Tronc commun Sciences BIOF

La correction Série N°7 : L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Exercice1 : (**) Comparer a et b dans les cas suivants :1

1) $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$ et $a=\sqrt{10}$ 2) $b=70+\sqrt{2}$ et $a=10\sqrt{51}$

3) $a=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$

Corrigé : 1) On compare : $a=\sqrt{10}$ et $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$

On calcul la différence : $a-b=\sqrt{10}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{5\times 2}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1\right)$

$a-b=\sqrt{5}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+1=\sqrt{5}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$

On factorise par : $\sqrt{5}$ et par $\left(\sqrt{2}-1\right)$

Donc : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$

On a : $\sqrt{2}>1$ car $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ et $(1)^2=1$

Donc : $\left(\sqrt{2}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Et on a: $\sqrt{5}>1$ car $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ et $1^2=1$ donc : $\left(\sqrt{5}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Alors : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ et par suite : $a>b$

2) On compare : $a=10\sqrt{51}$ et $b=70+\sqrt{2}$

Puisque a et b sont positifs il suffit de comparer

a^2 et b^2 : on a $a^2=\left(10\sqrt{51}\right)^2=5100$ $b^2=\left(70+\sqrt{2}\right)^2=4900+140\sqrt{2}+2=4902+140\sqrt{2}$

$a^2-b^2=198-140\sqrt{2}=2\left(99-70\sqrt{2}\right)$

Et on a : $(99)^2=9801$ et $\left(70\sqrt{2}\right)^2=9800$

Donc : $99-70\sqrt{2}\in\mathbb{R}^{+*}$

Equivaut à : $2\left(99-70\sqrt{2}\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Alors : $a^2-b^2>0$ donc $a>b$ ($a\in\mathbb{R}^{+}$ et $b\in\mathbb{R}^{+}$)

3) On compare : $a=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$?

$$b-a=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$b-a=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad b-a=\frac{8+2\sqrt{2}-7\sqrt{2}}{14}=\frac{8-5\sqrt{2}}{14}$$

On a : $8>5\sqrt{2}$ car $(8)^2=64$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$ Donc : $8-5\sqrt{2}\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc on a aussi : $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{14}\in\mathbb{R}^{+*}$ Par suite : $b>a$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice2: (**) Soient x et y deux réels tels que : $x<y<3$

1) Montrer que : $x+y-6\prec 0$

2) Comparer $a=x^2-6x+1$ et $b=y^2-6y+1$

Corrigé :1) On a $x<y<3$ donc $x<3$ et $y<3$

Donc **:** $x+y<6$ Equivaut à : $x+y-6<0$

2) $a-b=\left(x^2-6x+1\right)-\left(y^2-6y+1\right)$

$a-b=x^2-6x+1-y^2+6y-1=x^2-y^2-6x+6y$

$a-b=(x-y)(x+y)-6(x-y)=(x-y)(x+y-6)$

On a : $x<y$ donc $x-y\in\mathbb{R}^-$

Et on a : $x+y-6\in\mathbb{R}^-$

Donc : $(x-y)(x+y-6)\in\mathbb{R}^+$

Donc : $a-b\in\mathbb{R}^+$ et par suite $a\geq b$

Exercice3 : (**) 1) Vérifier que $14^2<200<15^2$ et en déduire que ; $1,4<\sqrt{2}<1,5$

2) Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$.

3) En déduire un encadrement de : $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$.

Corrigé :1) On a $14^2=196$ et $15^2=225$ donc : $14^2<200<15^2$

C'est-à-dire : $\sqrt{14^2}<\sqrt{200}<\sqrt{15^2}$

Donc : $\sqrt{14^2}<\sqrt{2\times 100}<\sqrt{15^2}$

C'est-à-dire : $14<\sqrt{2}\times 10<15$

Donc : $14\times\frac{1}{10}<\sqrt{2}\times 10\times\frac{1}{10}<15\times\frac{1}{10}$

Cela équivaut à : $1,4<\sqrt{2}<1,5$

2) On a $22^2=484$ et $23^2=529$ donc : $22^2<500<23^2$ C'est-à-dire : $\sqrt{22^2}<\sqrt{500}<\sqrt{23^2}$.

Donc : $22<\sqrt{5}\times 10<23$

Cela équivaut à : $22\times\frac{1}{10}<\sqrt{5}\times 10\times\frac{1}{10}<23\times\frac{1}{10}$

Par suite : $2,2<\sqrt{5}<2,3$

3) On a $1,4<\sqrt{2}<1,5$ et $2,2<\sqrt{5}<2,3$

Donc : $1,4+2,2<\sqrt{2}+\sqrt{5}<1,5+2,3$.

Donc : $3,6<\sqrt{2}+\sqrt{5}<3,8$

On a : $1,4<\sqrt{2}<1,5$ et $2,2<\sqrt{5}<2,3$

Donc : $1,4\times 2,2<\sqrt{2}\times\sqrt{5}<1,5\times 2,3$

Donc $3,08<\sqrt{10}<3,45$

Exercice4 : (**) $0,75\leq x\leq 0,8$ et $-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{4}$

1) Montrer que : $\frac{1}{35}\leq\frac{1-x}{5-4y}\leq\frac{1}{16}$

2) Montrer que : $\frac{35}{24}$ est une approximation de $\frac{1}{x}$ à $\frac{5}{24}$ prés

Corrigé :1) On a : $\frac{1-x}{5-4y}=(1-x)\times\frac{1}{5-4y}$

On a : $0,75\leq x\leq 0,8$

Donc : $0,2\leq 1-x\leq 0,25$ ①

On a : $-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{4}$ donc $-2\leq 4y\leq 1$

Donc : $-1\leq -4y\leq 2$

Donc : $5-1\leq 5-4y\leq 5+2$

C'est-à-dire : $4\leq 5-4y\leq 7$

Donc : $\frac{1}{7}\leq\frac{1}{5-4y}\leq\frac{1}{4}$ ②

On fait le produit membre a membre de① et ②on trouve : $\frac{1}{7}\times 0,2\leq(1-x)\times\frac{1}{5-4y}\leq\frac{1}{4}\times 0,25$

Donc : $\frac{1}{7}\times\frac{2}{10}\leq\frac{1-x}{5-4y}\leq\frac{1}{4}\times\frac{25}{100}$

Donc : $\frac{1}{7}\times\frac{1}{5}\leq\frac{1-x}{5-4y}\leq\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$

Donc : $\frac{1}{35}\leq\frac{1-x}{5-4y}\leq\frac{1}{16}$

2)Montrons que : $\frac{35}{24}$ est une approximation de $\frac{1}{x}$ à $\frac{5}{24}$ prés

On a : $0,75\leq x\leq 0,8$ donc : $\frac{1}{0,8}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{0,75}$ C'est-à-dire : $\frac{10}{8}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{4}{3}$

Donc : $\frac{10}{8}-\frac{35}{24}\leq\frac{1}{x}-\frac{35}{24}\leq\frac{4}{3}-\frac{35}{24}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{24}\leq\frac{1}{x}-\frac{35}{24}\leq-\frac{3}{24}$

Donc : $\frac{3}{24}\leq-\left(\frac{1}{x}-\frac{35}{24}\right)\leq\frac{5}{24}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{24}\leq\frac{3}{24}\leq\frac{35}{24}-\frac{1}{x}\leq\frac{5}{24}$

Donc : $\left|\frac{35}{24}-\frac{1}{x}\right|\leq\frac{5}{24}$ C'est-à-dire : $\left|\frac{1}{x}-\frac{35}{24}\right|\leq\frac{5}{24}$

Donc : $\frac{35}{24}$ est une approximation de $\frac{1}{x}$ à $\frac{5}{24}$ prés

Exercice5 : (**) Soit a et b deux réels strictement positifs tel que : $a\neq b$

1) Montrer que : $\frac{1}{ab}-\frac{2}{a^2+b^2}=\frac{(a-b)^2}{ab(a^2+b^2)}$ et en déduire que : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}$.

2) Montrer que : $\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}-\frac{1}{ab}=\frac{(a-b)^2}{2a^2b^2}$ et en déduire que : $\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$.

3) Montrer que : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$

4) Déduire un encadrement du nombre $\frac{1}{\sqrt{6}}$ d'amplitude $\frac{1}{60}$

Corrigé :1) Montrons que : $\frac{1}{ab}-\frac{2}{a^2+b^2}=\frac{(a-b)^2}{ab(a^2+b^2)}$ et Déduisons que : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}$.

$$\frac{1}{ab}-\frac{2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab(a^2+b^2)}=\frac{(a-b)^2}{ab(a^2+b^2)}$$

On a : $a>0$ donc : $a^2>0$

On a : $b>0$ donc : $b^2>0$

Donc : $ab>0$ et $a^2+b^2>0$

On a : $a\neq b$ donc : $a-b\neq 0$ donc : $(a-b)^2>0$

Donc : $\frac{1}{ab}-\frac{2}{a^2+b^2}=\frac{(a-b)^2}{ab(a^2+b^2)}>0$ Par suite : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}$

2) Montrons que : $\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}-\frac{1}{ab}=\frac{(a-b)^2}{2a^2b^2}$ et Déduisons que : $\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$.

$$\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}-\frac{1}{ab}=\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}-\frac{2ab}{2a^2b^2}==\frac{a^2+b^2-2ab}{2a^2b^2}=\frac{(a-b)^2}{2a^2b^2}$$

On a : $a\neq b$ donc : $a-b\neq 0$ donc : $(a-b)^2>0$

On a : $a>0$ donc : $a^2>0$ et on a : $b>0$ donc : $b^2>0$ par suite : $2a^2b^2>0$

Donc : $\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}-\frac{1}{ab}=\frac{(a-b)^2}{2a^2b^2}>0$ Par suite : $\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$

3) Montrons que : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$

On a : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}$ et $\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$ donc : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$

4) Déduisons un encadrement du nombre $\frac{1}{\sqrt{6}}$ d'amplitude $\frac{1}{60}$

On a : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$ si a et b sont deux réels strictement positifs tel que : $a\neq b$

Prenons par exemple : $a=\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{3}$ bien sûr on a : a et b sont deux réels strictement positifs et $a\neq b$

Donc : $\frac{2}{\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2}<\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}<\frac{\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2}{2\sqrt{2}^2\sqrt{3}^2}$

Donc : $\frac{2}{5}<\frac{1}{\sqrt{6}}<\frac{5}{12}$ avec : $\frac{5}{12}-\frac{2}{5}=\frac{25-24}{60}=\frac{1}{60}$

Donc : $\frac{2}{5}<\frac{1}{\sqrt{6}}<\frac{5}{12}$ est un encadrement du nombre $\frac{1}{\sqrt{6}}$ d'amplitude $\frac{1}{60}$

Exercice6 : (**) : A) $x\in[2;4]$ et $y\in[1;6]$

Trouver un encadrement de : 1) $x+y$ 2) $x-y$ 3) x^2 4) y^2 5) $x\times y$ 6) $\frac{x}{y}$

B) On sait que : 3 est une valeur approchée du réel x à : 10^{-2} près

Et que : 2 est une valeur approchée du réel y à : 10^{-1} près

Trouver un encadrement de : 1) x 2) y 3) $x+y$

Corrigé : A) $x\in[2;4]$ signifie $2\leq x\leq 4$ et $y\in[1;6]$ Signifie que : $1\leq y\leq 6$

1) $2\leq x\leq 4$ et $1\leq y\leq 6$

Donc : $2+1 \le x+y \le 4+6$
Donc : $3 \le x+y \le 10$
2) $2 \le x \le 4$ et $1 \le y \le 6$
On a $x-y = x+(-y)$ et $1 \le y \le 6$ donc $-6 \le -y \le -1$
Donc $(-6)+2 \le x+(-y) \le -1+4$ c'est-à-dire : $-4 \le x-y \le 3$
3) $2 \le x \le 4$ donc : $4 \le x^2 \le 16$
4) $1 \le y \le 6$ donc : $1 \le y^2 \le 36$
5) $2 \le x \le 4$ et $1 \le y \le 6$ donc : $2\times 1 \le xy \le 4\times 6$ c'est-à-dire : $2 \le xy \le 24$
6) Encadrement de $\frac{x}{y} = x\times\frac{1}{y}$: on a $1 \le y \le 6$ donc : $\frac{1}{6} \le \frac{1}{y} \le 1$
On a : $2 \le x \le 4$ et $\frac{1}{6} \le \frac{1}{y} \le 1$ donc : $2\times\frac{1}{6} \le x\times\frac{1}{y} \le 4\times 1$ c'est-à-dire : $\frac{1}{3} \le \frac{x}{y} \le 4$
B) 1)On sait que : 3 est une valeur approchée du réel x à : 10^{-2} près
Donc : $|x-3| < 10^{-2}$ signifie que : $-10^{-2} \le x-3 \le 10^{-2}$ c'est-à-dire : $3-10^{-2} \le x \le 3+10^{-2}$
2)On sait que : 2 est une valeur approchée du réel y à : 10^{-1} près
Donc : $|y-2| < 10^{-1}$ signifie que : $-10^{-1} \le y-2 \le 10^{-1}$ c'est-à-dire : $2-10^{-1} \le y \le 2+10^{-1}$
3) Encadrement de $x+y$:
$3-10^{-2} \le x \le 3+10^{-2}$ et $2-10^{-1} \le y \le 2+10^{-1}$
Donc : $3-10^{-2}+2-10^{-1} \le x+y \le 3+10^{-2}+2+10^{-1}$
Donc : $5-0,01-0,1 \le x+y \le 5+0,01+0,1$
Donc : $4,89 \le x+y \le 5,11$

Exercice7 : (***) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$
Le nombre $1,12$ est une valeur approchée décimale du réel x par excès à 10^{-2} près
Le nombre $1,11$ est une valeur approchée décimale du réel y par défaut à 10^{-2} près
Montrer que : $1,244$ est une valeur approchée du réel xy à 12×10^{-3} près
Corrigé : $1,12$ Est une valeur approchée décimale du réel x par excès à 10^{-2} près
Signifie : $1,11 \le x < 1,12$ (1)
$1,11$ Est une valeur approchée décimale du réel y par défaut à 10^{-2} près signifie : $1,11 \le y < 1,12$ (2)
De (1) et (2) nous déduisons que : $(1,11)^2 \le xy < (1,12)^2$ d'où : $1,2321 \le xy < 1,2544$
Par suite : $1,2321-1.244 \le xy-1.244 \le 1,2544-1.244$
Cela équivaut à : $-0,012 \le xy-1.244 \le 0,012$
Cela équivaut à : $|xy-1.244| \le 0,012$
Cela signifie que : $1,244$ est une valeur approchée du réel xy à 12×10^{-3} près

Exercice8 : Soit $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
1) Déterminer une racine évidente de $P(x)$
2) Déterminer alors la factorisation de P.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x) > 0$
Corrigé :1) On remarque que $P(1)=0$ donc 1 est une racine évidente de $P(x)$.
2)Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que $P(x)=(x-1)Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il
Existe trois réels a, b et c tels que $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

Or, $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=1 \\ b-a=-1 \\ c-b=-4 \\ -c=4 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases}$

Donc : $P(x)=(x-1)(x^2-4)=(x-1)(x^2-2^2)=(x-1)(x-2)(x+2)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x)>0$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de P(x) > 0 est : $S=]-2,1[\cup]2,+\infty[$

Exercice9 : (***) Soient a et b deux réels tels que : $a\geq 2$ et $b\leq 5$ et $b-a=2$

1)Montrer que : $2\leq a\leq 3$ et $4\leq b\leq 5$

2)Calculer : $A=\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(b-4)^2}$.

3)Calculer : $B=|a+b-6|+|a+b-8|$.

Corrigé :

1) a) Pour montrer que $2\leq a\leq 3$ il suffit de montrer que : $a\leq 3$ car : $a\geq 2$.

On sait que : $b\leq 5$ et $b-a=2$ ce qui signifie que $b=a+2$

Donc : $a+2\leq 5$ par suite : $a\leq 3$

Conclusion : $2\leq a\leq 3$

b) Pour montrer que $4\leq b\leq 5$ il suffit de montrer que : $4\leq b$ car $b\leq 5$.

On sait que : $a\geq 2$ et $b-a=2$ ce qui signifie que : $a=b-2$.

Donc : $b-2\geq 2$: par suite $4\leq b$

Conclusion : $4\leq b\leq 5$.

2) On a: $A=\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(b-4)^2}=|a-3|+|b-4|$

Or on a : $a\leq 3$ donc : $a-3\leq 0$

On a aussi : $4\leq b$ donc : $b-4\geq 0$

Donc : $A=|a-3|+|b-4|=-(a-3)+(b-4)$ Car $a-3\leq 0$ et $b-4\geq 0$

Donc : $A=-a+3+b-4=(b-a)-1=2-1=1$ Car $b-a=2$

3) Calculons : $B=|a+b-6|+|a+b-8|$

On a : $2\leq a\leq 3$ et $4\leq b\leq 5$ donc : $6\leq a+b\leq 8$.

Donc: $a+b\leq 8$ et $6\leq a+b$

Qui signifie que: $a+b-8\leq 0$ et $a+b-6\geq 0$

Donc : $|a+b-6|=a+b-6$ et $|a+b-8|=-(a+b-8)=-a-b+8$

Par suite : $B=a+b-6-a-b+8=2$.

Exercice10 : (**) 1) Résoudre les équations : a) $|x-2|=\frac{1}{2}$ b) $|2x-9|=-\frac{3}{2}$ c) $|x|=|3x-5|$

2) Résoudre les inéquations : a) $|-x+1|\leq 3$ b) $|x-9|\geq\frac{1}{2}$ c) $1\leq|x+1|<2$

Corrigé : 1) a) Résolution de l'équation : $|x-2|=\frac{1}{2}$

On a les équivalences suivantes :

$|x-2|=\frac{1}{2}$ Signifie que : $x-2=\frac{1}{2}$ ou $x-2=-\frac{1}{2}$

Signifie que : $x=\frac{1}{2}+2$ ou $x=2-\frac{1}{2}$

Signifie que : $x=\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{3}{2}$

Donc : $S=\left\{\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right\}$

b) Résolution de l'équation : $|2x-9|=-\frac{3}{2}$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative
Donc : $S=\varnothing$

c) Résolution de l'équation : $|x|=|3x-5|$

Égalité de deux valeurs absolues :
Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b
Cela découle du fait que par exemple |3| = |−3|

$|x|=|3x-5|$ Signifie que : $x=3x-5$ ou $x=-(3x-5)$

Signifie que : $x-3x=-5$ ou $x+3x=5$
Signifie que : $-2x=-5$ ou $4x=5$
Signifie que : $x=\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{5}{4}$

Donc : $S=\left\{\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right\}$

5)a) Résolution de l'inéquation : $|-x+1|\leq 3$

Règle : $|x-a|\leq r$ **est équivalente à :** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|-x+1|\leq 3$ Signifie que : $-3\leq -x+1\leq 3$

Signifie que : $-3-1\leq -x+1-1\leq 3-1$
Signifie que : $-4\leq -x\leq 2$
Signifie que : $-2\leq x\leq 4$
Donc : $S=[-2;4]$

b) Résolution de l'inéquation : $|x-9|\geq\frac{1}{2}$

Règle : $|x-a|>r$ **est équivalente à :** $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$|x-9|\geq\frac{1}{2}$ Signifie que : $x-9\geq\frac{1}{2}$ ou $x-9\leq-\frac{1}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

Signifie que : $x \geq \frac{1}{2}+9$ ou $x \leq -\frac{1}{2}+9$

Signifie que : $x \geq \frac{19}{2}$ ou $x \leq -\frac{17}{2}$

Donc : $S = \left]-\infty; -\frac{17}{2}\right] \cup \left[\frac{19}{2}; +\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $1 \leq |x+1| < 2$

$1 \leq |x+1| < 2$ Signifie que : $|x+1| < 2$ et $|x+1| \geq 1$

• Résolution de l'inéquation : $|x+1| < 2$

$|x+1| < 2$ Signifie que : $-2 < x+1 < 2$

Signifie que : $-2-1 < x+1-1 < 2-1$

Signifie que : $-3 < x < 1$

Donc : $S_1 =]-3;1[$

• Résolution de l'inéquation : $|x+1| \geq 1$

$|x+1| \geq 1$ Signifie que : $x+1 \geq 1$ ou $x+1 \leq -1$

Signifie que : $x \geq 0$ ou $x \leq -2$

Donc : $S_2 =]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$

Finalement on a : $S = S_1 \cap S_2 =]-3;1[\cap \left(]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[\right)$

Donc : $S =]-3;-2] \cup [0;1[$

Exercice11 : (**) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\left|x+\sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}$; Trouver l'intervalle qui correspond à cette inégalité.

Corrigé : ($x \in \mathbb{R}$ et $\left|x+\sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}$)

Signifie ($x \in \mathbb{R}$ et $|x-c| < r$) avec : $c = -\sqrt{2}$ et $r = \frac{1}{2}$

Donc : ($x \in \mathbb{R}$ et $\left|x+\sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}$) signifie (x appartient à l'intervalle ouvert de centre $c = -\sqrt{2}$ et de rayon $r = \frac{1}{2}$ C'est-à-dire : $x \in \left]-\sqrt{2}-\frac{1}{2}, -\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right[$

Exercice12 : (**) Soient x et y deux réels tels que : $\left|2x-\frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$ et $\left|y-\frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4}$

1) Montrer que : x et y appartiennent à l'intervalle : $\left]\frac{1}{2};1\right[$

2) a) Vérifier que : $xy-3x-2y-1 = (x-2)(y-3)-7$

b) En déduire que : $-5 < xy-3x-2y-1 < -\frac{13}{4}$

Corrigé :1) a) $\left|2x-\frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$ Signifie que : $-\frac{1}{2} < 2x-\frac{3}{2} < \frac{1}{2}$

Signifie que : $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2} < 2x < \frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ Signifie que : $1 < 2x < 2$

Signifie que : $1 \times \frac{1}{2} < 2x \times \frac{1}{2} < 2 \times \frac{1}{2}$ Signifie que : $1 \times \frac{1}{2} < 2x \times \frac{1}{2} < 2 \times \frac{1}{2}$

Signifie que : $\frac{1}{2} < x < 1$ Signifie que : $x \in \left]\frac{1}{2};1\right[$

b) $\left|y-\frac{3}{4}\right|<\frac{1}{4}$ Signifie que : $-\frac{1}{4}<y-\frac{3}{4}<\frac{1}{4}$

Signifie que : $-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}<y-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}<\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

Signifie que : $\frac{1}{2}<y<1$

Signifie que : $y\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

2) a) Vérifions que : $xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

$xy-3x-2y-1=xy-2y-3x-1=(x-2)y-3x+6-6-1$

$xy-3x-2y-1=(x-2)y-3(x-2)-7$

$xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

Remarque : la méthode la plus simple est de développer : $(x-2)(y-3)-7$

Est de trouver : $xy-3x-2y-1$

b) Déduisons que : $-5<xy-3x-2y-1<-\frac{13}{4}$

On a : $xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

Et on a : $\frac{1}{2}<x<1$ et $\frac{1}{2}<y<1$ donc : $\frac{1}{2}-2<x-2<1-2$ et $\frac{1}{2}-3<y-3<1-3$

Donc : $-\frac{3}{2}<x-2<-1$ et $-\frac{5}{2}<y-3<-2$

Donc : $1<-(x-2)<\frac{3}{2}$ et $2<-(y-3)<\frac{5}{2}$

Donc : $1\times 2<\left(-(x-2)\right)\times\left(-(y-3)\right)<\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}$

Donc : $2<(x-2)(y-3)<\frac{15}{4}$ Alors : $\boxed{-5<xy-3x-2y-1<-\frac{13}{4}}$

Exercice13 : (**) Soient $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$ tel que : $|x-4|\leq 1$ et $|y+3|\leq 2$

1) Donner un encadrement de chacun des nombres suivants : x ; y ; $x-y$; $x+y$

2) On pose : $A=|x+y+12|+|x+y-12|$ et $B=|x-y+9|+|x-y-11|$

Écrire sans utiliser le symbole de la valeur absoute les deux nombres A et B .

Corrigé : 1) $|x-4|\leq 1$ signifie $-1\leq x-4\leq 1$

Signifie $-1+4\leq x-4+4\leq 1+4$

Signifie $3\leq x\leq 5$

$|y+3|\leq 2$ Signifie $-2\leq y+3\leq 2$

Signifie $-2-3\leq y+3-3\leq 2-3$

Signifie $-5\leq y\leq -1$

On a : $3\leq x\leq 5$ et $-5\leq y\leq -1$ donc : $3+-5\leq x+y\leq 5+-1$

Donc : $\boxed{-2\leq x+y\leq 4}$

On a : $3\leq x\leq 5$ et $-5\leq y\leq -1$ donc : $3\leq x\leq 5$ et $1\leq -y\leq 5$

Donc : $3+1\leq x-y\leq 5+5$

Donc : $\boxed{4\leq x-y\leq 10}$

2) On pose : $A=|x+y+12|+|x+y-12|$ et $B=|x-y+9|+|x-y-11|$

a) On a : $-2\leq x+y\leq 4$ donc : $-2+12\leq x+y+12\leq 4+12$ et $-2-12\leq x+y-12\leq 4-12$

Donc : $10 \leq x+y+12 \leq 16$ et $-14 \leq x+y-12 \leq -8$

Donc : $x+y+12>0$ et $x+y-12<0$

Donc : $A=|x+y+12|+|x+y-12|=(x+y+12)-(x+y-12)$

Donc : $A=x+y+12-x-y+12=24$

b) On a : $4 \leq x-y \leq 10$ donc : $4+9 \leq x-y+9 \leq 10+9$ et $4-11 \leq x-y-11 \leq 10-11$

Donc : $13 \leq x-y+9 \leq 19$ et $-7 \leq x-y-11 \leq -1$

Donc : $x-y+9>0$ et $x-y-11<0$

Donc : $B=|x-y+9|+|x-y-11|=(x-y+9)-(x-y-11)$

Donc : $B=x-y+9-x+y+11=20$

Exercice14 : (**) Soient $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ tel que : $1<x<y$; on pose : $A=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ et $B=\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}$

1) Préciser le signe de A et B

2) a) Montrer que : $\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

b) Déduire que : $0<\frac{A}{B}<1$ puis comparer A et B

3) Application : comparer : $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{6}$

Corrigé : 1) Précisons le signe de A et B

On a : $1<x<y$ donc : $\sqrt{x}<\sqrt{y}$

Donc : $\sqrt{x}-\sqrt{y}<0$ c'est-à-dire : $\boxed{A<0}$

On a : $1<x<y$ donc : $0<x-1<y-1$

Donc : $\sqrt{x-1}<\sqrt{y-1}$

Donc : $\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}<0$ c'est-à-dire : $\boxed{B<0}$

2) a) Montrons que : $\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x-1}^2-\sqrt{y-1}^2}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-1-y+1}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\cancel{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}$$

Donc : $\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

b) Déduisons que : $0<\frac{A}{B}<1$ puis comparer A et B

On a : $A<0$ et $B<0$ donc : $0<\frac{A}{B}$

Montrons que : $\frac{A}{B}<1$

$1-\frac{A}{B}=1-\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$1-\frac{A}{B}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{y}-\sqrt{y-1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ Mais on a : $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}>0$ eT $\sqrt{y}-\sqrt{y-1}>0$ ET $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$

Donc : $1-\frac{A}{B}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{y}-\sqrt{y-1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0$

Par suite : $0<\frac{A}{B}<1$ et donc : $\frac{A}{B}\times B>1\times B$ Car $B<0$

Donc : $\boxed{A>B}$

3) Application : comparons : $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{6}$

On a : $A>B$ C'est-à-dire : $\sqrt{x}-\sqrt{x}>\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}$ si $1<x<y$

Prenons par exemple : $1<3<6$

On a donc : $\sqrt{3}-\sqrt{6}>\sqrt{3-1}-\sqrt{6-1}$

On a donc : $\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{6}>\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

Exercice15 : (***) On donne : $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$

1) Montrer que : $\frac{1+x}{1+2x}-(1-x)=\frac{2x^2}{1+2x}$

2) Montrer que : $\frac{2}{1+2x}\leq 6$ et déduire que : $\left|\frac{1+x}{1+2x}-(1-x)\right|\leq 6x^2$

2) Déduire que : $\frac{4}{5}$ est une valeur approximative du nombre $\frac{1,2}{1,4}$ par la précision : $2,4\times 10^{-1}$

Corrigé : 1) Montrons que : $\frac{1+x}{1+2x}-(1-x)=\frac{2x^2}{1+2x}$

Soit : $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$

$$\frac{1+x}{1+2x}-(1-x)=\frac{1+x-(1-x)(1+2x)}{1+2x}$$

$$=\frac{1+x-\left(1+2x-x-2x^2\right)}{1+2x}$$

$$=\frac{1+x-\left(1+x-2x^2\right)}{1+2x}$$

$$=\frac{1+x-1-x+2x^2}{1+2x}$$

$$=\frac{2x^2}{1+2x}$$

2) Montrons que : $\frac{2}{1+2x}\leq 6$

Soit : $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$

$$\frac{2}{1+2x}-6=\frac{2-6(1+2x)}{1+2x}=\frac{2-6-12x}{1+2x}=\frac{-4-12x}{1+2x}=\frac{-4(1+3x)}{1+2x}$$

On a : $x \in \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$ donc : $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$ alors $-\frac{2}{3} \leq 2x \leq \frac{2}{3}$

Donc : $-\frac{2}{3}+1 \leq 2x+1 \leq \frac{2}{3}+1$

Donc : $\frac{1}{3} \leq 2x+1 \leq \frac{5}{3}$ et alors : $0 < 2x+1$ ①

D'autre part, on a : $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$ donc $-1 \leq 3x \leq 1$ alors : $0 \leq 3x+1 \leq 2$

Et par suite : $-4(3x+1) \leq 0$ ②

D'après ①et ②on en déduit que : $\frac{2}{1+2x} - 6 \leq 0$

Par conséquent : $\frac{2}{1+2x} \leq 6$

Déduisons que : $\left|\frac{1+x}{1+2x} - (1-x)\right| \leq 6x^2$

On a : $\frac{2}{1+2x} \leq 6$ et comme : $-6 \leq \frac{2}{1+2x}$ car $0 < 2x+1$ alors $-6 \leq \frac{2}{1+2x} \leq 6$

Donc : $\left|\frac{2}{1+2x}\right| \leq 6$

De plus : $\left|\frac{2}{1+2x}\right| x^2 \leq 6x^2$ et comme $\left|x^2\right| = x^2$ alors : $\left|\frac{2x^2}{1+2x}\right| \leq 6x^2$

D'autre part, on a : $\frac{1+x}{1+2x} - (1-x) = \frac{2x^2}{1+2x}$

Donc on obtient : $\left|\frac{1+x}{1+2x} - (1-x)\right| = \left|\frac{2x^2}{1+2x}\right|$ et on sait que : $\left|\frac{2x^2}{1+2x}\right| \leq 6x^2$

Donc : $\left|\frac{1+x}{1+2x} - (1-x)\right| \leq 6x^2$

3) On prend $x = 0,2$ alors on obtient d'après l'inégalité précèdent

Donc : $\left|\frac{1+0,2}{1+2\times 0,2} - (1-0,2)\right| \leq 6\times(0,2)^2$

Donc : $\left|\frac{1,2}{1,4} - 0,8\right| \leq 0,24$

Donc : $\left|\frac{1,2}{1,4} - \frac{4}{5}\right| \leq 0,24$

Donc : $\frac{4}{5}$ est une valeur approximative du nombre $\frac{1,2}{1,4}$ par la précision : $2,4\times 10^{-1}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB