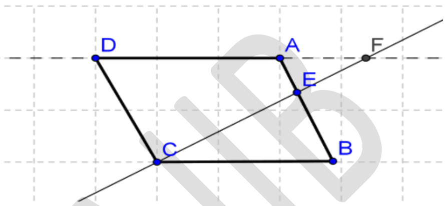
Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°2 : la projection

Exercice1 : (***) ABCD Un parallélogramme et (Δ) une droite qui passe par le point C et coupe le segment $[AB]$ en E et la droite (AD) en F

1) Comparer : $\frac{AD}{AF}$ et $\frac{BE}{AE}$ 2) En déduire que : $\frac{AB}{AE}-\frac{AD}{AF}=1$



Correction :1) Dans le triangle :FDC on a : F et A et D des points alignés et les points F et E et C alignés dans cette ordre et $(AE)\parallel(DC)$

Donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{FD}{FA}=\frac{FC}{FE}=\frac{DC}{AE}$

On a aussi: A et E et B des points alignés et les points F et E et C alignés dans cette ordre et $(AF)\parallel(BC)$

donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{EB}{EA}=\frac{EC}{EF}=\frac{BC}{AF}$ Donc: $\frac{EB}{EA}=\frac{EC}{EF}(1)$

Et on a : $\frac{FD}{FA}=\frac{FC}{FE}$ donc : $\frac{FA+AD}{FA}=\frac{EF+EC}{FE}$

Donc : $1+\frac{AD}{FA}=1+\frac{EC}{FE}$ et par suite : $\frac{AD}{FA}=\frac{EC}{FE}(2)$

De (1) et (2) en déduit que : $\frac{EB}{EA}=\frac{AD}{AF}$

2) On a : $\frac{AB}{AE}-\frac{AD}{AF}=\frac{AB}{AE}-\frac{EB}{AE}=\frac{AB-EB}{AE}=\frac{AE}{AE}=1$

Donc : $\frac{AB}{AE}-\frac{AD}{AF}=1$

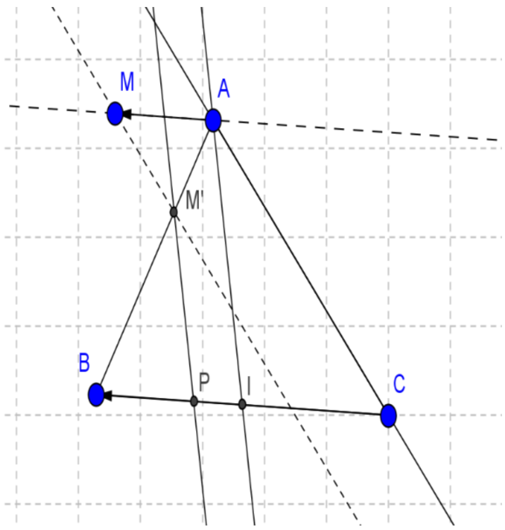
Exercice2 : (***) Soient ABC un triangle et M Un point définie par : $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{AM}$

2) Soit le point M' le projeté de M sur la droite (AB) parallèlement à (AC)

1) Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et en déduire que $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

2) Soit I le milieu du segment $[BC]$ et P le point tel que : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

a) Montrer que $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ b) En déduire que $(AI)\parallel(PM')$.



Correction :1) La figure : $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{AM}$ Équivaut à : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

Soit : P la projection sur (AB) parallèlement à (AC).

On a $A\in(AB)$ donc A est invariante par la projection P donc : $P(A)=A$

On a $B\in(AB)$ donc B est invariante par la projection P donc : $P(B)=B$.

On a aussi : $P(C)=A$ et $P(M)=M'$

Et puisque $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs Alors : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

2) a) On a I le milieu du segment $[BC]$ Équivaut à : $2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{CB}$ et on a : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

Donc : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 2\overrightarrow{IB}$ Donc : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

b) On a : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ donc : $IP=\frac{1}{3}IB$ équivaut à : $\frac{IP}{IB}=\frac{1}{3}$ (1)

De même on a : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc : $AM'=\frac{1}{3}AB$ Équivaut à : $\frac{AM'}{AB}=\frac{1}{3}$ (2)

De : ①et② on a $\frac{IP}{IB}=\frac{AM'}{AB}$ et d'après le théorème de Thalès réciproque on a Donc : $(AI)\parallel(PM')$

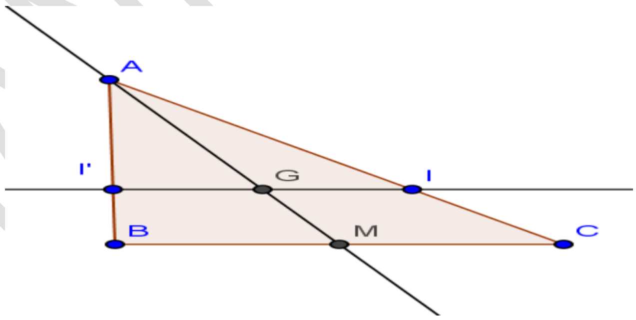
Exercice3 : (***) Soient ABC un triangle et I et I' deux points tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) Soit M est le milieu de [BC] ; la droite (AM) coupe la droite (II') en G

Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Correction :1) On a $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AI}\right\|=\left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right\|$



C'est-à-dire : $AI=\frac{2}{3}AC$ donc $\frac{AI}{AC}=\frac{2}{3}$ ①

Et on a : $\overrightarrow{AI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\left\|\overrightarrow{AI'}\right\|=\left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right\|$

C'est-à-dire : $AI'=\frac{2}{3}AB$ par suite : $\frac{AI'}{AB}=\frac{2}{3}$ ②

D'après ①et② on a $\frac{AI}{AC}=\frac{AI'}{AB}$

et d'après la réciproque de Thales : $(II')\parallel(BC)$et puisque (AB) coupe (II') en I'

Donc I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) On a I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC) et M est le milieu de [BC]

Montrons que : : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$???

On considère P la projection sur (AM) Parallèlement à (BC)

On a $A\in(AM)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A)=A$ ❶

La parallèle à (BC) passant par C est BC) elle coupe (AM)en M donc :$P(C)=M$ ❷

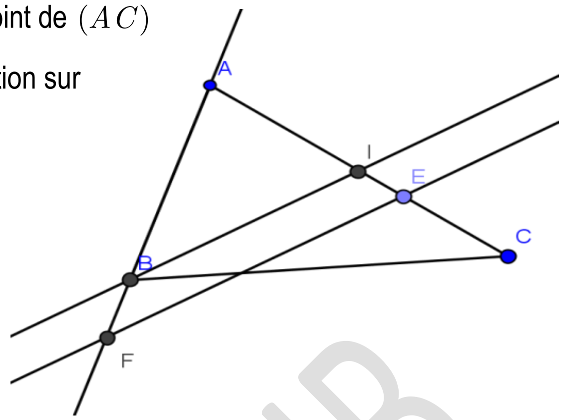
La parallèle à (BC) passant par I est-elle coupe (AM) en G donc $P(I)=G$ ❸

Et on a en plus $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ❹donc D'après : ❶ et ❷ et ❸ et ❹ on a $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Car la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points.

Exercice4 : (**) Soient ABC un triangle et I le milieu de : $[AC]$. E Un point de (AC) tel que : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et $P_{((AB);(IB))}(E) = F$ Avec : $P_{((AB);(IB))}$ la projection sur (AB) Parallèlement à (IB)

Faire une figure et Montrer que : $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



Correction : On a : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ **et** I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ donc : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

Et on a : $P_{((AB);(IB))}(E) = F$ **et** $P_{((AB);(IB))}(I) = B$ Et $P_{((AB);(IB))}(A) = A$

Et puisque le la projection conserve le coefficient

D'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice5 : (***) Soient ABC un triangle isocèle en A et $M \in [BC]$ tel que : $M \neq B$ et $M \neq C$

La droite parallèle à (AB) passant par M coupe $[AC]$ en E

La droite parallèle à (AC) passant par M coupe $[AB]$ en F

1) Montrer que les triangles MBF et MCE sont isocèles

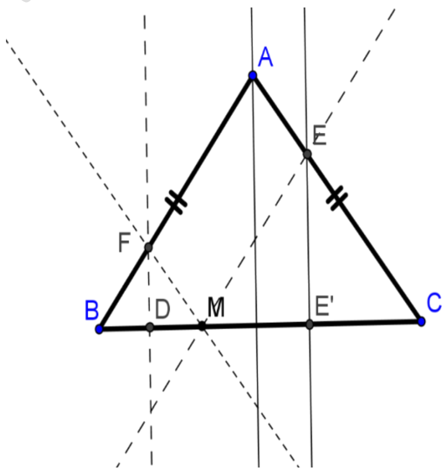
2) Soient A' ; E' et F' respectivement les projections orthogonales des points A ; E et F sur (BC)

Montrer que : $MF' = A'E'$

3) Montrer que : $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AF} = \vec{0}$

Corrigé :1)

Montrons que les triangles MBF et MCE sont isocèles



- On a : $(FM) \parallel (AC)$ donc : $\widehat{BCA} \equiv \widehat{BMF}$ (1)

Et on a : ABC un triangle isocèle en A

Donc : $\widehat{CBA} \equiv \widehat{BCA}$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $\widehat{CBA} \equiv \widehat{BMF}$

Par suite : le triangle MBF est isocèle en F

- On a : $(EM) \parallel (AB)$ donc : $\widehat{FBC} \equiv \widehat{EMC}$ (1)

Et puisque : $\widehat{FBC} \equiv \widehat{MCE}$ (2) alors : $\widehat{MCE} \equiv \widehat{EMC}$

Par suite : le triangle MCE est isocèle en E

2) Montrons que : $MF' = A'E'$; Soit P la projection orthogonale sur (BC)

On a : $P(M) = M$ et $P(A) = A'$ et $P(F) = F'$ et $P(E) = E'$

Et on a : $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EA}$ car $AEMF$ un parallélogramme

Et puisque la projection conserve le coefficient de colinéarité alors : $\overrightarrow{MF'} = \overrightarrow{E'A'}$

3) Montrons que : $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AF} = \vec{0}$

On a : $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EA}$ (car $AEMF$ un parallélogramme)

Donc : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA}$ c'est-à-dire : $-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AE}$

Et par suite : $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AF} = \vec{0}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien