Tronc commun Sciences BIOF

La correction Série N°9 : L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Exercice1 : (**) Soit a un réels tel que : $a=\frac{\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$

1) Vérifier que : $a=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

2) Sachant que : $1.73<\sqrt{3}<1.74$ et $2.64<\sqrt{7}<2.65$

Donner une valeur approchée décimal du réel a par défaut et excès à 10^{-2} près

Corrigé :1)

On : $\sqrt{7}>\sqrt{3}$ donc : $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}>0$

Calculons : $\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}\right)^2$:

$$\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{7-2\sqrt{21}+3}{4}=\frac{10-2\sqrt{21}}{4}=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

Et $\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$

Donc : $\frac{\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ et par suite : $a=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

2) On a : $1.73<\sqrt{3}<1.74$ et $2.64<\sqrt{7}<2.65$ et $a=\frac{1}{2}\left(\sqrt{7}+\left(-\sqrt{3}\right)\right)$

Donc : $-1.74<-\sqrt{3}<-1.73$ et $2.64<\sqrt{7}<2.65$

Donc : $0.90<\sqrt{7}-\sqrt{3}<0.92$ et par suite : $0.45<\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}<0.46$

Donc : $0.45<a<0.46$ et $0.46-0.45=0.01=10^{-2}$

Par suite : $0,46$ est une valeur approchée du réel a par excès à : 10^{-2} près

$0,45$: Est une valeur approchée du réel a par défaut à : 10^{-2} près

Exercice2 : (**) Soient : a ; b ; c ; d des réels strictement positifs.

1)Montrer que : $a^2+1\geq 2a$.

2) Déduire que : $\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd}\geq 16$.

Corrigé : 1) Montrons que : $a^2+1\geq 2a$

Soit $a>0$

$(a^2+1)-2a=a^2-2a\times 1+1^2=(a-1)^2\geq 0$ Car : le carré est toujours positif

Donc : $(a^2+1)-2a=(a-1)^2\geq 0$

Par suite : $a^2+1\geq 2a$

2) Soient : $a>0$ et $b>0$ et $c>0$ et $d>0$

On a : $a^2+1\geq 2a>0$ et de même on a aussi : $b^2+1\geq 2b>0$ et $c^2+1\geq 2c>0$ et $d^2+1\geq 2d>0$

C'est à dire : $\begin{cases} a^2+1\geq 2a>0 \\ b^2+1\geq 2b>0 \\ c^2+1\geq 2c>0 \\ d^2+1\geq 2d>0 \end{cases}$ et par multiplication des inégalités membre a membre on obtient :

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)\geq 16abcd>0$

Donc : $\dfrac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd}\geq 16$

Exercice3 : (**) Soient a et b deux réels tels que : $2a+4b=1$

Montrer que : $a^2+b^2\geq \dfrac{1}{20}$

Corrigé : Soient a et b deux réels tels que : $2a+4b=1$

C'est-à-dire : $2a=1-4b$ donc : $a=\dfrac{1-4b}{2}=\dfrac{1}{2}-2b$

Calculons : $\left(a^2+b^2\right)-\dfrac{1}{20}$

$$\left(a^2+b^2\right)-\frac{1}{20}=\left(\left(\frac{1}{2}-2b\right)^2+b^2\right)-\frac{1}{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\frac{1}{2}\times 2b+4b^2+b^2-\frac{1}{20}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{20}-2b+4b^2+b^2=\frac{1}{5}-2b+5b^2=\frac{1-10b+25b^2}{5}=\frac{1}{5}\left((5b)^2-2\times 5b\times 1+1^2\right)$$

Donc : $\left(a^2+b^2\right)-\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{5}(5b-1)^2\geq 0$

Donc : $\left(a^2+b^2\right)-\dfrac{1}{20}\geq 0$

Par suite : $a^2+b^2\geq \dfrac{1}{20}$

Exercice4: (**) Soit $x\in\mathbb{R}^{*+}$

1) Comparer : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

2) En déduire une comparaison de : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

Corrigé :1) On a : $x+2\geq x$ car $(x+2)-x\geq 0$ Donc $\sqrt{x+2}\geq\sqrt{x}$

En ajoutant $\sqrt{x+1}$ aux deux membres on trouve : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$ (Le conjugué)

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

Donc : $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

Et on aussi : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Et puisque : $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \le \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$: donc $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} \ge \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

D'où $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} \le \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Exercice5 : (**) $x \in [-3;1]$ et $y \in [-6;-2]$

Trouver un encadrement de : 1) $x+y$ 2) $x-y$ 3) x^2 4) y^2 5) $x \times y$ 6) $\frac{x}{y}$

Corrigé :1) $x \in [-3;1]$ signifie $-3 \le x \le 1$

$y \in [-6;-2]$ Signifie que : $-6 \le y \le -2$

Donc $(-3)+(-6) \le x+y \le 1+(-2)$

C'est-à-dire : $-9 \le x+y \le -1$

2) On a $x-y = x+(-y)$ et on a $-6 \le y \le -2$ donc $2 \le -y \le 6$

Donc $(-3)+2 \le x+(-y) \le 1+6$ c'est-à-dire : $-1 \le x-y \le 7$

3) On a $-3 \le x \le 1$ donc $0 \le x \le 1$ ou $-3 \le x \le 0$

Donc $0^2 \le x^2 \le 1^2$ ou $0^2 \le x^2 \le (-3)^2$

Donc $0 \le x^2 \le 1$ ou $0 \le x^2 \le 9$

Par suite : $0 \le x^2 \le 9$

4) On a $-6 \le y \le -2$ donc $(-2)^2 \le y^2 \le (-6)^2$

Par suite : $4 \le y^2 \le 36$

5) Encadrement de : $x \times y$: On a : $-3 \le x \le 1$ et $-6 \le y \le -2$

- Si $0 \le x \le 1$

On a $-6 \le y \le -2$ alors on a : $2 \le -y \le 6$

Donc $0 \le -xy \le 6$ par suite ① $-6 \le xy \le 0$

- Si $-3 \le x \le 0$ alors $0 \le -x \le 3$ et on a $2 \le -y \le 6$ donc ② $0 \le xy \le 18$

D'après ① et ② on déduit que : $-6 \le xy \le 18$

6) Encadrement de $\frac{x}{y}$: on a $-6 \le y \le -2$ donc : $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le -\frac{1}{6}$

Donc : $\frac{1}{6} \le -\frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$ et $-3 \le x \le 1$

- Si $0 \le x \le 1$: On a $\frac{1}{6} \le -\frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$

Alors $0 \le x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \le \frac{1}{2}$ Donc $0 \le -\frac{x}{y} \le \frac{1}{2}$ par suite : ❸ $-\frac{1}{2} \le \frac{x}{y} \le 0$

- Si $-3 \le x \le 0$ alors $0 \le -x \le 3$ et on a $\frac{1}{6} \le -\frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$ donc ❹ $0 \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{2}$

D'après ❸ et ❹ on déduit que : $-\frac{1}{2} \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{2}$

Exercice6 : (**) 1) Résoudre les équations :

a) $3|x|-5=0$ b) $5|x|+11=0$ c) $-2\left|-\frac{3}{4}x+2\right|+3=0$

2) Résoudre les inéquations : a) $|3x+5| < \frac{3}{4}$ b) $2 < |x| < 3$ c) $2 < |x| < 3$

Corrigé :1) a) **Égalité de deux valeurs absolues :**

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |3| = |−3|

$3|x|-5=0$ Signifie que : $|x|=\frac{5}{3}$

Signifie que : $x=\frac{5}{3}$ ou $x=-\frac{5}{3}$

Donc : $S=\left\{-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right\}$

b) $5|x|+11=0$ Signifie que : $|x|=-\frac{11}{5}$

Donc : $S=\varnothing$ car la valeur absolue est toujours positive

c) $-2\left|-\frac{3}{4}x+2\right|+3=0$ Signifie que : $\left|-\frac{3}{4}x+2\right|=\frac{3}{2}$

Signifie que : $|x-2|\left(|x-2|-1\right)=0$

Signifie que : $-\frac{3}{4}x+2=\frac{3}{2}$ ou $-\frac{3}{4}x+2=-\frac{3}{2}$

Signifie que : $x=\frac{2}{3}$ ou $x=\frac{14}{3}$

Donc : $S=\left\{\frac{2}{3};\frac{14}{3}\right\}$

2)a) Résolution de l'inéquation : $|3x+5|<\frac{3}{4}$

Règle : $|x-a|\leq r$ **est équivalente à :** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|3x+5|<\frac{3}{4}$ Signifie que : $-\frac{3}{4}<3x+5<\frac{3}{4}$

Signifie que : $-\frac{23}{4}<3x<-\frac{17}{4}$

Signifie que : $-\frac{23}{12}<x<-\frac{17}{12}$

Donc : $S=\left]-\frac{23}{12};-\frac{17}{12}\right[$

b) Résolution de l'inéquation : $|x-9|\geq\frac{1}{2}$

Règle : $|x-a|>r$ **est équivalente à :** $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$|x+3|>\frac{4}{7}$ Signifie que : $x+3>\frac{4}{7}$ ou $x+3<-\frac{4}{7}$ Signifie que : $x>-\frac{17}{7}$ ou $x<-\frac{25}{7}+9$

Signifie que : $x>-\frac{17}{7}$ ou $x<-\frac{25}{7}$

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{25}{7}\right[\cup\left]\frac{-17}{7};+\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $\frac{1}{2}<|x-1|<1$

$\frac{1}{2}<|x-1|<1$ Signifie que : $|x-1|<1$ et $|x-1|>\frac{1}{2}$

• Résolution de l'inéquation : $|x-1|<1$

$|x-1|<1$ Signifie que : $-1<x-1<1$ Signifie que : $0<x<2$

Donc : $S_1=]0;2[$

• Résolution de l'inéquation : $|x-1|>\frac{1}{2}$

$|x-1|>\frac{1}{2}$ Signifie que : $x-1>\frac{1}{2}$ ou $x-1<-\frac{1}{2}$

Signifie que : $x>\frac{3}{2}$ ou $x<\frac{1}{2}$

Donc : $S_2=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

Finalement on a : $S=S_1\cap S_2=]0;2[\cap\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right)$

Donc : $S=\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};2\right[$

Exercice7 : (**) Soient $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ et $|4x+y|<\frac{1}{3}$; Montrer que : $\frac{y}{x}\in\left]-\frac{28}{3};-\frac{4}{3}\right[$

Corrigé : On a : $|4x+y|<\frac{1}{3}$ Signifie $-\frac{1}{3}<4x+y<\frac{1}{3}$ (1)

Et on a : $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ donc $1\le 4x\le 2$ Signifie $-2\le -4x\le -1$ (2)

(1)+(2) donne : $-\frac{1}{3}+(-2)<4x+y+(-4x)<\frac{1}{3}+(-1)$

(2) qui signifie : $-\frac{7}{3}<y<\frac{-2}{3}$

Par suite : $\frac{2}{3}<-y<\frac{7}{3}$ et on a aussi : $2<\frac{1}{x}<4$

Donc : $\frac{2}{3}\times 2<\frac{1}{x}\times(-y)<\frac{7}{3}\times 4$ C'est-à-dire : $\frac{4}{3}<-\frac{y}{x}<\frac{28}{3}$

Par suite : $-\frac{28}{3}<\frac{y}{x}<-\frac{4}{3}$ donc : $\frac{y}{x}\in\left]-\frac{28}{3};-\frac{4}{3}\right[$

Exercice8 : (**) On pose : $A=x+y-6xy$; Soient x et y deux réels de l'intervalle : $\left[0;\frac{1}{3}\right]$

1) Montrer que : $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}-3x\le\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}\le 2y-\frac{1}{3}\le\frac{1}{3}$

2)Vérifier que : $\left|A-\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{1}{2}-3x\right|\left|2y-\frac{1}{3}\right|$

3) Déduire que : $A\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

Corrigé :1) Montrons que : $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}-3x\le\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}\le 2y-\frac{1}{3}\le\frac{1}{3}$

Soient x et y deux réels de l'intervalle : $\left[0;\frac{1}{3}\right]$

On a : $x \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$ donc : $0 \le x \le \frac{1}{3}$

Donc : $0 \le 3x \le 1$ alors : $-1 \le -3x \le 0$ alors : $\frac{1}{2}-1 \le \frac{1}{2}-3x \le \frac{1}{2}$

Par suite : $\boxed{-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}-3x \le \frac{1}{2}}$

On a : $y \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$ donc : $0 \le y \le \frac{1}{3}$

Donc : $0 \le 2y \le \frac{2}{3}$ alors : $\boxed{-\frac{1}{3} \le 2y-\frac{1}{3} \le \frac{1}{3}}$

2)Vérifions que : $\left|A-\frac{1}{6}\right| = \left|\frac{1}{2}-3x\right|\left|2y-\frac{1}{3}\right|$ si : $x \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$ et $y \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$

$$\left|A-\frac{1}{6}\right| = \left|x+y-6xy-\frac{1}{6}\right| = \left|x-6xy-\left(\frac{1}{6}-y\right)\right| = \left|6x\left(\frac{1}{6}-y\right)-\left(\frac{1}{6}-y\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{6}-y\right)(6x-1)\right|$$

Donc : $\left|A-\frac{1}{6}\right| = \left|2\left(\frac{1}{6}-y\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{3}-2y\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\left(2y-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\left(\frac{1}{2}-3x\right)\right)\right|$

Donc : $\left|A-\frac{1}{6}\right| = \left|\left(2y-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}-3x\right)\right|$

Donc : $\left|A-\frac{1}{6}\right| = \left|\frac{1}{2}-3x\right|\left|2y-\frac{1}{3}\right|$ car $|a\times b| = |a|\times|b|$

3) Déduisons que : $A \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$

On a : $\left|A-\frac{1}{6}\right| = \left|\frac{1}{2}-3x\right|\left|2y-\frac{1}{3}\right|$ et $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}-3x \le \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3} \le 2y-\frac{1}{3} \le \frac{1}{3}$

Donc : $\left|\frac{1}{2}-3x\right| \le \frac{1}{2}$ et $\left|2y-\frac{1}{3}\right| \le \frac{1}{3}$

Donc : $\left|\frac{1}{2}-3x\right|\times\left|2y-\frac{1}{3}\right| \le \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

Donc : $\left|A-\frac{1}{6}\right| \le \frac{1}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{6} \le A-\frac{1}{6} \le \frac{1}{6}$

Donc : $-\frac{1}{6}+\frac{1}{6} \le A-\frac{1}{6}+\frac{1}{6} \le \frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ c'est-à-dire : $0 \le A \le \frac{1}{3}$

Ce qui signifie que : $A \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$

Exercice9 : (**) Soit : $x \in \mathbb{R}$ et $x \in [1;3]$

1) Vérifier que : $x^2-2x = (x-1)^2-1$

2) Montrer que : $-1 \le x^2-2x \le 3$

3) a) Montrer que : $\frac{1}{2} \le \frac{3}{x^2-2x+3} \le \frac{3}{2}$

b) En déduire que : $\left|\frac{3}{x^2-2x+3}-1\right| \le \frac{1}{2}$.

Corrigé : 1) $x^2-2x=x^2-2x+1-1=\left(x^2-2x+1\right)-1$

Donc : $x^2-2x=\left(x-1\right)^2-1$

2) Montrons que : $-1\le x^2-2x\le 3$

$x\in[1;3]$ Ce qui signifie que : $1\le x\le 3$

On a : $1\le x\le 3$ donc : $0\le x-1\le 2$

Donc : $0^2\le\left(x-1\right)^2\le 2^2$

Donc : $0\le\left(x-1\right)^2\le 4$

Donc : $-1\le\left(x-1\right)^2-1\le 3$

Donc : $-1\le x^2-2x\le 3$

3) a) Montrons que : $\frac{1}{2}\le\frac{3}{x^2-2x+3}\le\frac{3}{2}$

On a : $-1\le x^2-2x\le 3$ donc : $2\le x^2-2x+3\le 6$

Donc : $\frac{1}{6}\le\frac{1}{x^2-2x+3}\le\frac{1}{2}$

Donc : $\frac{3}{6}\le\frac{3}{x^2-2x+3}\le\frac{3}{2}$

Donc : $\frac{1}{2}\le\frac{3}{x^2-2x+3}\le\frac{3}{2}$

b) Déduisons que : $\left|\frac{3}{x^2-2x+3}-1\right|\le\frac{1}{2}$.

On a : $\frac{1}{2}\le\frac{3}{x^2-2x+3}\le\frac{3}{2}$ donc : $\frac{1}{2}-1\le\frac{3}{x^2-2x+3}-1\le\frac{3}{2}-1$

Donc : $-\frac{1}{2}\le\frac{3}{x^2-2x+3}-1\le\frac{1}{2}$

D'où : $\left|\frac{3}{x^2-2x+3}-1\right|\le\frac{1}{2}$

Exercice10 : (***) Soient a et b deux réels non nuls tel que : $-1<\frac{10-3a}{a}<2$ et $\left|\frac{3+2b}{b}\right|<1$

1) Montrer que : $2<a<5$ et $-3<b<-1$

2) Encadrer les nombres : $a+b+1$ et $a\left(b+1\right)$

3) En déduire une comparaison des deux nombres : $a+b+1$ et $\sqrt{a^2+b^2+2b+1}$

Corrigé :

1) a) Montrons que : $2<a<5$

On a : $-1<\frac{10-3a}{a}<2$ donc : $-1<\frac{10}{a}-\frac{3a}{a}<2$

Donc : $-1<\frac{10}{a}-3<2$

Donc : $-1+3<\frac{10}{a}-3+3<2+3$

Donc : $2<\frac{10}{a}<5$ (par suite $a>0$)

Donc : $\frac{1}{5}<\frac{a}{10}<\frac{1}{2}$

Donc : $\frac{1}{5}\times 10<\frac{a}{10}\times 10<\frac{1}{2}\times 10$

Donc : $\boxed{2<a<5}$

1) b) Montrons que : $-3<b<-1$

On a : $\left|\frac{3+2b}{b}\right|<1$ donc : $-1<\frac{3+2b}{b}<1$

Donc : $-1<\frac{3}{b}+2<1$

Donc : $-1-2<\frac{3}{b}+2-2<1-2$

Donc : $-3<\frac{3}{b}<-1$ (par suite $b<0$)

Donc : $-1\times 3<\frac{b}{3}\times 3<-\frac{1}{3}\times 3$

Donc : $\boxed{-3<b<-1}$

2) a) Encadrement du nombre : $a+b+1$

On a : $2<a<5$ et $-3<b<-1$

Donc : $2+(-3)<a+b<5+(-1)$

Donc : $-1<a+b<4$

Donc : $-1+1<a+b+1<4+1$

Donc : $\boxed{0<a+b+1<5}$

b) Encadrement du nombre : $a(b+1)$

On a : $2<a<5$ et $-3<b<-1$

Donc : $2<a<5$ et $-2<b+1<0$

Donc : $2<a<5$ et $0<-(b+1)<2$

Donc : $0<-a(b+1)<10$

Donc : $\boxed{-10<a(b+1)<0}$

3) Déduirons une comparaison des deux nombres : $a+b+1$ et $\sqrt{a^2+b^2+2b+1}$

On a : $0<a+b+1<5$ donc $a+b+1$ est positif et $\sqrt{a^2+b^2+2b+1}$ est positif aussi

On va comparer leurs carrés :

$$\left((a+b)+1\right)^2-\sqrt{a^2+b^2+2b+1}^2=(a+b)^2+2(a+b)\times 1+1^2-a^2-b^2-2b-1$$

$$=a^2+b^2+2ab+2a+2b+1-a^2-b^2-2b-1=2ab+2a=2a(b+1)$$

Or : $-10<a(b+1)<0$ donc $-20<2a(b+1)<0$

Par suite : $\left((a+b)+1\right)^2-\sqrt{a^2+b^2+2b+1}^2<0$

Alors : $\boxed{a+b+1<\sqrt{a^2+b^2+2b+1}}$

Exercice11 : (***) Soient a et b deux réels tels que : $\left|\frac{3a-11}{a-2}\right|<2$ et $\left|\frac{2b-3}{b+1}-5\right|<2$

1) Montrer que : $3<a<7$ et $-6<b<-2$

2) Encadrer les nombres : $a+b+1$ et ab

3) En déduire une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

Corrigé : 1) a) Montrons que : $3<a<7$

On a : $\left|\frac{3a-11}{a-2}\right|<2$ donc : $-2<\frac{3a-11}{a-2}<2$

Donc : $-2 < \frac{3a-6+6-11}{a-2} < 2$

Donc : $-2 < \frac{3(a-2)-5}{a-2} < 2$ c'est-à-dire : $-2 < \frac{3(a-2)}{a-2} - \frac{5}{a-2} < 2$

Donc : $-2 < 3 - \frac{5}{a-2} < 2$ c'est-à-dire : $-2-3 < -\frac{5}{a-2} < 2-3$

Donc : $-5 < -\frac{5}{a-2} < -1$ c'est-à-dire : $1 < \frac{5}{a-2} < 5$

Donc : $\frac{1}{5} < \frac{a-2}{5} < 1$ c'est-à-dire : $1 < a-2 < 5$

Donc : $\boxed{3 < a < 7}$

b) Montrons que : $-6 < b < -2$

On a : $\left|\frac{2b-3}{b+1} - 5\right| < 2$ donc : $-2 < \frac{2b-3}{b+1} - 5 < 2$

Donc : $-2 < \frac{2(b+1)-2-3}{b+1} - 5 < 2$

Donc : $-2 < \frac{2(b+1)}{b+1} - \frac{5}{b+1} - 5 < 2$ c'est-à-dire : $-2 < 2 - \frac{5}{b+1} - 5 < 2$

Donc : $-2 < -\frac{5}{b+1} - 3 < 2$ c'est-à-dire : $1 < -\frac{5}{b+1} < 5$

Donc : $\frac{1}{5} < -\frac{b+1}{5} < 1$ c'est-à-dire : $-1 < \frac{b+1}{5} < -\frac{1}{5}$

Donc : $-5 < b+1 < -1$ c'est-à-dire : $\boxed{-6 < b < -2}$

2) a) Encadrement du nombre : $a+b+1$

On a : $3 < a < 7$ et $-6 < b < -2$

Donc : $3+(-6) < a+b < 7+(-2)$

Donc : $-3 < a+b < 5$

Donc : $-3+1 < a+b+1 < 5+1$

Donc : $\boxed{-2 < a+b+1 < 6}$

b) Encadrement du nombre : ab

On a : $3 < a < 7$ et $-6 < b < -2$

Donc : $3 < a < 7$ et $2 < -b < 6$

Donc : $6 < -ab < 42$

Donc : $\boxed{-42 < ab < -6}$

3) Déduirons une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

On a : $3 < a < 7$ donc $6 < 2a < 14$ et $-6 < b < -2$

$0 < 2a+b < 12$

Donc : $2a+b$ est positif et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$ est positif aussi

On va comparer leurs carrés :

$$(2a+b)^2 - \sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2 = 4a^2+4ab+b^2-2a^2-b^2-3ab = 2a^2+ab = a(2a+b)$$

Or : $2a+b$ est positif et a est positif donc $a(2a+b) > 0$

Par suite : $(2a+b)^2 - \sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2 > 0$

Alors : $\boxed{2a+b > \sqrt{2a^2+b^2+3ab}}$

Exercice12 : (***) Soient a et b deux réels tel que : $|a|<\frac{1}{2}$

On pose : $A=\frac{1}{\sqrt{1+a}}-\left(1-\frac{a}{2}\right)$

1) Montrer que : $A=\frac{\sqrt{1+a}-\left(1+\frac{a}{2}\right)+\frac{a^2}{2}}{1+a}$

2) Donner un encadrement de : $1+\frac{a}{2}$ et $1-\frac{a}{2}$

3) Montrer que : $\sqrt{1+a}\leq 1+\frac{a}{2}$ et en déduire que : $A\leq a^2$

4) Montrer que : $\frac{1}{\sqrt{1+a}}\geq 1-\frac{a}{2}$

5)En déduire une approximation du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,01}}$ à 10^{-4} près

Corrigé : 1) Montrons que : $A=\frac{\sqrt{1+a}-\left(1+\frac{a}{2}\right)+\frac{a^2}{2}}{1+a}$

$$A=\frac{1}{\sqrt{1+a}}-\left(1-\frac{a}{2}\right)=\frac{\sqrt{1+a}}{1+a}-\left(1-\frac{a}{2}\right)=\frac{\sqrt{1+a}-(1+a)\left(1-\frac{a}{2}\right)}{1+a}$$

$$A=\frac{\sqrt{1+a}-a+\frac{a^2}{2}-1+\frac{a}{2}}{1+a}=\frac{\sqrt{1+a}-\frac{a}{2}+\frac{a^2}{2}-1}{1+a}=\frac{\sqrt{1+a}-\left(1+\frac{a}{2}\right)+\frac{a^2}{2}}{1+a}$$

2) a) Encadrement de : $1+\frac{a}{2}$:

On a : $|a|<\frac{1}{2}$ donc : $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{4}<\frac{a}{2}<\frac{1}{4}$

Donc : $1-\frac{1}{4}<1+\frac{a}{2}<1+\frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3}{4}<1+\frac{a}{2}<\frac{5}{4}$ (remarque : $0<1+\frac{a}{2}$)

b) Encadrement de : $1-\frac{a}{2}$:

On a : $|a|<\frac{1}{2}$ donc : $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{4}<-\frac{a}{2}<\frac{1}{4}$

Donc : $1-\frac{1}{4}<1-\frac{a}{2}<1+\frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3}{4} < 1 - \frac{a}{2} < \frac{5}{4}$ (remarque : $0 < 1 - \frac{a}{2}$)

3) a) Montrons que : $\sqrt{1+a} \le 1 + \frac{a}{2}$

On a : $\sqrt{1+a}$ *et* $1 + \frac{a}{2}$ sont positifs et pour les comparer on compare leurs carrés

$\left(\sqrt{1+a}\right)^2 = 1+a$ et $\left(1+\frac{a}{2}\right)^2 = 1 + 2\times\frac{a}{2}\times 1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1 + a + \frac{a^2}{4}$

$\left(1+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+a}\right)^2 = 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a = \frac{a^2}{4} \ge 0$

Donc : $\left(1+\frac{a}{2}\right)^2 \ge \left(\sqrt{1+a}\right)^2$

Par suite : $\sqrt{1+a} \le 1 + \frac{a}{2}$

b) Déduisons que : $A \le a^2$

A faire

4) Montrons que : $\frac{1}{\sqrt{1+a}} \ge 1 - \frac{a}{2}$

A faire

5) Déduisons une approximation du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,01}}$ à 10^{-4} près

On a : $A = \frac{1}{\sqrt{1+a}} - \left(1 - \frac{a}{2}\right)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+a}} \ge 1 - \frac{a}{2}$

Donc : $0 \le A$

Et on a : $A \le a^2$ donc $0 \le \frac{1}{\sqrt{1+a}} - \left(1 - \frac{a}{2}\right) \le a^2$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{1+a}} - \left(1 - \frac{a}{2}\right)\right| \le a^2$

On prend : $a = 10^{-2}$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{1+10^{-2}}} - \left(1 - \frac{10^{-2}}{2}\right)\right| \le \left(10^{-2}\right)^2$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{1,01}} - \left(1 - \frac{1}{200}\right)\right| \le 10^{-4}$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{1,01}} - \frac{199}{200}\right| \le 10^{-4}$

Donc : $\frac{199}{200}$ une approximation du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,01}}$ à 10^{-4} près

Exercice13 : (***) Soient a et b deux réels tel que : $a\in[0;2]$ et $b\in[0;2]$

1) Montrer que : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

2) Sachant que : $0.866\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 0.867$ et $0.707\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.708$

Donner une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut et excès à 2×10^{-3} près

3) En déduire que : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le 1,2\times10^{-1}$

Corrigé : 1) $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3(2+b)-3(2+a)}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{6+3b-6-3a}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3b-3a}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{3(b-a)}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\frac{|3||b-a|}{|(2+b)(2+a)|}=\frac{3|a-b|}{|(2+b)(2+a)|}$ Car : $|b-a|=|a-b|$

Or on a : $a\in[0;2]$ signifie $0\le a\le 2$

Et on a : $b\in[0;2]$ signifie $0\le b\le 2$

Donc : $2\le 2+a\le 4$ et $2\le 2+b\le 4$

Par suite : $4\le(2+b)(2+a)\le 16$

C'est-à-dire : $|(2+b)(2+a)|=(2+b)(2+a)$

Et on a aussi : $\frac{1}{16}\le\frac{1}{(2+b)(2+a)}\le\frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3|a-b|}{16}\le\frac{3|a-b|}{(2+b)(2+a)}\le\frac{3|a-b|}{4}$ car : $3|a-b|\ge 0$

Par suite : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

2) On a : $0.866\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 0.867$ et $0.707\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.708$

On a $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et on a : $-0.708\le-\frac{\sqrt{2}}{2}\le-0.707$

Donc : $0.866-0.708\le\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le 0.867-0.707$

Donc : $0.158\le\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.16$ et $0.16-0.158=2\times10^{-3}$

Par suite : $0,16$ est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par excès à : 2×10^{-3} près

$0{,}158$: Est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut à : 2×10^{-3} près

3) D'après 1) on a $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\leq\frac{3}{4}|a-b|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\leq\frac{3}{4}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$ et on a : $0.158\leq\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq 0.16$

Donc : $0\leq\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq 0.16$

Par suite : $\frac{3}{4}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\leq\frac{3}{4}\times 0.16=0.12$

Finalement : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\leq 0.12$

C'est-à-dire : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\leq 1,2\times 10^{-1}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien