a : (Δ) la droite passe par $A(-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

Donc : une représentation paramétrique de la droite (Δ)est : (Δ) $\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

c) Montrons que : $B\in(\Delta)$

Méthode1 : On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$et $B(3;-2)$ alors : $3x_B+5y_B+1=3\times3+5\times(-2)+1$

$=9-10+1$

$=0$ Par suite : $B\in(\Delta)$

Méthode2 : On a : : (Δ) $\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ et $B(3;-2)$ alors : $\begin{cases} 3=5t-2 \\ -2=-3t+1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 5=5t \\ -3=-3t \end{cases}$ signifie que : $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \end{cases}$ (On trouve la même valeur pour $t\in\mathbb{R}$)

Par suite : $B\in(\Delta)$

Remarque : si on trouve des valeurs différentes pour t alors le point n'appartient pas a la droite

d) On cherche les coordonnées du point F d'intersection de la droite (Δ)et l'axe (OY).

Méthode1 : On a : (Δ) $\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} 5t-2=0 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ y=-3t+1 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ y=-3\times\dfrac{2}{5}+1=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$ par suite : $F\left(0;-\dfrac{1}{5}\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY)

<u>Méthode2 :</u> On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 3x+5y+1=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 3\times0+5y+1=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 5y=-1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$

Par suite : $F\left(0;-\dfrac{1}{5}\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY)

e) On cherche les coordonnées du point G d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX).

<u>Méthode1 :</u> On a : $(\Delta)\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=5t-2 \\ y=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=5t-2 \\ -3t+1=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=5t-2 \\ t=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=5\times\dfrac{1}{3}-2=-\dfrac{1}{3} \\ y=0 \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX)

<u>Méthode2 :</u> On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 3x+5y+1=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 3x+5\times0+1=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 3x=-1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX)

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante : $(D)\begin{cases}x=6t-3\\y=2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite (D)

Méthode1 : Soit $t\in\mathbb{R}$; on a : $(D)\begin{cases}x=6t-3\\y=2t\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x+3=6t\\y=2t\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}\frac{x+3}{6}=t\\\frac{y}{2}=t\end{cases}$

Donc on obtient : $\frac{x+3}{6}=\frac{y}{2}$ (On Ecrit cette Equation sous la forme ax + by + c = 0):

Équivaut à : $\frac{x+3}{6}=\frac{3y}{6}$ Équivaut à : $x+3=3y$ Équivaut à : $x-3y+3=0$

Équivaut à : (D) : $x-3y+3=0$

Méthode2 : on a : $(D)\begin{cases}x=6t-3\\y=2t\end{cases}$

Donc : la droite (D) passe par $E(-3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(6;2)$

Une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme : (Δ) $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-b;a)$ or on a : $\vec{v}(6;2)$

Donc : $a=2$ et $b=-6$ alors l'équation devient : (D) $2x-6y+c=0$

Or on sait que $E(-3;0)$ et $E\in(D)$

Donc : $2\times(-3)-6\times0+c=0$ c'est-à-dire : $-6+0+c=0$ donc : $c=6$ Par suite : (D) $2x-6y+6=0$

C'est-à-dire après simplification : (D) : $x-3y+3=0$

2)b) Montrons que les droites (D) et (Δ) sont sécantes, puis déterminons leurs points d'intersection.

Méthode1 : On a : (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

On a : $(D)\begin{cases}x=6t-3\\y=2t\end{cases}$: Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(6;2)$

Ou On a : (D) : $x-3y+3=0$: Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v'}(3;1)$

$$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}5&6\\-3&2\end{vmatrix}=5\times2-(-3)\times6=10+18=28\neq0$$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires alors les droites (D) et (Δ) sont sécantes

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases}(D):x-3y+3=0\\(\Delta):3x+5y+1=0\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x-3y=-3\\3x+5y=-1\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x-3y=-3 & (\times-3)\\3x+5y=-1 & (\times1)\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}-3x+9y=9\\3x+5y=-1\end{cases}$

On fait la somme des Equations (1) et (2) on obtient : $14y=8$ Équivaut à : $y=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$

D'où : $x-3y=-3$ Équivaut à : $x=3y-3$ Équivaut à : $x=3\times\frac{4}{7}-3=\frac{12}{7}-3=-\frac{9}{7}$

Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{9}{7};\frac{4}{7}\right)\right\}$

Méthode2 : On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$ et on a : $(D)\begin{cases}x=6t-3\\y=2t\end{cases}$

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases}x=6t-3\\y=2t\\(\Delta):3x+5y+1=0\end{cases}$ D'où : $3(6t-3)+5(2t)+1=0$

Équivaut à : $18t-9+10t+1=0$ Équivaut à : $28t-8=0$ Équivaut à : $28t=8$

Équivaut à : $t=\frac{8}{28}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$

Donc : $\begin{cases}x=6\times\frac{2}{7}-3=\frac{12}{7}-3=-\frac{9}{7}\\y=2\times\frac{12}{7}=\frac{4}{7}\end{cases}$ Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{9}{7};\frac{4}{7}\right)\right\}$

3) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D') parallèles a (D) passant par $C(4;-1)$

On a : (D') passe par le point $C(4;-1)$ et parallèle a (D) et $\vec{v}(6;2)$ un vecteur directeur de (D)

Donc : $\vec{v}(6;2)$ est aussi un vecteur directeur de (D')

Donc : (D') passe par le point $C(4;-1)$ et $\vec{v}(6;2)$ un vecteur directeur de (D')

Donc : une représentation paramétrique de la droite (D') est : $(D')\begin{cases}x=6t+4\\y=2t-1\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Exercice18 : (****) Dans **le** plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points suivants : $A(-2;1)$; $B(2;4)$

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;2)$

2) On associe à chaque nombre réel m la droite $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$

Et soit (D') la droite définie par l'équation cartésienne suivante : $(D'):-\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}=0$

a) Donner la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle a (D')

b) Donner la valeur de m pour que B soit un point de (D_m)

c) Montrer que tous les droites (D_m) passent par un point fixe E, dont vous déterminez les coordonnées.

Solution :1) On cherche une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;2)$

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(D)$

$M(x;y)\in(D)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+2;y-1)$ et $\vec{u}(5;2)$ sont colinéaires

Équivaut à : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $2(x+2)-5(y-1)=0$

Équivaut à : $2x+4-5y+5=0$ Équivaut à : $2x-5y+9=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite (D) est : $(D):2x-5y+9=0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme : $(D)\ ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(5;2)$

Donc : $a=2$ et $b=-5$ alors l'équation devient : (D) $2x-5y+c=0$

Or on sait que $A(-2;1)$ et $A\in(\Delta)$

Donc : $2\times(-2)-5\times1+c=0$ c'est-à-dire : $-4-5+c=0$ donc : $c=9$

Par suite : $(\Delta):2x-5y+9=0$

2) On a : $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$ et $(D'):-\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}=0$

a) Déterminons la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle à (D')

Soit : $m\in\mathbb{R}$ on a : $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$ et $(D'):-\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}=0$

Donc : $\vec{u}_m(2m;m-1)$ est vecteur directeur de (D_m) et $\vec{v}\left(-1;-\frac{2}{3}\right)$ est vecteur directeur de (D')

(D_m) est parallèle à (D') signifie $\vec{u}_m(2m;m-1)$ et $\vec{v}\left(-1;-\frac{2}{3}\right)$ sont colinéaires

Signifie $\det(\vec{u}_m;\vec{v})=0$ Equivaut à : $\begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m-1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}=0$

Equivaut à : $-\frac{2}{3}\times2m-(-1)(m-1)=0$ Equivaut à : $-\frac{4}{3}m+m-1=0$ Equivaut à : $-\frac{m}{3}-1=0$

Equivaut à : $\frac{-m-3}{3}=0$ c'est-à-dire : $\boxed{m=-3}$

Pour que (D_m) est parallèle à (D')) il faut que $m=-3$

b) On cherche la valeur de m pour que : $B\in(D_m)$

Soit : $m\in\mathbb{R}$ on a : $B(2;4)\in(D_m)$ Equivaut à : $(m-1)\times2-2m\times4+3=0$

Equivaut à : $2m-2-8m+3=0$

Equivaut à : $-6m+1=0$ c'est-à-dire : $\boxed{m=\frac{1}{6}}$

Pour que $B\in(D_m)$ il faut que $m=\frac{1}{6}$

c) Montrons que tous les droites (D_m) passent par un point fixe E

Soit : $m\in\mathbb{R}$; $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$

$E(x_E;y_E)\in(D_m)$ signifie : $(m-1)x_E-2my_E+3=0$

Equivaut à : $mx_E-x_E-2my_E+3=0$ pour tout $m\in\mathbb{R}$

Equivaut à : $m(x_E-2y_E)+3-x_E=0$ pour tout $m\in\mathbb{R}$

Cela Signifie que : $x_E-2y_E=0$ et $3-x_E=0$

Cela Signifie que : $3-2y_E=0$ et $x_E=3$

Cela Signifie que : $y_E=\frac{3}{2}$ et $x_E=3$

Donc toutes les droites (D_m) passent par un point fixe : $E\left(3\,;\frac{3}{2}\right)$

**Exercice19: (******) Soient ABCD un parallélogramme et M le point de la droite (AD) et N le point tel que : $\overrightarrow{BN}=-3\overrightarrow{AM}$

Et on considère le Repère : $(A;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\vec{i}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{AB}$ et soit m l'abscisse du point M Dans le ce Repère.

1)Déterminer les coordonnées du point N .

2)Donner une équation cartésienne de la droite (MN).

3)Montrer que quel que soit la position du point M sur la droite (AD) alors la droite (MN) passe par un point fixe F qui ne dépend pas du point et dont on déterminera les coordonnées.

Solution : ABCD un parallélogramme et $M\in(AD)$ et $\overrightarrow{BN}=-3\overrightarrow{AM}$

1) On considère le Repère $(A;\vec{i};\vec{j})$: $\vec{i}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{AB}$

m L'abscisse du point M dans le Repère $(A;\vec{i};\vec{j})$: Equivaut à : $\overrightarrow{AM}=m\vec{i}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AD}$ ($M\in(AD)$ donc : $y_M=0$) Donc : $N(m;0)$

Détermination des coordonnées du point N ?

On a : $\overrightarrow{BN}=-3\overrightarrow{AM}$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-3\overrightarrow{AM}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AN}=-3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AN}=-3m\vec{i}+\vec{j}$ par suite : $N(-3m;1)$

2) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (MN)

On a : $N(-3m;1)$ et $N(m;0)$

Soit $L(x;y)\in(MN)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{ML};\overrightarrow{MN}\right)=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x-m & -4m \\ y & 1 \end{vmatrix}=0$ Equivaut à : $x-m+4my=0$ par suite : $(MN): x+4my-m=0$

3) $F\in(MN)$ Quel que soit m on a : $x_F+4my_F-m=0$

Equivaut à : $x_F+m(4y_F-1)=0$

Equivaut à : $x_F=0$ et $4y_F-1=0$ Equivaut à : $x_F=0$ et $y_F=\frac{1}{4}$ par suite : $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien