Tronc commun Sciences BIOF

La correction Série N°8 : L’ordre dans : $\mathbb{R}$

Exercice1 : (**) Comparer a et b dans les cas suivants :

1) $a=\sqrt{10}$ et $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$ 2) $a=\dfrac{-3}{\sqrt{17}+2}$ et $b=\dfrac{-3}{3\sqrt{2}+2}$

3) $a=\dfrac{\sqrt{7}-3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ et $b=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ 4) $a=6+5\sqrt{3}$ et $b=4+6\sqrt{2}$

Corrigé : 1) On compare : $a=\sqrt{14}$ et $b=\sqrt{7}+\sqrt{2}-1$

On calcul la différence : $a-b=\sqrt{14}-\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{7\times 2}-\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}-1\right)$

$a-b=\sqrt{7}\times\sqrt{2}-\sqrt{7}-\sqrt{2}+1=\sqrt{7}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$

On factorise par : $\sqrt{7}$ et par $\left(\sqrt{2}-1\right)$

Donc : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{7}-1\right)$

On a : $\sqrt{2}>1$ car $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ et $(1)^2=1$

Donc : $\left(\sqrt{2}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Et on a: $\sqrt{7}>1$ car $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$ et $1^2=1$ donc : $\left(\sqrt{7}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Alors : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{7}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ et par suite : $a>b$

2) On compare : $a=\dfrac{-3}{\sqrt{17}+2}$ et $b=\dfrac{-3}{3\sqrt{2}+2}$

On va comparer : $\sqrt{17}$ et $3\sqrt{2}$

On a : $3\sqrt{2}>\sqrt{17}$ car $\left(\sqrt{17}\right)^2=17$ et $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$

Donc : $3\sqrt{2}+2>\sqrt{17}+2$

Donc : $\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2}<\dfrac{1}{\sqrt{17}+2}$

Donc : $\dfrac{-5}{3\sqrt{2}+2}>\dfrac{-5}{\sqrt{17}+2}$

Donc : $b>a$

3) $a=\dfrac{\sqrt{7}-3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ et $b=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

On a : $3>\sqrt{7}$ car $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$ et $(3)^2=9$

Donc : $a=\dfrac{\sqrt{7}-3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}<0$ car $\sqrt{7}-3<0$ et $2\sqrt{2}+\sqrt{5}>0$

On a aussi : $2\sqrt{2}>\sqrt{5}$ car $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ et $\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$

Donc : $b=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}>0$

Puisque a est négatif et b est positif
Alors : $b>a$

4) $a=6+5\sqrt{3}$ et $b=4+6\sqrt{2}$

On a : $6>4$ et $5\sqrt{3}>6\sqrt{2}$ car $\left(5\sqrt{3}\right)^2=75$ et $\left(6\sqrt{2}\right)^2=72$

On a donc : $\begin{cases}5\sqrt{3}>6\sqrt{2}\\6>4\end{cases}$ par sommation membre a membre

Alors : $6+5\sqrt{3}>4+6\sqrt{2}$

Donc : $a>b$

Exercice2 : (**) Trouver un encadrement de $\sqrt{38}$ d'amplitude 10^{-2} sachant que $6{,}16$ est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{38}$ a 10^{-2} prés

Corrigé : On a : $6{,}16<\sqrt{38}$ car $6{,}16$ est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{38}$ a 10^{-2} prés

Donc : $6{,}16<\sqrt{38}<6{,}16+10^{-2}$

Donc : $6{,}16<\sqrt{38}<6{,}16+0{,}01$

Donc : $6{,}16<\sqrt{38}<6{,}17$

Exercice3 : (**) 1) Vérifier que $17^2<300<18^2$ et en déduire que ; $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$

2) Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$.

3) En déduire que : $0{,}14<\sqrt{15}-2\sqrt{3}<0{,}74$

4) Déterminer une valeur approchée par défaut et par excès de $\sqrt{15}-2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés

Corrigé : 1) On a $17^2=289$ et $18^2=324$ donc : $17^2<300<18^2$

C'est-à-dire : $\sqrt{17^2}<\sqrt{300}<\sqrt{18^2}$

Donc : $\sqrt{17^2}<\sqrt{3\times100}<\sqrt{18^2}$

C'est-à-dire : $17<\sqrt{3}\times10<18$

Donc : $17\times\frac{1}{10}<\sqrt{3}\times10\times\frac{1}{10}<18\times\frac{1}{10}$

Cela équivaut à : $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$

2) On a $22^2=484$ et $23^2=529$ donc : $22^2<500<23^2$ C'est-à-dire : $\sqrt{22^2}<\sqrt{500}<\sqrt{23^2}$.

Donc : $22<\sqrt{5}\times10<23$

Cela équivaut à : $22\times\frac{1}{10}<\sqrt{5}\times10\times\frac{1}{10}<23\times\frac{1}{10}$

Par suite : $2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$

3) $\sqrt{15}-2\sqrt{3}=\sqrt{15}+\left(-2\sqrt{3}\right)$

On a $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$ et $2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$

Donc : $3{,}4<2\sqrt{3}<3{,}6$ et $3{,}74<\sqrt{3}\sqrt{5}<4{,}14$

Donc : $-3{,}6<-2\sqrt{3}<-3{,}4$ et $3{,}74<\sqrt{15}<4{,}14$

Donc : $0{,}14<\sqrt{15}+\left(-2\sqrt{3}\right)<0{,}74$ Donc : $\boxed{0{,}14<\sqrt{15}-2\sqrt{3}<0{,}74}$

4) Déterminons une valeur approchée par défaut et par excès de $\sqrt{15}-2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés

On a : $0{,}14<\sqrt{15}-2\sqrt{3}<0{,}74$ et $0{,}74-0{,}14=0{,}6=6\times10^{-1}$

Une valeur approchée par défaut de $\sqrt{15}-2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés est : $0{,}14$

Une valeur approchée par excès de $\sqrt{15}-2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés est : $0{,}74$

Exercice4 : (**) Soient $a\in\mathbb{R}$; $b\in\mathbb{R}$ tel que : $a>b>0$

On pose : $x=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $y=\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}$

1) Montrer que : $x=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ et $y=\dfrac{a-b}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}$

2) Comparer les nombres : x et y

Corrigé : 1) Soient $a\in\mathbb{R}$; $b\in\mathbb{R}$ tel que : $a>b>0$

a) Montrons que : $x=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

On a : $x=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (multiplions par Le conjugué : $\sqrt{a}+\sqrt{b}$)

Donc : $x=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

a) Montrons que : $y=\dfrac{a-b}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}$

On a : $y=\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}$ (multiplions par Le conjugué : $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}$)

Donc : $y=\dfrac{\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\right)}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}=\dfrac{\sqrt{a+1}^2-\sqrt{b+1}^2}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}=\dfrac{a+1-b-1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}$

Donc : $y=\dfrac{a-b}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}$

2) Comparons les nombres : x et y

On a : $x=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ et $y=\dfrac{a-b}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}$

Et on a : $a<a+1$ et $b<b+1$ et $a>b>0$

Donc : $\sqrt{a}<\sqrt{a+1}$ et $\sqrt{b}<\sqrt{b+1}$ et $a-b>0$

Donc : $\sqrt{a}+\sqrt{b}<\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}$ et $a-b>0$

Donc : $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ et $a-b>0$

Donc : $\dfrac{a-b}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}<\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Donc : $y<x$

Exercice5 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{5}{3}(2x+1)-\dfrac{1}{2}(x-2)<\dfrac{7}{6}(x+2)$ 2) $-x+4(x-1)\le 3x$

3) $4(x-3)-(3x-10)>x+5$ 4) (I) ; $\dfrac{4x^2-3x-9}{x^2-5}\le 2$

5) (E) ; $\sqrt{|x-3|}\le x-1$

Corrigé : 1) On multiplie par le dénominateur commun, ici 6, ce qui Equivaut à :

$10(2x+1)-3(x-2)<7(x+2)$) Equivaut à : $20x+10-3x+6<7x+14$

Equivaut à : $20x-3x-7x\le -10-6+14$

Equivaut à : $10x\le -2$

On divise par 10, on ne change pas la relation d'ordre ce qui Equivaut à $x<\dfrac{-2}{10}$

Equivaut à : $x<\dfrac{-1}{5}$

On conclut par l'intervalle solution : Donc : $S=\left]-\infty;-\dfrac{1}{5}\right[$

2) $-x+4(x-1)\leq 3x$ Equivaut à : $-x+4x-4\leq 3x$
Equivaut à : $-x+4x-3x\leq 4$
On s'aperçoit en regroupant les x qu'il n'y en a plus.
On convient comme pour les équations d'écrire $0x$, ce qui donne :
Equivaut à : $0x\leq 4$
On a donc $0\leq 4$, ce qui est toujours vrai, quel que soit les valeurs de x.
On conclut alors par : $S=\mathbb{R}$
3) $4(x-3)-(3x-10)>x+5$ Equivaut à : $4x-12-3x+10>x+5$
Equivaut à : $4x-3x-x>12-10+5$
On s'aperçoit en regroupant les x qu'il n'y en a plus.
On convient comme pour les équations d'écrire $0x$, ce qui donne :
Equivaut à : $0x>7$
On a donc : $0>7$ ce qui est faux quel que soit les valeurs de x ; on conclut donc par : $S=\varnothing$
Remarque : Beaucoup de cas de figure peuvent se présenter, dans les inéquations, où l'on obtient $0x$.
Il faudra dans chaque cas réfléchir pour savoir si l'on se situe dans un cas toujours vrai (exemple 2) ou dans un cas impossible (exemple 2).
4)Partie1 : L'ensemble de définition de l'inéquation (I) est donc $D_E=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$.

Partie2 : $\dfrac{4x^2-3x-9}{x^2-5}\leq 2$ Equivaut à : $\dfrac{4x^2-3x-9}{x^2-5}-2\leq 0$

Equivaut à : $\dfrac{4x^2-3x-9-2x^2+10}{x^2-5}\leq 0$

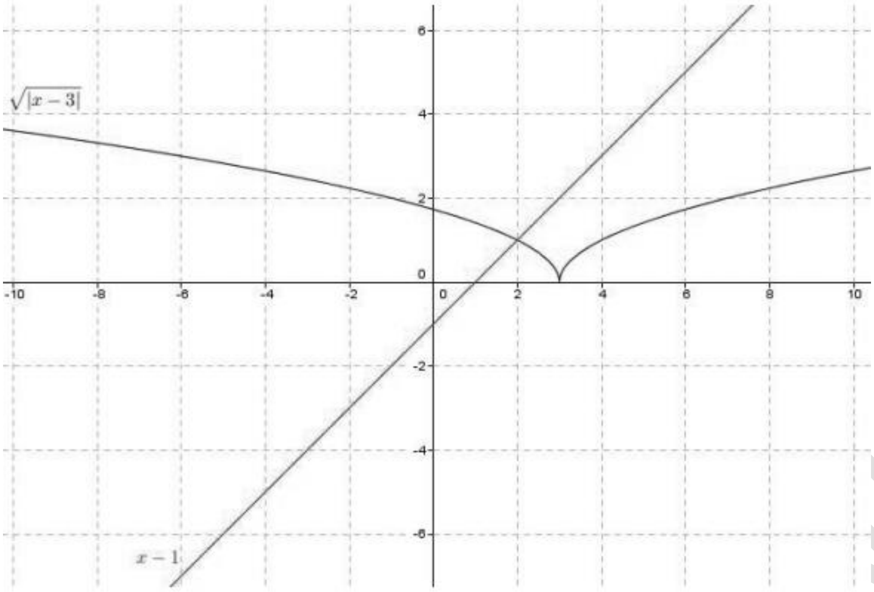
Equivaut à : $\dfrac{2x^2-3x+1}{x+5}\leq 0$ Equivaut à : $x^2-5x-6=0$

$\Delta=1>0$ donc $x^2-5x-6=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1=2$ et $x_2=3$
On obtient le tableau de signes suivant :
(On termine la résolution)
5)On remarque tout d'abord que sur $]-\infty\,;1[$, $x-1<0$ donc il n'y a pas de solution sur cet intervalle puisque : $\sqrt{|x-3|}\leq x-1$
On cherche donc uniquement des solutions sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$. Sur cet intervalle, les deux membres sont positifs, et donc on peut utiliser la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$
$\sqrt{|x-3|}\leq x-1$ Equivaut à : $|x-3|\leq (x-1)^2$
Equivaut à : $|x-3|\leq x^2-2x+1$
Comme $x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3$ on est naturellement amené à résoudre sur deux intervalles différents pour faire Disparaître la valeur absolue :
• Sur $[1\,;3[$: $|x-3|\leq x^2-2x+1$ Equivaut à : $-(x-3)\leq x^2-2x+1$
Equivaut à : $-x+3\leq x^2-2x+1$
Equivaut à : $0\leq x^2-2x-2$
On calcule le discriminant du polynôme x^2-2x-2 : $\Delta=9>0$ donc x^2-2x-2 admet deux racines Distinctes $x_1=-1$ et $x_2=2$
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or, on a restreint l'étude à l'intervalle $[1\,;3[$, donc on ne retient que les $x\in[2\,;3[$.
• Sur $[3\,;+\infty[$: $|x-3|\leq x^2-2x+1$ Equivaut à : $x-3\leq x^2-2x+1$

Equivaut à : $0 \le x^2 - 3x + 4$
On calcule le discriminant du polynôme $x^2 - 3x + 4$: $\Delta = -7 < 0$.
Donc ; le signe de $x^2 - 3x + 4$ est du signe de $a = 1$
Donc : $x^2 - 3x + 4 > 0$
Donc, tous les x ∈ [3 ; +∞[sont solutions de l'inéquation étudiée sur l'intervalle [3 ; +∞[.
Au final, S = [2 ; 3[∪ [3 ; +∞ [= [2 ; +∞[.
Cette résolution est confirmée par la lecture graphique suivante :



Exercice6 : (**) Trouver les nombres c et r tels que : $|x-c| \le r$ et $x \in [-4;6]$

Corrigé : $|x-c| \le r$ signifie x appartient à l'intervalle de centre c et de rayon r

Or $x \in [-4;6]$ donc : $c = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $r = \frac{6-(-4)}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Exercice7 : (**) 1) Résoudre les équations :

a) $3|x-5| = 2|4-3x|$ b) $-2|2x-13| = 1$ c) $(x-2)^2 - |x-2| = 0$

2) Résoudre les inéquations : a) $|2x+1| \le 4$ b) $|x-9| \ge \frac{1}{2}$ c) $2 < |x| < 3$

Corrigé : 1) a) **Égalité de deux valeurs absolues :**
Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b
Cela découle du fait que par exemple |3| = |−3|

$3|x-5| = 2|4-3x|$ Signifie que : $|3x-15| = |8-6x|$

Signifie que : $3x-15 = 8-6x$ ou $3x-15 = -(8-6x)$

Signifie que : $9x = 23$ ou $-3x = 7$

Signifie que : $x = \frac{23}{9}$ ou $x = -\frac{7}{3}$

Donc : $S = \left\{-\frac{7}{3}; \frac{23}{9}\right\}$

b) $-2|2x-13| = 1$ Signifie que : $|2x-13| = -\frac{1}{2}$

Donc : $S = \varnothing$ car la valeur absolue est toujours positive

c) $(x-2)^2 - |x-2| = 0$ Signifie que : $|x-2|^2 - |x-2| = 0$ car $|X|^2 = X^2$

Signifie que : $|x-2|(|x-2|-1) = 0$

Signifie que : $|x-2|=0$ ou $|x-2|-1=0$

Signifie que : $x-2=0$ ou $|x-2|=1$

Signifie que : $x-2=0$ ou $x-2=1$ ou $x-2=-1$

Signifie que : $x=2$ ou $x=3$ ou $x=1$

Donc : $S=\{1;2;3\}$

2)a) Résolution de l'inéquation : $|2x+1|\leq 4$

Règle : $|x-a|\leq r$ est équivalente à : $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|2x+1|\leq 4$ Signifie que : $-4\leq 2x+1\leq 4$

Signifie que : $-4-1\leq 2x+1-1\leq 4-1$

Signifie que : $-5\leq 2x\leq 3$

Signifie que : $-\frac{5}{2}\leq x\leq \frac{3}{2}$

Donc : $S=\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$

b) Résolution de l'inéquation : $|x-9|\geq \frac{1}{2}$

Règle : $|x-a|>r$ est équivalente à : $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$|x-9|\geq \frac{1}{2}$ Signifie que : $x-9\geq \frac{1}{2}$ ou $x-9\leq -\frac{1}{2}$ Signifie que : $x\geq \frac{1}{2}+9$ ou $x\leq -\frac{1}{2}+9$

Signifie que : $x\geq \frac{19}{2}$ ou $x\leq -\frac{17}{2}$

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{17}{2}\right]\cup\left[\frac{19}{2};+\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $2<|x|<3$

$2<|x|<3$ Signifie que : $|x|<3$ et $|x|>2$

• Résolution de l'inéquation : $|x|<3$

$|x|<3$ Signifie que : $-3<x<3$

Donc : $S_1=]-3;3[$

• Résolution de l'inéquation : $|x|>2$

$|x|>2$ Signifie que : $x>2$ ou $x<-2$

Donc : $S_2=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

Finalement on a : $S=S_1\cap S_2=]-3;3[\cap(]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[)$

Donc : $S=]-3;-2[\cup]2;3[$

Exercice8 : (**) Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $\left|x+\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}$; Trouver l'intervalle qui correspond à cette inégalité.

Corrigé : ($x\in\mathbb{R}$ et $\left|x+\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}$)

Signifie ($x\in\mathbb{R}$ et $|x-c|<r$) avec : $c=-\sqrt{2}$ et $r=\frac{1}{2}$

Donc : ($x \in \mathbb{R}$ et $\left|x+\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}$) signifie (x appartient à l'intervalle ouvert de centre $c=-\sqrt{2}$ et de rayon $r=\frac{1}{2}$ C'est-à-dire : $x \in \left]-\sqrt{2}-\frac{1}{2},-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right[$

Exercice9 : (***) 1) Résoudre algébriquement l'inéquation suivante : $|2x-1| \leq |x+2|$

2) Résoudre graphiquement l'inéquation suivante : $|2x-1| \leq |x+2|$

Corrigé : 1) Résolution algébrique

✍ On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue

$x+2=0$ Signifie que : $x=-2$

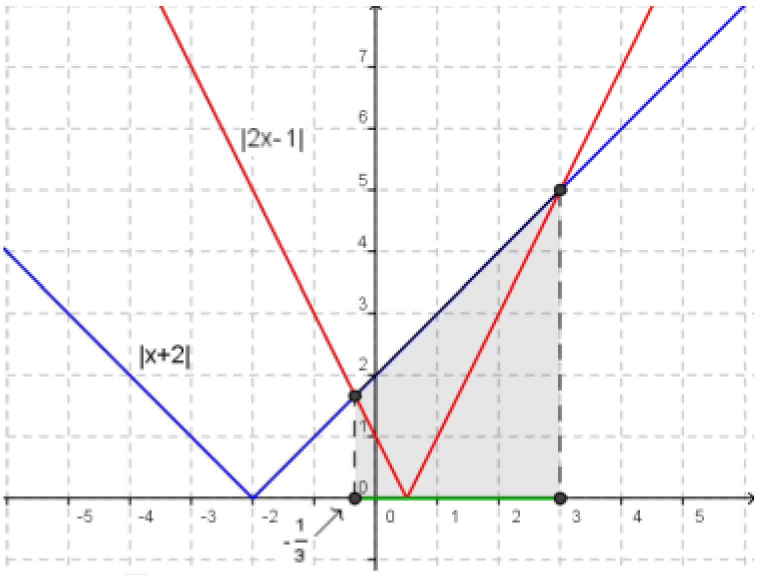
$2x-1=0$ Signifie que : $x=\frac{1}{2}$

✍ On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\|2x-1\|$		$-2x+1$	5	$-2x+1$	0	$2x-1$	
$\|x+2\|$		$-x-2$	0	$x+2$	$\frac{5}{2}$	$x+2$	
(E_2)		$-2x+1 \leqslant -x-2$ $x \geqslant 3$ impossible $S_1=\varnothing$		$-2x+1 \leqslant x+2$ $x \geqslant -\frac{1}{3}$ $S_2=\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$		$2x-1 \leqslant x+2$ $x \leqslant 3$ $S_3=\left[\frac{1}{2};3\right]$	

On obtient alors la solution : $S=S_1 \cup S_2 \cup S_3=\left[-\frac{1}{2};3\right]$

2) Résolution graphique



On obtient alors la solution : $S=\left[-\frac{1}{2};3\right]$

Exercice10 : (**) Soient x et y deux réels différents et non nuls tels que : $|x|<\frac{1}{4}$ et $|y-2|<\frac{1}{4}$

Montrer que : $\frac{7}{5}<\frac{2y}{y-x}<3$

Corrigé : $|x|<\frac{1}{4}$ Signifie que : $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$ donc : $-\frac{1}{4}<-x<\frac{1}{4}\,(1)$

Et nous avons : $|y-2|<\frac{1}{4}$ Signifie $-\frac{1}{4}<y-2<\frac{1}{4}$

Signifie que : $-\frac{1}{4}+2<y-2+2<\frac{1}{4}+2$ c'est-à-dire : $\frac{7}{4}<y<\frac{9}{4}\ (2)$

En sommant (1) et (2) nous déduisons : $\frac{6}{4}<y-x<\frac{10}{4}$ cad $\frac{3}{2}<y-x<\frac{5}{2}$

Cette inégalité est équivalente à : $\frac{2}{5}<\frac{1}{y-x}<\frac{2}{3}\ (3)$

De (2) nous déduisons : $\frac{7}{2}<2y<\frac{9}{2}\ (4)$

(3) et (4) Donnent par multiplication : $\frac{7}{5}<\frac{2y}{y-x}<3$

Exercice11 : (**) $x\in[-2;-1]$ et $y\in[-3;-2]$

Trouver un encadrement de : 1) $x+y$ 2) $x-y$ 3) x^2 4) y^2 5) $x\times y$ 6) $2x-3y$

Corrigé : $x\in[-2;-1]$ signifie $-2\le x\le -1$ et $y\in[-3;-2]$ Signifie que : $-3\le y\le -2$

1) On a : $-2\le x\le -1$ et $-3\le y\le -2$

Donc : $-2+(-3)\le x+y\le -1+(-2)$

Donc : $-5\le x+y\le -3$

2) On a : $x-y=x+(-y)$ et $-3\le y\le -2$ donc : $2\le -y\le 3$

Donc : $-2+2\le x+(-y)\le -1+3$

Donc : $0\le x-y\le 2$

3) On a $-2\le x\le -1$ donc $1\le -x\le 2$

Donc : $1^2\le(-x)^2\le 2^2$

Donc : $1\le x^2\le 4$

4) On a $-3\le y\le -2$ donc $2\le -y\le 3$

Par suite : $4\le y^2\le 9$

5) Encadrement de : $x\times y$:

On a : $-2\le x\le -1$ et $-3\le y\le -2$

Donc : $1\le -x\le 2$ et $2\le -y\le 3$

Donc $2\le(-x)(-y)\le 6$ par suite $2\le xy\le 6$

6) Encadrement de $2x-3y=2x+(-3y)$:

On a : $2\le -y\le 3$ donc : $6\le -3y\le 9$

On a : $-2\le x\le -1$ donc : $-4\le 2x\le -2$

Alors $-4+6\le 2x+(-3y)\le -2+9$ c'est-à-dire : $2\le 2x-3y+\le 7$

Exercice12 : (**) Soient a et b deux réels tels que : $0\le b\le 2$ et $|a+2|\le 1$

1) En cadrer le nombre : a

2) Montrer que : $|a+b+1|\le 2$

3) a) Vérifier que : $E=(a+3)(b-2)+6$

b) Déduire un encadrement pour le nombre E.

Corrigé : 1) Soit a tel que : $|a+2|\le 1$

On a: $|a+2|\le 1$ signifie que : $-1\le a+2\le 1$

Signifie que : $-1-2\le a+2-2\le 1-2$ Signifie que : $\boxed{-3\le a\le -1}$

2) Montrons que : $|a+b+1|\le 2$

On sait que : $-3\le a\le -1$ et $0\le b\le 2$ donc : $-3\le a+b\le 1$

Par suite : $-2\le a+b+1\le 2$

Donc : $|a+b+1|\le 2$

3) On pose : $E=ab-2a+3b$

a) Vérifions que : $E=(a+3)(b-2)+6$

$$(a+3)(b-2)+6=ab-2a+3b-6+6$$
$$=ab-2a+3b=E$$

Donc : $E=(a+3)(b-2)+6$

b) Déduisons un encadrement pour le nombre E.

On sait que : $E=(a+3)(b-2)+6$

On sait aussi que : $-3\le a\le -1$ et $0\le b\le 2$ donc : $0\le a+3\le 2$ et $-2\le b-2\le 0$ et donc : $0\le -(b-2)\le 2$

Par suite : $0\le -(a+3)(b-2)\le 4$

Donc : $-4\le (a+3)(b-2)\le 0$

Donc : $2\le (a+3)(b-2)+6\le 6$

D'où : $\boxed{2\le E\le 6}$

Exercice13 : On suppose que : $|x-1|\le \frac{1}{2}$

1) Montrer que : $|x^2-1|\le \frac{5}{4}$

2) Montrer que : $\frac{1}{4}\le \frac{1}{2x+1}\le \frac{1}{2}$

3) En déduire que : si $|x-1|\le \frac{1}{2}$ alors $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\le \frac{1}{4}$

Corrigé : 1) Montrons que : $|x^2-1|\le \frac{5}{4}$

On a : $|x-1|\le \frac{1}{2}$ Equivaut à : $-\frac{1}{2}\le x-1\le \frac{1}{2}$

Equivaut à : $-\frac{1}{2}+1\le x\le \frac{1}{2}+1$

Equivaut à : $\boxed{\frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{2}}$

On encadre : x^2-1

On a : $\frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{2}$ donc : $\frac{1}{4}\le x^2\le \frac{9}{4}$ alors : $\frac{1}{4}-1\le x^2-1\le \frac{9}{4}-1$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{4}\le x^2-1\le \frac{5}{4}$

Et comme $-\frac{5}{4}\le -\frac{3}{4}$ donc : $-\frac{5}{4}\le x^2-1\le \frac{5}{4}$

Par suite : $\boxed{|x^2-1|\le \frac{5}{4}}$

2) Montrons que : $\frac{1}{4}\le \frac{1}{2x+1}\le \frac{1}{2}$

On a : $\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ donc : $1 \le 2x \le 3$ par suite : $2 \le 2x+1 \le 4$ Alors : $\boxed{\frac{1}{4} \le \frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2}}$

3) Déduisons que : si $|x-1| \le \frac{1}{2}$ alors $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \le \frac{1}{4}$

On a : $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| = \left|(x-1)\times\frac{1}{2x+1}\right| = |x-1|\times\left|\frac{1}{2x+1}\right|$

On a aussi : $\frac{1}{4} \le \frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2}$ et puisque $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{4}$ donc : $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2}$ et donc $\left|\frac{1}{2x+1}\right| \le \frac{1}{2}$

On a donc : $\begin{cases} \left|\frac{1}{2x+1}\right| \le \frac{1}{2} \\ |x-1| \le \frac{1}{2} \end{cases}$ ce qui donne : $|x-1|\times\left|\frac{1}{2x+1}\right| \le \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $|x-1|\times\left|\frac{1}{2x+1}\right| \le \frac{1}{4}$

Ce qui signifie que : $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \le \frac{1}{4}$

Exercice14 : 1) Montrer que : si $x \in [0;1]$ alors $\frac{1}{x+1} \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

2) Soient : $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$; Montrer que : $\left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| \le |x-y|$

3)a) On pose : $0.577 \le \frac{\sqrt{3}}{3} \le 0.578$ et $0.707 \le \frac{\sqrt{2}}{2} \le 0.708$

Donner une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ par défaut et excès à 2×10^{-3} près

b) Déduire que : $\left|\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right| \le 0.2$

Corrigé : 1) Montrons que : si $x \in [0;1]$ alors $\frac{1}{x+1} \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

On a : $x \in [0;1]$ signifie $0 \le x \le 1$

Donc : $1 \le x+1 \le 2$

Donc : $\frac{1}{2} \le \frac{1}{x+1} \le 1$

Ceci signifie que : $\frac{1}{x+1} \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

2) Montrons que : $\left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| \le |x-y|$

Soient : $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$;

$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} = \frac{1+y-1-x}{(1+x)(1+y)} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}$

Donc on obtient : $\left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| = \left|\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}\right| = \frac{|y-x|}{|(1+x)(1+y)|}$

Donc : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|=|x-y|\times\frac{1}{|(1+x)(1+y)|}$ car $|y-x|=|x-y|$

On a : $1\leq x+1\leq 2$ et $1\leq y+1\leq 2$ donc $(1+x)(1+y)>0$

Donc : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|=|x-y|\times\frac{1}{(1+x)(1+y)}$

On a aussi : $1\leq x+1\leq 2$ et $1\leq y+1\leq 2$ donc $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{x+1}\leq 1$ et $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{y+1}\leq 1$

Donc : $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{(1+x)(1+y)}\leq 1$ et puisque : $0\leq|x-y|$

Alors : $\frac{|x-y|}{4}\leq|x-y|\frac{1}{(1+x)(1+y)}\leq|x-y|$

Ce qui entraine que : $\frac{|x-y|}{4}\leq\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|\leq|x-y|$

Donc : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|\leq|x-y|$

3) a) On a : $0.577\leq\frac{\sqrt{3}}{3}\leq 0.578$ donc : $-0.578\leq-\frac{\sqrt{3}}{3}\leq-0.577$ et comme $0.707\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\leq 0.708$

Donc : $0.129\leq\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\leq 0.131$ et $0.131-0.129=0.002$

Donc : 0.129 une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ par défaut à 2×10^{-3} près

Et : 0.131 une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ par excès à 2×10^{-3} près

b) Déduisons que : $\left|\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right|\leq 0.2$

On a : si $x\in[0;1]$ et $y\in[0;1]$ alors : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|\leq|x-y|$

Et comme : $\frac{\sqrt{2}}{2}\in[0;1]$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}\in[0;1]$ alors : $\left|\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right|\leq\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|$

Et puisque : $0.129\leq\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\leq 0.131$ alors : $-0.2\leq\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\leq 0.2$

C'est-à-dire : $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|\leq 0.2$

Alors : $\left|\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right|\leq 0.2$

Exercice15 : (***) Soit a, b, c trois nombres réels.

1) Démontrer que $a\times b\leq\frac{a^2+b^2}{2}$

2) Démontrer que $ab+ac+bc\leq a^2+b^2+c^2$

3) Démontrer que : $3ab+3ac+3bc\leq\left(a+b+c\right)^2$

Corrigé :1) Il suffit de se rappeler que : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\geq 0$Ceci donne immédiatement le résultat.

2) On applique trois fois la question précédente : $a\times b\leq\frac{a^2+b^2}{2}$ et $a\times c\leq\frac{a^2+c^2}{2}$ et $b\times c\leq\frac{b^2+c^2}{2}$

En sommant ces trois inégalités, on obtient bien l'inégalité demandée.
On développe $(a+b+c)^2$ en l'écrivant$\left((a+b)+c\right)^2$, puis en redéveloppant le carré.

On trouve : $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

En utilisant le résultat de la question précédente, $ab+ac+bc\leq a^2+b^2+c^2$
On obtient exactement le résultat demandé.

Exercice16 : (***) Montrer que lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres d'un nombre de deux chiffres, la valeur de ce nombre augmente ou diminue de 9 fois la différence de ces deux chiffres.

Corrigé : Soient x le chiffre des dizaines et y le chiffre des unités
Donc Le nombre initial est : 10x + y.

Le nombre renversé est : 10y + x.

Si : x > y, on écrit la différence des deux nombres ainsi :(10 x + y) - (10 y + x)
= 10x + y - 10y - x = 9x - 9y = 9 (x - y)

Si : x<y, on a la différence : (10y + x) - (10x + y)= 9y - 9x= 9 (y - x)
Lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres d'un nombre, la valeur de ce nombre augmente bien ou diminue bien de 9 fois la différence des deux chiffres.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien