Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°3 : la projection

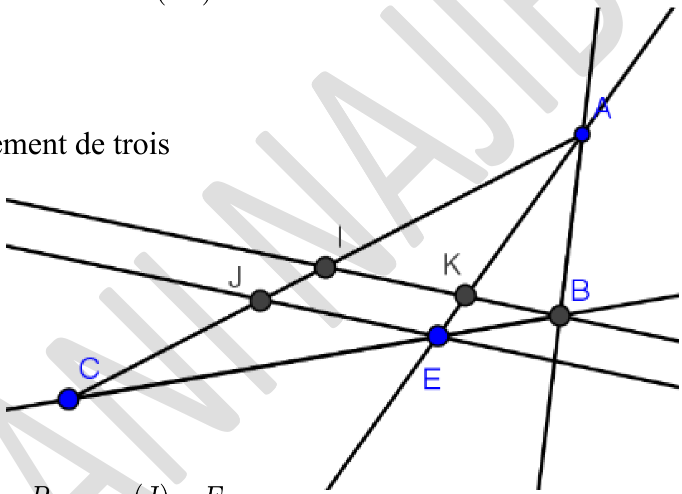
Exercice1 : (***) Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$ et E un point tel que : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$

La droite qui passe par E et parallèle a (IB) coupe (AC) **en** J

1) Montrer que $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$ et en déduire que : $\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$

2) Si $(IB) \cap (AE) = \{K\}$ Montrer que : $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$

Corrigé :1) Soit $P_{((AC);(IB))}$ la projection sur (AC) parallèlement à (IB)



On a : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$ et $P_{((AC);(IB))}(B) = I$

Et : $P_{((AC);(IB))}(E) = J$ et $P_{((AC);(IB))}(C) = C$

Et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$

La déduction : On a $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ}$ et I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et par suite :

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} = 5\overrightarrow{IJ}$

2) Soit $P_{((AE);(IB))}$ la projection sur (AE)

Parallèlement à (IB) **:**

On a : $\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$ **et** $P_{((AE);(IB))}(A) = A$ et $P_{((AE);(IB))}(I) = K$ **et** $P_{((AE);(IB))}(J) = E$

Et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$

Exercice2 : (***) Soit ABCD un Parallélogramme de centre O

1) Soit A' la projection sur (DC) parallèlement à (DB)

a) Faire une figure

b) Montrer que $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$

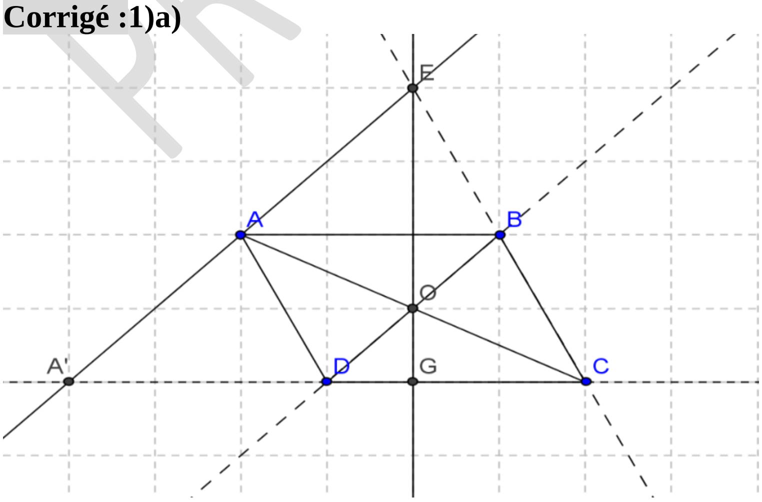
2) Soit E un point de la droite (BC) tel que : A' est sa projection sur (DC) parallèlement à (DB)

Montrer que A est le milieu de $[A'E]$

3) Soit R le point d'intersection des droites (OE) et (DC)

Montrer que : $\overrightarrow{EO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ER}$

Corrigé :1)a)



1)b) A' la projection sur (DC) parallèlement à (DB) équivaut à : $A' \in (DC)$ et que $(AA') \parallel (DB)$

Et on sait que : $(AB) \parallel (DA') = (DC)$

Donc le quadrilatère $(ABDA')$ est un parallélogramme

Et par suite : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'D}$

Or $(ABCD)$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Et par suite : $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$

2) A' la projection de E sur (DC) parallèlement à (DB) équivaut à : $A' \in (DC)$ et que $(EA') \parallel (DB)$

Et d'après le théorème de Thalès dans le triangle (ECA') on a : $\frac{CD}{CA'} = \frac{CB}{CE} = \frac{BD}{A'E}$

or on sait que : $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à :D le milieu du segment : $[A'C]$

Et par suite : $\frac{CD}{CA'} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{BD}{A'E} = \frac{1}{2}$ équivaut à dire que : $A'E = 2BD$

Et puisque on sait que : $(ABDA')$ est un parallélogramme donc : $AA' = BD$ et par suite : $A'E = 2AA'$

Et on a les points : A et A' et E sont alignés

Par conséquent : A est le milieu de $[A'E]$

3) R le point d'intersection des droites (OE) et (DC)

Dans le triangle : REA' on a : $(DO) \parallel (A'A)$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{RO}{RE} = \frac{RD}{RA'} = \frac{OD}{EA'}$ (2)

Or on sait que : $OD = \frac{1}{2}BD$ et que : $A'E = 2BD$

Donc : $OD = \frac{1}{4}EA'$ et par suite : $\frac{RO}{RE} = \frac{1}{4}$ équivaut à dire que : $RE = 4BO$

Équivaut à : $\overrightarrow{RE} = 4\overrightarrow{RO}$

Donc : $\overrightarrow{RE} = 4\left(\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{EO}\right)$

Donc : $\overrightarrow{RE} = 4\overrightarrow{RE} + 4\overrightarrow{EO}$ équivaut à : $\overrightarrow{RE} - 4\overrightarrow{RE} = 4\overrightarrow{EO}$

Équivaut à : $-3\overrightarrow{RE} = 4\overrightarrow{EO}$

Équivaut à : $-\frac{3}{4}\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{EO}$ et par suite : $\overrightarrow{EO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ER}$

Exercice3 : (***) Soient ABC un triangle et M et N et D des points tels que :

$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DA}$ et $4\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

1) Faire une figure.

2) Montrer que : $\overrightarrow{MB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et que : $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

3) Montrer que : les points A et C et N sont alignés.

4) On considère le point E du segment $[AB]$ tel que : $E \neq A$ et $E \neq B$.

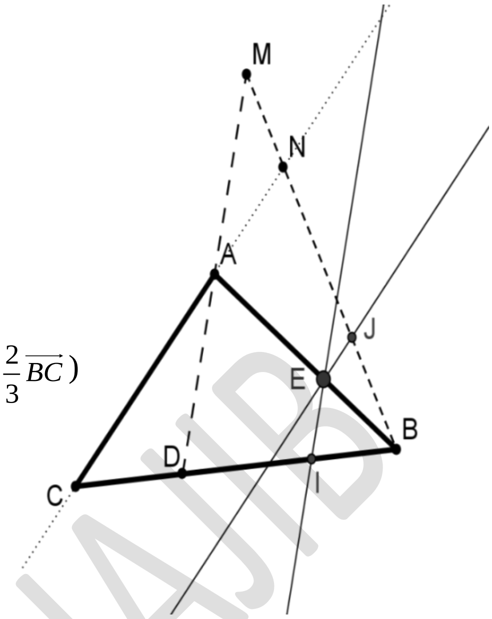
Et soit le point I le projeté de E sur la droite (BD) parallèlement à (AD).

Et soit le point J le projeté de E sur la droite (BN) parallèlement à (AN).

Montrer que : $(DN) \parallel (IJ)$

Corrigé : 1) La figure.

$4\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BM}$



2) a) Montrons que : $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}$ donc : $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{MB}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles)

Donc : $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}+2\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (Car : $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$)

Donc : $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Par suite : $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On a : $\overrightarrow{NB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MB}$ donc : $\overrightarrow{NB}=\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ et par suite : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Montrons que les points A et C et N sont alignés ?

On a : $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}$ donc : $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{NA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ par suite : les points A et C et N sont alignés

4) Montrer que : $(DN)\parallel(IJ)$

- Dans le triangle ABN on a : $(EJ)\parallel(AN)$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{BE}{BA}=\frac{BJ}{BN}$ (1)
- Dans le triangle ABD on a : $(EI)\parallel(AD)$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{BE}{BA}=\frac{BI}{BD}$ (2)

De : (1) et (2) en déduit que : $\frac{BI}{BD}=\frac{BJ}{BN}$ et puisque les points B et J et N et les points B et I et D sont dans le même ordre alors d'après le théorème de Thalès réciproque on a donc : $(DN)\parallel(IJ)$

Exercice4 : (***) Soient ABCD un Parallélogramme de centre O

Soit E un point tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Soit E' la projection de E sur (BC) parallèlement à (AB)

Et soit O' la projection de O sur (BC) parallèlement à (AB)

1) a) Faire une figure

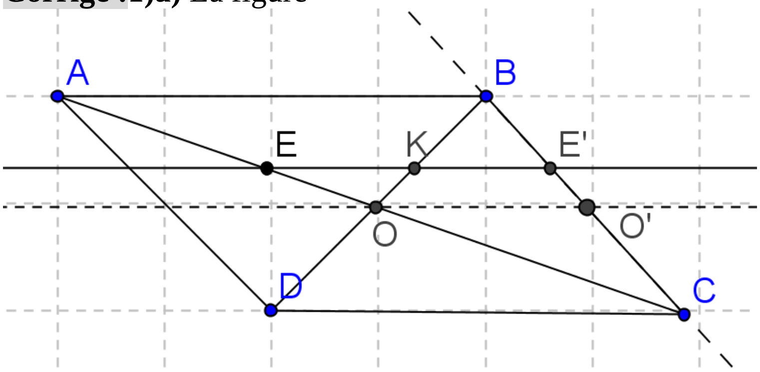
b) Montrer que : O' est le milieu de $[BC]$

2) Montrer que : $\overrightarrow{BE'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et que : $\overrightarrow{EE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{O'E'}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

4) La droite (EE') coupe (BD) en K : Montrer que : $\overrightarrow{BD}=-6\overrightarrow{OK}$

Corrigé :1)a) La figure



b**)** Montrons que : O' est le milieu de $\left[BC\right]$

On considère la projection sur (BC) parallèlement à (AB)

On a : la projection du point A est B

La projection du point O est O'

La projection du point C est C

Et puisque O est le milieu de $\left[AC\right]$ alors : O' est le milieu de $\left[BC\right]$ car la projection conserve le milieu

2)a) Montrons que : $\overrightarrow{BE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

On considère la projection sur (BC) parallèlement à (AB)

On a : la projection du point A est B

La projection du point E est E'

La projection du point C est C

Et puisque on a : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ alors : $\overrightarrow{BE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ car la projection conserve le coefficient de colinéarité

b) On a : $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE'}$

Donc : $\overrightarrow{EE'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ **P**ar suite : $\overrightarrow{EE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

3) Montrons que : $\overrightarrow{O'E'} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

On a : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ donc : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$

Donc : $\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ par suite : $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

On considère la projection sur (BC) parallèlement à (AB)

On a : la projection du point A est B

La projection du point O est O'

La projection du point E est E'

Donc : $\overrightarrow{O'E'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{O'B}$ car la projection conserve le coefficient de colinéarité

Et puisque : O' est le milieu de $\left[BC\right]$ alors : $\overrightarrow{O'B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ Par suite : $\overrightarrow{O'E'} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

4) Montrons que : $\overrightarrow{BD} = -6\overrightarrow{OK}$

On considère la projection sur (BO) parallèlement à (AB)

On a : la projection du point O' est O

La projection du point E' est K

La projection du point B est B

Et puisque : $\overrightarrow{O'E'} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ et la projection conserve le coefficient de colinéarité

Alors : $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DB}$ et par suite : $\overrightarrow{DB} = 6\overrightarrow{OK}$

Et par conséquent : $\overrightarrow{BD} = -6\overrightarrow{OK}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien