Tronc commun Sciences BIOF

La correction Série N°6 : L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Exercice1 : (*) I) Comparer les réels suivants :

1) $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$ 2) $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$ 3) $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

Corrigé : Comparer a et b revient à étudier le signe de : $a-b$.

1) On compare $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$: $\frac{-15}{7}-\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{-15}{7}+\frac{15}{4}=\frac{-60+105}{28}=\frac{45}{28}>0$

Donc $\frac{-15}{7}>-\frac{15}{4}$ ou $\frac{-15}{7}\geq-\frac{15}{4}$

2) On compare $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$: $\frac{-12}{7}-\frac{15}{4}=\frac{-48-105}{7}=\frac{-165}{28}<0$

Donc : $\frac{-12}{7}<\frac{15}{4}$ ou $\frac{-12}{7}\leq\frac{15}{4}$

3) On compare $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$: On a : $\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$ et $50-20=30>0$

Et puisque $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$ sont positifs alors : $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$

Exercice2 : A) Soient a et b deux réels tel que : $a\leq b$

Comparer : 1) $5a$ et $5b$ 2) $-13a$ et $-13b$

B) Soient a et b deux réels strictement positifs tel que $a\leq b$ Comparer :

1) a^2 et b^2 2) $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ 3) $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

C) Soient a et b deux réels négatifs tel que : $a\leq b$; Comparer : a^2 et b^2

Corrigé : Soient a et b deux réels tel que : $a\leq b$

A) On compare $5a$ et $5b$: on a : $5a-5b=5(a-b)$ Et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

Et on a : $5>0$ donc : $5a\leq 5b$.

2) On compare $-13a$ et $-13b$:

On a : $-13a-(-13b)=-13a+13b=-13(a-b)$

Et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

Et on a aussi : $-13<0$ donc $-13a\geq-13b$

B) Soient a et b deux réels strictement positifs

Tel que : $a\leq b$

1) On compare a^2 et b^2 :

On a : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ et on a : a et b deux réels strictement positifs donc $a+b\geq 0$

Et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

Alors : $(a-b)(a+b)\leq 0$ D'où $a^2\leq b^2$

2) On compare : $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$: $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

On a : $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$.

Et puisque $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$ car c'est la somme de deux nombres positifs

Donc $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leq 0$ d'où : $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

3) On compare $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$: on a : $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$

Et on a : $a \le b$ alors $b-a \ge 0$

Et puisque : a et b deux réels strictement positifs alors $ab > 0$ car c'est le produit de deux nombres positifs

Donc : $\frac{b-a}{ab} \ge 0$ d'où : $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

C) Soient a et b deux réels strictement négatifs tel que $a \le b$ On compare : a^2 et b^2 :

On a : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Et on a : a et b deux réels négatifs donc $a+b \le 0$

Et puisque $a \le b$ alors $a-b \le 0$ par suite : $(a-b)(a+b) \ge 0$ D'où $a^2 \ge b^2$.

Exercice3 : Comparer a et b dans les cas suivants:

1) $a = 2-\sqrt{5}$ et $b = \frac{-1}{\sqrt{5}+2}$

2) $a = \frac{2x^2}{1+x^4}$ et $b = 1$

3) $a = 2-\sqrt{5}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

Corrigé :1) $a = 2-\sqrt{5} = \frac{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{2+\sqrt{5}} = \frac{2^2-\sqrt{5}^2}{2+\sqrt{5}} = \frac{4-5}{2+\sqrt{5}} = \frac{-1}{2+\sqrt{5}}$

Donc : $a = b$

2) On calcul la différence : $a-b$

$$a-b = \frac{2x^2}{1+x^4} - 1 = \frac{2x^2-1-x^4}{1+x^4} = -\frac{x^4-2x^2+1}{1+x^4} = -\frac{(x^2)^2-2x^2+1}{1+x^4} = -\frac{(x^2-1)^2}{1+x^4}$$

Or : $x^4 \ge 0$ car $x^4 = (x^2)^2$ et le carré est toujours positif donc : $x^4+1 \ge 1 > 0$

On a aussi : $(x^2-1)^2 \ge 0$ car le carré est toujours positif

Donc : $-\frac{(x^2-1)^2}{1+x^4} \le 0$

Par suite : $\frac{2x^2}{1+x^4} \le 1$

3) Comparons : $a = 2-\sqrt{5}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

On compare : $\sqrt{5}$ et 2 : on a $(\sqrt{5})^2 = 5$ et $(2)^2 = 4$ donc : $\sqrt{5} > 2$ et par suite $a = (2-\sqrt{5}) \in \mathbb{R}^{-*}$

Et on a : $b = \frac{1}{\sqrt{2}+1} > 0$

Par suite : $a < b$

Exercice4 : (**) Soient a et b deux nombres réels tels que : $a^2+b^2=2$

1) Montrer que : $(a+b)^2 = 2(1+ab)$

2) En déduire que : si a et b sont positifs alors $a+b > \sqrt{2}$

Corrigé : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $a^2+b^2=2$

1) On a : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = (a^2+b^2)+2ab = 2+2ab$

Donc : $(a+b)^2 = 2(1+ab)$

2) On a $b \ge 0$ et $a \ge 0$: équivaut $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$

Donc : $a+b\geq 0$ et $ab\geq 0$ par suite : $1+ab>1$

Et puisque : $(a+b)^2=2(1+ab)$ alors $(a+b)^2>2$

Implique : $a+b>\sqrt{2}$ car $a+b\geq 0$

Exercice5 : (***) Soient a et b deux nombres réels non nuls qui ont le même signe

Montrer que : $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

Corrigé : Soient a et b deux nombres réels non nuls qui ont le même signe

Etudions le signe de : $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-4$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-4=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1-4=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}$$

On a : $(a-b)^2\geq 0$ pour tous a et b de $\mathbb{R}$; et comme a et b non nuls qui ont le même signe

Alors : $ab>0$

Donc : $\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$ ce qui signifie que $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-4\geq 0$

Par suite : $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$ si a et b sont deux nombres réels non nuls qui ont le même signe

Exercice6 : (**) Soient : a ; b et c des réels strictement positifs tel que : $\frac{a}{b}\leq 1$.

Montrer que : $\frac{a}{b}\leq\frac{a+c}{b+c}$.

Corrigé : Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$ revient à étudier le signe de : $\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}$.

$$\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+c)-a(b+c)}{b(b+c)}=\frac{ba+bc-ab-ac}{b(b+c)}$$

Donc : $\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ac}{b(b+c)}=\frac{c(b-a)}{b(b+c)}$ et puisque : b et c des réels strictement positifs

Alors : $b(b+c)\succ 0$ et on a aussi : $\frac{a}{b}\leq 1$

Donc: $b\times\frac{a}{b}\leq b\times 1$ c'est à dire: $a\leq b$

Par suite: $0\leq b-a$.

Donc: $\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}\geq 0$ et par conséquent: $\frac{a+c}{b+c}\geq\frac{a}{b}$.

Exercice7 : (**) Soient x et y deux nombres réels tel que : $x<y$

Et a et b deux nombres réels tel que $a>0$ et $b>0$ et $a+b=1$

Montrer que : $x<ax+by<y$

Corrigé :

Pour montrer que : $x<ax+by<y$ on va montrer que : $ax+by<y$ ① et $x<ax+by$ ②

a) Montrons que : $ax+by<y$ ①

Pour montrer que : $ax+by<y$ ① on va montrer que : $y-(ax+by)>0$?

$$\begin{aligned} y-(ax+by)&=y-ax-by\\ &=y-by-ax\\ &=y(1-b)-ax \end{aligned}$$
or on a: $a+b=1$ donc: $a=1-b$

$= ya - ax$

$= (y - x)a$

Or on a: $a > 0$ et $x < y$ donc : $0 < y - x$

Alors : $y - (ax + by) > 0$

Par suite : $ax + by < y$ (1)

b) Montrons que : $x < ax + by$ (2)

Pour montrer que : $x < ax + by$ (2) on va montrer que : $ax + by - x > 0$?

$ax + by - x = (ax - x) + by$

$= x(a - 1) + by$ or on a: $a + b = 1$ donc: $a - 1 = -b$

$= -bx + by$

$= (y - x)b$

Or on a: $b > 0$ et: $0 < y - x$

Alors : $ax + by - x > 0$

Par suite : $x < ax + by$ (2)

Conclusion : de (1) et (2) on déduit que : $x < ax + by < y$

Exercice8 : (**) 1) Soient $a > 0$ et $b < 0$; on pose : $A = \frac{9a - 4b}{3a - 2b}$:

Montrer que : $2 < A < 3$

2) Soient $a > 0$ et $b > 0$; on pose : $B = \frac{12a + 10b}{3a + 2b}$

Montrer que : $4 < B < 5$

Corrigé : 1) Soient $a > 0$ et $b < 0$ et $A = \frac{9a - 4b}{3a - 2b}$:

Pour montrer que : $2 < A < 3$ on va montrer que : $2 < A$ (1) et $A < 3$ (2)

a) Montrons que : $2 < A$ (1)

Pour montrer que : $2 < A$ (1) on va montrer que : $A - 2 > 0$?

$$A - 2 = \frac{9a - 4b}{3a - 2b} - 2 = \frac{9a - 4b - 2(3a - 2b)}{3a - 2b} = \frac{9a - 4b - 6a + 4b}{3a - 2b} = \frac{3a}{3a - 2b}$$

Puisque on a : $a > 0$ alors : $3a > 0$ (4)

Puisque on a : $b < 0$ alors : $2b < 0$ et donc : $-2b > 0$

Donc : $3a - 2b = 3a + (-2b) > 0$ (5)

De : (4) et (5) on déduit que : $\frac{3a}{3a - 2b} > 0$

Donc : $A - 2 > 0$

Par suite : $2 < A$ (1)

b) Montrons que : $A < 3$ (2)

Pour montrer que : $A < 3$ on va montrer que : $3 - A > 0$?

$$3 - A = 3 - \frac{9a - 4b}{3a - 2b} = \frac{9a - 6b - (9a - 4b)}{3a - 2b} = \frac{9a - 6b - 9a + 4b}{3a - 2b} = \frac{-2b}{3a - 2b}$$

Puisque on a : $3a - 2b = 3a + (-2b) > 0$ (5)(déjà montrer)

Et Puisque on a : $b < 0$ alors : $2b < 0$ et donc : $-2b > 0$

On déduit que : $\frac{-2b}{3a - 2b} > 0$

Donc : $3-A>0$

Par suite : $A<3$ ②

Conclusion : De ① et ② on déduit que : $2<A<3$

2) Soient $a>0$ et $b>0$ et $B=\frac{12a+10b}{3a+2b}$

Pour montrer que : $4<B<5$ on va montrer que : $4<B$ ① et $B<5$ ②

a) Montrons que : $4<B$ ①

Pour montrer que : $4<B$ ① on va montrer que : $B-4>0$?

$$B-4=\frac{12a+10b}{3a+2b}-4=\frac{12a+10b-4(3a+2b)}{3a+2b}=\frac{12a+10b-12a-8b}{3a+2b}=\frac{2b}{3a+2b}$$

Puisque on a : $a>0$ alors : $3a>0$ ④

Puisque on a : $b>0$ alors : $2b>0$

Donc : $3a+2b>0$ ⑤

De : ④ et ⑤ on déduit que : $\frac{2b}{3a+2b}>0$

Donc : $B-4>0$

Par suite : $4<B$ ①

b) Montrons que : $B<5$ ②

Pour montrer que : $B<5$ on va montrer que : $5-B>0$?

$$5-B=5-\frac{12a+10b}{3a+2b}=\frac{15a+10b-(12a+10b)}{3a+2b}=\frac{15a+10b-12a-10b}{3a+2b}=\frac{3a}{3a+2b}$$

Puisque on a : $3a+2b>0$ ⑤(déjà montrer)

Et Puisque on a : $3a>0$ ④

On déduit que : $\frac{3a}{3a+2b}>0$

Donc : $5-B>0$

Par suite : $B<5$ ②

Conclusion : De ① et ② on déduit que : $4<B<5$

Exercice9 : (**) Soient : $1\leq x\leq 3$ et $\frac{1}{2}\leq y\leq 1$. On pose : $E=x^2-y^2+2x+2y$

1) Trouver un encadrement de E : et déterminer son amplitude.

2) Vérifier que : $E=(x+y)(x-y+2)$ et en déduire un autre encadrement de et comparer les E amplitudes des deux encadrements.

3) En déduire que : $4\leq E\leq 9$.

Corrigé :1) Encadrement de : $E=x^2-y^2+x+y$

On a : $1\leq x\leq 3$ et $\frac{1}{2}\leq y\leq 1$ donc : $1\leq x^2\leq 9$ et $\frac{1}{4}\leq y^2\leq 1$ donc : $-1\leq -y^2\leq -\frac{1}{4}$

Et on a : $2\leq 2x\leq 6$ et $1\leq 2y\leq 2$

Donc : $1+-1+2+2\leq x^2-y^2+x+y\leq 9+\left(-\frac{1}{4}\right)+6+2$

Ce qui signifie que : $4\leq E\leq \frac{67}{4}$ (α)

Son amplitude est : $\frac{67}{4}-4=\frac{51}{4}=12,75$

2) On a : $E=x^2-y^2+2x+2y$

Donc : $E=(x+y)(x-y)+2(x+y)$

Et par suite : $E=(x+y)(x-y+2)$

Déduction : on a : $1\le x\le 3$ et $\frac{1}{2}\le y\le 1$.

Donc : $\frac{3}{2}\le x+y\le 4\ (1)$

Et on a : $-1\le -y\le -\frac{1}{2}$ donc : $1-1\le x-y\le 3-\frac{1}{2}$ ce qui signifie que : $0\le x-y\le \frac{5}{2}$

Par suite on a : $2\le x-y+2\le \frac{9}{4}\ (2)$

De (1) et (2) on déduit que : $3\le (x+y)(x-y+2)\le 9$

Ce qui signifie que : E donc c'est un autre encadrement de $(\beta)\ 3\le E\le 9$

Son amplitude est : $9-3=6<12,75$

Exercice10 : (*) Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$:

$0...]0;5]$; $5...]0;5]$; $2...[1;5]$; $1....[2;+\infty[$ $-1....]-\infty;0]$; $\{0;1;2\}...[0;3[$

$\{0;1;2\}...[0;2[$; $]0;3[....\mathbb{Q}$.

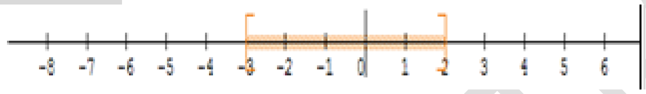
Corrigé : $0\notin]0;5]$; $5\in]0;5]$; $2\in [1;5]$; $1\notin [2;+\infty[$; $-1\in]-\infty;0]$; $\{0;1;2\}\subset [0;3[$; $\{0;1;2\}\not\subset [0;2[$;

$]0;3[\not\subset \mathbb{Q}$ car $\sqrt{2}\in]0;3[$ et $\sqrt{2}\notin \mathbb{Q}$

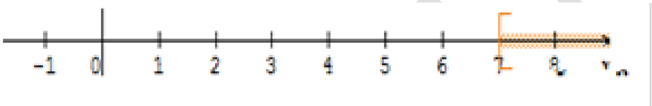
Exercice11 : (*) Représenter les ensembles suivants sur la droite réelle puis les écrire à l'aide d'intervalles :

a) $-3\le x\le 2$ b) $x\ge 7$ c) $1>x$ d) $-4\le x<1$ e) $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$.

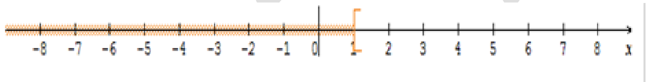
Corrigé : a) $-3\le x\le 2$ Signifie que : $x\in [-3;2]$



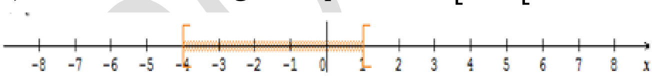
b) $x\ge 7$ Signifie que : $x\in [7;+\infty[$



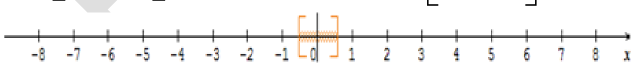
c) $1>x$ Signifie que : $x\in]-\infty;1[$



d) $-4\le x<1$ Signifie que : $x\in [-4;1[$



e) $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$ Signifie que : $x\in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$



Exercice12 : (*) Calculer $I\cap J$ et $I\cup J$ dans les cas suivants :1) $I=]-3,7]$ et $J=[-1,+\infty[$

2) $I=]-\infty,5[$ et $J=[4;10]$ 3) $I=[0,10[$ et $J=[-5;-1]$

4) $I=\left[\frac{-2}{3},2\right]$ et $J=\left]-1,\frac{3}{2}\right[$

Corrigé : 1) $I\cap J=]-1,7]$ et $I\cup J=]-3;+\infty[$ 2) $I\cap J=[4,5[$ et $I\cup J=]-\infty;10]$

3) $I\cap J=\varnothing$ et $I\cup J=]-1,2]$ 4) $I\cap J=\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ et $I\cup J=[-5;10]$

Exercice13 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(x-5)(x-2)<(x-5)(2x-3)$

2) $(3x-2)^2>(x-1)^2$

3) $\dfrac{3x-2}{x+5}\geq 0$

4) $\dfrac{4}{x+1}\leq 3$

Corrigé : 1) L'inéquation n'est pas de 1er degré et le second terme de l'inéquation n'est pas nul. Il faut pouvoir revenir à une forme factorisée avec un second terme nul.
On annule le second terme. L'inéquation devient alors :

$(x-5)(x-2)<(x-5)(2x-3)$ Equivaut à : $(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-3)<0$

On factorise par : $(x-5)$

Equivaut à : $(x-5)[(x-2)-(2x-3)]<0$

Equivaut à : $(x-5)(x-2-2x+3)<0$

Equivaut à : $(x-5)(-x+1)<0$

Nous sommes revenus à la forme factorisée.
On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières
$x-5=0$ Equivaut à : $x=5$
$-x+1=0$ Equivaut à : $x=1$
On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(x-5)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En conclusion pour que le produit soit strictement négatif, nous avons deux possibilités : $x<1$ ou $x>5$
La solution est donc : $S=]-\infty,1[\cup]5,+\infty[$

2) $(3x-2)^2>(x-1)^2$

Remarque : On pourrait être tenté de supprimer les carrés de chaque côté de la relation d'ordre, c'est à dire d'écrire : 3x − 2 > x − 1. On obtiendrait une partie de la solution, mais pas toute la solution.
En supprimant les carrés, on change l'énoncé.
On procédera donc de la même manière que l'exemple précédent. :

$(3x-2)^2>(x-1)^2$ Equivaut à : $(3x-2)^2-(x-1)^2>0$

Equivaut à : $[(3x-2)-(x-1)][(3x-2)+(x-1)]>0$

Equivaut à : $(3x-2-x+1)(3x-2+x-1)>0$

Equivaut à : $(2x-1)(4x-3)>0$

Nous sommes revenus à la forme factorisée.
On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières

$2x-1=0$ Equivaut à : $x=\dfrac{1}{2}$

$4x-3=0$ Equivaut à : $x=\dfrac{3}{4}$

On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(2x-1)(4x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) $\frac{8-2x}{x+5} \geq 0$;Avant de commencer à résoudre, il faut déterminer l'ensemble de définition, c'est à dire des valeurs de x pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs de x qui annulent le dénominateur.

a) Valeur interdite ou ensemble de définition de cette inéquation :

Le dénominateur est nul si : $x+5=0$ Equivaut à : $x=-5$

On a donc définition de cette inéquation est : $D_I = \mathbb{R} - \{-5\}$

Le signe du quotient sur l'ensemble de définition est le même que celui du produit. On cherche donc les valeurs frontières.

$x+5=0$ Equivaut à : $x=-5$

$8-2x=0$ Equivaut à : $x=4$

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$8-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{8-2x}{x+5}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

En conclusion pour que le quotient soit positif ou nul, on a donc : $-5 < x \leq 4$

La solution est Donc : $S =]-5;4]$

4) $\frac{4}{x+1} \leq 3$; Avant de commencer à résoudre, il faut déterminer l'ensemble de définition, c'est à dire des valeurs de x pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs de x qui annulent le dénominateur.

a) Valeur interdite ou ensemble de définition de cette inéquation :

Le dénominateur est nul si : $x+1=0$ Equivaut à : $x=-1$

On a donc définition de cette inéquation est : $D_I = \mathbb{R} - \{-1\}$

On annule le second terme et on réduit au même dénominateur :

$\frac{4}{x+1} \leq 3$ Equivaut à : $\frac{4}{x+1} - 3 \leq 0$ Equivaut à : $\frac{4-3x-3}{x+1} \leq 0$ Equivaut à : $\frac{-3x+1}{x+1} \leq 0$

On cherche les valeurs frontières :

$-3x+1=0$ Equivaut à : $x = \frac{1}{3}$

$x+1=0$ Equivaut à : $x=-1$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-3x+1}{x+1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

En conclusion pour que le quotient soit négatif ou nul, on a donc : $x<-1$ ou $x\geq\frac{1}{3}$

La solution est donc : $S=\left]-\infty,-1\right[\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

Exercice14 : (**) Soit : $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$; On pose : $A=\frac{2x+3}{x+2}$

1) Donner un encadrement du nombre A et préciser son amplitude

2) a) Déterminer les deux réels a et b tels que : $A=a+\frac{b}{x+2}$

b) Déterminer un autre encadrement du nombre A et préciser son amplitude

3) Déterminer le plus fin des deux encadrements précédents de A

Corrigé : 1) $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$ Signifie que : $-\frac{1}{2}\leq x\leq 1$

Encadrement de : $A=\frac{2x+3}{x+2}$

On a : $A=\frac{2x+3}{x+2}=(2x+3)\times\frac{1}{x+2}$ et on a $-\frac{1}{2}\leq x\leq 1$

Donc $-1\leq 2x\leq 2$

Donc : $-1+3\leq 2x+3\leq 2+3$ C'est-à-dire : $2\leq 2x+3\leq 5$ (1)

Et on a : $-\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ donc $-\frac{1}{2}+2\leq x+2\leq 1+2$ C'est-à-dire : $\frac{3}{2}\leq x+2\leq 3$

Alors : $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{x+2}\leq\frac{2}{3}$ (2).

On fait la produit membre a membre de (1) et (2) on trouve : $2\times\frac{1}{3}\leq(2x+3)\times\frac{1}{x+2}\leq 5\times\frac{2}{3}$

Donc $\frac{2}{3}\leq A\leq\frac{10}{3}$ est un encadrement du réel A d'amplitudes $r=\frac{10}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

2) a) Déterminons les deux réels a et b tels que :

Methode1 : $A=\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2x+4-1}{x+2}=\frac{2(x+2)-1}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{-1}{x+2}=2+\frac{-1}{x+2}$

Donc : $a=2$ et $b=-1$

Methode2 :(identification)

$$a+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b}{x+2}=\frac{ax+2a+b}{x+2}=\frac{ax+(2a+b)}{x+2}$$

$A=a+\frac{b}{x+2}$ Équivaut à : $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{ax+(2a+b)}{x+2}$

Équivaut à : $2x+3=ax+(2a+b)$

Équivaut à : $\begin{cases}a=2\\2a+b=3\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$

D'où : $A=2-\frac{1}{x+2}$

b) Déterminons un autre encadrement du nombre A et précisons son amplitude

On a : $A=2-\frac{1}{x+2}$ et $-\frac{1}{2}\leq x\leq 1$

Donc : $-\frac{1}{2}+2\leq x+2\leq 1+2$ C'est-à-dire : $\frac{3}{2}\leq x+2\leq 3$

Donc : $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{x+2}\leq\frac{2}{3}$ et alors : $-\frac{2}{3}\leq-\frac{1}{x+2}\leq-\frac{1}{3}$

Donc : $2-\frac{2}{3}\leq 2-\frac{1}{x+2}\leq 2-\frac{1}{3}$ C'est-à-dire : $\frac{4}{3}\leq 2-\frac{1}{x+2}\leq\frac{5}{3}$

Par suite : $\frac{4}{3}\leq A\leq\frac{5}{3}$ est un autre encadrement du nombre A et son amplitude est : $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$

3) Déterminons le plus fin des deux encadrements précédents de A :
Le plus fin des deux encadrements précédents de A : est celui qui a l'amplitude le plus petit

$\frac{2}{3}\leq A\leq\frac{10}{3}$: est un encadrement du réel A d'amplitudes $r=\frac{10}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

$\frac{4}{3}\leq A\leq\frac{5}{3}$: est un encadrement du nombre A et son amplitude est : $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$

Le plus fin des deux encadrements est : $\frac{4}{3}\leq A\leq\frac{5}{3}$ car $\frac{1}{3}<\frac{8}{3}$

Exercice15 : (**)

1) Soient x et y deux réels tels que : $x\in[-2;5]$ et $y\in[-3;-1]$

Simplifier : $A=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

2) Simplifier les nombres : $B=\sqrt{\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)^2}$; $C=\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|$; $D=\left|-5\sqrt{13}-13\sqrt{5}\right|$ et $E=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

3) Soient a et b deux réels tels que : $a\in\mathbb{R}^-$ et $b\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

Simplifier : $F=\sqrt{(3b-1)^2}$; $G=\sqrt{(a-5)^2}$

4) Résoudre les équations : a) $|5x+2|=8$ b) $|-2x+1|=-1$ c) $|2x+1|=|3x-4|$

5) Résoudre les inéquations : a) $|2x-3|\leq 1$ b) $|6x+11|\geq\frac{1}{6}$ c) $2\leq|10x+2|\leq 5$

Corrigé :

1) Soient x et y deux réels tels que : $x\in[-2;5]$ et $y\in[-3;-1]$

Simplifions : $A=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

$A=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

3) On a : $x\in[-2;5]$ donc : $-2\leq x\leq 5$

Donc : $-4\leq 2x\leq 10$ alors : $3\leq 2x+7\leq 17$ c'est-à-dire : $2x+7>0$

Donc : $|2x+7|=2x+7$

4) On a : $y\in[-3;-1]$ donc : $-3\leq y\leq -1$ alors : $-9\leq 3y\leq -3$ c'est-à-dire : $3y<0$

Donc : $|3y|=-3y$

5) On a : $y\in[-3;-1]$ donc : $-3\leq y\leq -1$ alors : $5\leq y+8\leq 7$ c'est-à-dire : $y+8>0$

Donc : $|y+8|=y+8$

6) On a : $-3\leq y\leq -1$ alors : $-6\leq 2y\leq -2$ et $-5\leq -x\leq 2$

Alors : $-6+(-5)\leq 2y+(-x)\leq -2+2$ c'est-à-dire : $-11\leq 2y-x\leq 0$ donc : $2y-x\leq 0$

Donc : $A=2(2x+7)+3y+2(y+8)+2y-x$

Donc : $A=4x+14+3y+2y+16+2y-x$

Donc : $\boxed{A=3x+7y+30}$

2) Simplifions : $B=\sqrt{\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)^2}$

$B=\sqrt{\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)^2}=\left|5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right|$

On a : $\left(5\sqrt{7}\right)^2=175$; $\left(59\sqrt{3}\right)^2=10443$ donc : $5\sqrt{7}-59\sqrt{3}<0$

Alors : $B=-\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)=59\sqrt{3}-5\sqrt{7}$

Simplifions : $C=\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|$

On a : $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$; $\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ donc : $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}>0$

Alors : $C=\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

Simplifions : $D=\left|-5\sqrt{13}-13\sqrt{5}\right|$

$D=\left|-5\sqrt{13}-13\sqrt{5}\right|=\left|-\left(5\sqrt{13}+13\sqrt{5}\right)\right|=\left|5\sqrt{13}+13\sqrt{5}\right|$ car $|-X|=|X|$

Alors : $D=5\sqrt{13}+13\sqrt{5}$ Car : $5\sqrt{13}+13\sqrt{5}>0$

Simplifions : $E=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$E=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\times2\sqrt{3}+2^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=\left|\sqrt{3}-2\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)=2-\sqrt{3}$ car $\sqrt{3}-2<0$

3) Soient a et b deux réels tels que : $a\in\mathbb{R}^-$ et $b\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

Simplifions : $F=\sqrt{(3b-1)^2}$

$F=\sqrt{(3b-1)^2}=|3b-1|$ Or on a : $b\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

$b\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$ Signifie que : $0\le b\le\frac{1}{3}$

Donc : $0\le3b\le1$ c'est-à-dire : $-1\le3b-1\le0$

Donc : $F=|3b-1|=-(3b-1)=1-3b$

Simplifions : $G=\sqrt{(a-5)^2}=|a-5|$

$a\in\mathbb{R}^-$ Signifie que : $a\le0$ c'est-à-dire : $a-5\le-5$

Donc : $a-5\le0$

Donc : $G=|a-5|=-(a-5)=5-a$

4) a) Résolution de l'équation : $|5x+2|=8$

On a les équivalences suivantes :

$|5x+2|=8$ Signifie que : $5x+2=8$ ou $5x+2=-8$

Signifie que : $5x=6$ ou $5x=-10$

Signifie que : $x=\frac{6}{5}$ ou $x=-2$

Donc : $S=\left\{-2;\frac{6}{5}\right\}$

b) Résolution de l'équation : $|-2x+1|=-1$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative
Donc : $S=\varnothing$

c) Résolution de l'équation : $|2x+1|=|3x-4|$

Égalité de deux valeurs absolues :
Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b
Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|2x+1|=|3x-4|$ Signifie que : $2x+1=3x-4$ ou $2x+1=-(3x-4)$
Signifie que : $-x=-5$ ou $2x+1=-3x+4$
Signifie que : $x=5$ ou $5x=3$
Signifie que : $x=5$ ou $x=\frac{3}{5}$
Donc : $S=\left\{\frac{3}{5};5\right\}$

5)a) Résolution de l'inéquation : $|2x-3|\le 1$

Règle : $|x-a|\le r$ **est équivalente à :** $-r\le x-a\le r$ avec $r>0$
D'après notre règle, on a donc :
$|2x-3|\le 1$ Signifie que : $-1\le 2x-3\le 1$
Signifie que : $-1+3\le 2x-3+3\le 1+3$
Signifie que : $2\le 2x\le 4$
Signifie que : $1\le x\le 2$
Donc : $S=[1;2]$

b) Résolution de l'inéquation : $|6x+11|\ge\frac{1}{6}$

Règle : $|x-a|>r$ **est équivalente à :** $x-a\ge r$ ou $x-a\le -r$ avec $r>0$

$|6x+11|\ge\frac{1}{6}$ Signifie que : $6x+11\ge\frac{1}{6}$ ou $6x+11\le-\frac{1}{6}$
Signifie que : $6x\ge\frac{1}{6}-11$ ou $6x\le-\frac{1}{6}-11$
Signifie que : $6x\ge-\frac{65}{6}$ ou $6x\le-\frac{67}{6}$
Signifie que : $x\ge-\frac{65}{36}$ ou $x\le-\frac{67}{36}$
Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{67}{36}\right]\cup\left[-\frac{65}{36};+\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $2\le|10x+2|\le 5$

$2\le|10x+2|\le 5$ Signifie que : $|10x+2|\le 5$ et $|10x+2|\ge 2$

• Résolution de l'inéquation : $|10x+2|\le 5$

$|10x+2|\le 5$ Signifie que : $-5\le 10x+2\le 5$
Signifie que : $-5-2\le 10x+2-2\le 5-2$
Signifie que : $-7\le 10x\le 3$
Signifie que : $-\frac{7}{10}\le x\le\frac{3}{10}$

Donc : $S_1 = \left[-\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right]$

• Résolution de l'inéquation : $|10x+2| \geq 2$

$|10x+2| \geq 2$ Signifie que : $10x+2 \geq 2$ ou $10x+2 \leq -2$

Signifie que : $10x \geq 0$ ou $10x \leq -4$

Signifie que : $x \geq 0$ ou $x \leq -\frac{2}{5}$

Donc : $S_2 = \left]-\infty;-\frac{2}{5}\right] \cup [0;+\infty[$

Finalement on a : $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right] \cap \left(\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right] \cup [0;+\infty[\right)$

Donc : $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right] \cap \left(\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right] \cup [0;+\infty[\right)$

Donc : $S = \left[-\frac{7}{10};-\frac{2}{5}\right] \cup \left[0;\frac{3}{10}\right]$

Exercice16 : (**) Donner une valeur approchée décimale de $\sqrt{10}$ par défaut et par excès à 3×10^{-3} près (Utiliser la calculatrice :)$\left(\sqrt{10} \simeq 3.16227766...\right)$

Corrigé : On a :. $3.162 < \sqrt{10} < 3.165$

Et on a : $3.165 - 3.162 = 0.003 = 3\times10^{-3}$

Donc : 3.162 est une valeur approchée décimale du réel $\sqrt{10}$ par défaut à 3×10^{-3} près.

Et 3.165 est une valeur approchée décimale du réel $\sqrt{10}$ par excès à 3×10^{-3} près.

Exercice17 : (**) Soients $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ tel que : $|x-3| \leq 1$ et $|3y-x-6| \leq 2$

1) Montrer que : x ; y sont deux éléments de l'intervalle $[2;4]$

2) On pose $A = \frac{2x}{2x+y}$; donner un encadrement de A en précisant son amplitude

3) Montrer que : $\frac{13}{15}$ est une valeur approchée de A a $\frac{7}{15}$ prés

Corrigé : 1) $|x-3| \leq 1$ signifie $-1 \leq x-3 \leq 1$

Signifie $-1+3 \leq x-3+3 \leq 1+3$

Signifie $2 \leq x \leq 4$

Signifie $x \in [2;4]$

$|3y-x-6| \leq 2$ Signifie $-2 \leq 3y-x-6 \leq 2$

Signifie $-2+x+6 \leq 3y \leq 2+x+6$

Signifie $x+4 \leq 3y \leq x+8$

On a : $2 \leq x \leq 4$ donc : $x \leq 4$ donc : $x+8 \leq 12$ et $3y \leq x+8$

Donc : $3y \leq 12$

Donc : $y \leq 4$ (1)

On a : $x+4 \leq 3y$ et $2 \leq x$ donc : : $x+4 \leq 3y$ et $6 \leq x+4$

Donc : $6 \leq 3y$

Donc : $2 \leq y$ (2)

De : (1) et (2) on déduit que : $2 \leq y \leq 4$ Signifie $y \in [2;4]$

2) On pose $A=\frac{2x}{2x+y}=2x\times\frac{1}{2x+y}$; cherchons un encadrement de A en précisant son amplitude

On a : $2\le x\le 4$ et $2\le y\le 4$

Donc : $4\le 2x\le 8$ et $2\le y\le 4$

Donc : $6\le 2x+y\le 12$ et $4\le 2x\le 8$

Donc : $\frac{1}{12}\le\frac{1}{2x+y}\le\frac{1}{6}$ et $4\le 2x\le 8$

Donc : $\frac{4}{12}\le 2x\times\frac{1}{2x+y}\le\frac{8}{6}$

Donc : c'est un encadrement de A son amplitude est : $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$

3) Montrons que : $\frac{13}{15}$ est une valeur approchée de A a $\frac{7}{15}$ prés

On a : $\frac{1}{3}\le A\le\frac{4}{3}$ donc : $\frac{1}{3}-\frac{13}{15}\le A-\frac{13}{15}\le\frac{4}{3}-\frac{13}{15}$

Donc : $-\frac{8}{15}\le A-\frac{13}{15}\le\frac{7}{15}$

Donc : $-\frac{8}{15}\le A-\frac{13}{15}\le\frac{7}{15}$

Donc : $\frac{13}{15}$ est une valeur approchée de A a $\frac{7}{15}$ prés

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien