Tronc commun Sciences BIOF

La correction Série N°5 : L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Exercice1 : (*) I) Comparer les nombres a et b dans chacun des cas suivants :

1) $a=\frac{2,5}{10}$ et $b=\frac{1}{4}$ 2) $a=-\frac{47}{54}$ et $b=-\frac{8}{9}$ 3) $a=2+\frac{2}{3}$ et $b=3-\frac{1}{3}$ 4) $a=-4\sqrt{5}$ et $b=-9$

5) $a=\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ 6) $a=\frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{5}}$ et $b=\frac{\sqrt{2}+1}{5\sqrt{3}}$ 7) $a=4\sqrt{5}-\sqrt{79}$ et $b=9-4\sqrt{5}$

Corrigé : Comparer a et b revient à étudier le signe de : $a-b$.

1) On compare $a=\frac{2,5}{10}$ et $b=\frac{1}{4}$

$$a-b=\frac{2,5}{10}-\frac{1}{4}=\frac{2,5\times4-10\times1}{10\times4}=\frac{10-10}{40}=\frac{0}{40}=0$$

Donc $a=b$

2) On compare : $a=-\frac{47}{54}$ et $b=-\frac{8}{9}$

On compare d'abord : $\frac{47}{54}$ et $\frac{8}{9}$

$$\frac{47}{54}-\frac{8}{9}=\frac{47}{54}-\frac{48}{54}=\frac{-1}{54}<0$$

Donc : $\frac{47}{54}<\frac{8}{9}$

Donc : $-\frac{47}{54}>-\frac{8}{9}$

Donc : $a>b$ (c'est une méthode il y'a plusieurs)

3) On compare : $a=2+\frac{2}{3}$ et $b=3-\frac{1}{3}$

$$a-b=2+\frac{2}{3}-3+\frac{1}{3}=-1+1=0$$

Donc : $a=b$ (c'est une méthode il y'a plusieurs)

4) On compare : $a=-4\sqrt{5}$ et $b=-9$

On compare d'abord : $4\sqrt{5}$ et 9

Et puisque $4\sqrt{5}$ et 9 sont positifs alors : on peut comparer leurs carrés

On a : $\left(4\sqrt{5}\right)^2=80$ et $(9)^2=81$ et $4\sqrt{5}<9$

Par suite : $-4\sqrt{5}>-9$

C'est-à-dire : $a>b$

5) On compare : $a=\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

Comparer a et b revient à étudier le signe de : $a-b$.

$$a-b=\frac{\sqrt{2}+2}{2}-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+2\right)-2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}=\frac{0}{2\sqrt{2}}=0$$

Donc : $a=b$ (c'est une méthode il y'a plusieurs)

6) On compare : $a=\frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{5}}$ et $b=\frac{\sqrt{2}+1}{5\sqrt{3}}$

On a : $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$ et $3^2 = 9$ donc : $2\sqrt{2} < 3$ c'est-à-dire : $2\sqrt{2} - 3 < 0$

Donc : $a = \dfrac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{5}} < 0$ et puisque : $b = \dfrac{\sqrt{2}+1}{5\sqrt{3}} > 0$

Alors : $a < b$

7) Comparons : $a = 4\sqrt{5} - \sqrt{79}$ et $b = 9 - 4\sqrt{5}$

On calcul la différence : $a-b$

$a - b = 4\sqrt{5} - \sqrt{79} - 9 + 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5} - \sqrt{79} - 9 = 8\sqrt{5} - \left(\sqrt{79} + 9\right)$

Il suffit de comparer : $\sqrt{79} + 9$ et $8\sqrt{5}$

Puisque : $\sqrt{79} + 9$ et $8\sqrt{5}$ sont positifs on va comparer leurs carrés :

$\left(8\sqrt{5}\right)^2 = 320$

$\left(\sqrt{79} + 9\right)^2 = \sqrt{79}^2 + 2 \times \sqrt{79} \times 9 + (9)^2 = 160 + 18\sqrt{79}$

$320 - \left(160 + 18\sqrt{79}\right) = 160 - 18\sqrt{79}$

On a $(160)^2 = 25600$ et $\left(18\sqrt{79}\right)^2 = 25596$ donc : $160 > 18\sqrt{79}$

Et donc : $320 > 160 + 18\sqrt{79}$ par suite : $8\sqrt{5} > \sqrt{79} + 9$

Et alors : $a - b > 0$

Conclusion : $a > b$

Exercice2 : (**) $a \in \mathbb{R}$

1) Comparer $2a$ et $a^2 + 1$ 2) Comparer : $4a - 1$ **et** $4a^2$

Corrigé : 1) $\left(a^2+1\right) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$ Car : le carré est toujours positif.

Donc : $a^2 + 1 \geq 2a$ si $a \in \mathbb{R}$

2) On a $4a^2 - (4a-1) = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2 \geq 0$ donc : $4a^2 \geq 4a - 1$.

Exercice3 : (**) Soit $n \in \mathbb{N}$

On pose : $a = \sqrt{4n^2+1}$ et $b = 2n + 1$; Comparer les nombres : a et b

Corrigé : Pour comparer deux nombres positifs on compare leurs carrés :

On a: $a^2 = \left(\sqrt{4n^2+1}\right)^2 = 4n^2 + 1$ et $b^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

$b^2 - a^2 = 4n^2 + 4n + 1 - \left(4n^2 + 1\right)$

$b^2 - a^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 1 = 4n \geq 0$ Car $n \in \mathbb{N}$

Donc : $b^2 \geq a^2$ et par suite $b \geq a$; car $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$

Exercice4 : (**) Soient : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$

1) Montrer que : $a^2 + b^2 \geq 2ab$

2) a) Déduire que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

b) Déduire que : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a+b)(c+d)$

Corrigé : 1) Soient : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$\left(a^2 + b^2\right) - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$ Car : le carré est toujours positif.

Donc : $a^2 + b^2 \geq 2ab$ si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

2) a) Déduisons que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

Soient : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

On a : $\begin{cases} a^2+b^2 \geq 2ab \\ a^2+c^2 \geq 2ac \\ b^2+c^2 \geq 2bc \end{cases}$ en ajoutant ces inégalités membre à membre on obtient :

$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$

C'est-à-dire : $2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2\left(ab+ac+bc\right)$

C'est équivaut à : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

2) b) Déduisons que : $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq (a+b)(c+d)$

Soient : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$

On a : $\begin{cases} b^2+d^2 \geq 2bd \\ a^2+c^2 \geq 2ac \\ b^2+c^2 \geq 2bc \\ a^2+d^2 \geq 2ad \end{cases}$ en ajoutant ces inégalités membre à membre on obtient :

$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2 \geq 2ad+2ac+2bc+2bd$

C'est-à-dire : $2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \geq 2\left(ad+ac+bc+bd\right)$

C'est équivaut à : $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq ad+ac+bc+bd$

Et comme : $(a+b)(c+d) = ad+ac+bc+bd$

Alors : $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq (a+b)(c+d)$

Exercice5 : (**) Soient a et b deux nombres réels tels que : $0 < a < b$

1)Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+5}{b+5}$

2) Soit : c un réel strictement positif

Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$

3) Comparer $\frac{a}{b}$; $\frac{2a}{a+b}$ et $\frac{2a+3b}{a+b}$

Corrigé : Comparons $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+5}{b+5}$ revient à étudier le signe de : $\frac{a+5}{b+5} - \frac{a}{b}$.

$$\frac{a+5}{b+5}-\frac{a}{b} = \frac{b(a+5)-a(b+5)}{b(b+5)} = \frac{ba+5b-ab-5a}{b(b+5)} = \frac{5b-5a}{b(b+5)} = \frac{5(b-a)}{b(b+5)}$$

Et puisque : b et c des réels strictement positifs

Alors : $b(b+5) > 0$ et on a aussi : $0 < a < b$

Donc: $0 < b-a$

Par suite: $\frac{a+5}{b+5}-\frac{a}{b} > 0$.

Donc: $\frac{a+5}{b+5} > \frac{a}{b}$

2) Soit : c un réel strictement positif

Comparons $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$

$$\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b} = \frac{b(a+c)-a(b+c)}{b(b+c)} = \frac{ba+bc-ab-ac}{b(b+c)} = \frac{bc-ac}{b(b+c)} = \frac{c(b-a)}{b(b+c)}$$

Et puisque : b et c des réels strictement positifs

Alors : $b(b+c) > 0$ et on a aussi : $0 < a < b$

Donc: $0 < b-a$

Par suite: $\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}>0$.

Donc: $\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}$

3) Comparons $\frac{a}{b}$; $\frac{2a}{a+b}$ et $\frac{2a+3b}{a+b}$

Donc: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$ si $0<c$

On prend : $c=a$ dans : $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

On a donc : $\frac{a}{b}<\frac{a+a}{b+a}$ c'est à dire: $\frac{a}{b}<\frac{2a}{a+b}$ (1)

Comparons $\frac{2a}{a+b}$ et $\frac{2a+3b}{a+b}$

$\frac{2a+3b}{a+b}-\frac{2a}{a+b}=\frac{2a+3b-2a}{a+b}=\frac{3b}{a+b}>0$ Car $0<a<b$

Donc: $\frac{2a}{a+b}<\frac{2a+3b}{a+b}$ (2)

De : (1) et (2) on déduit donc que : $\boxed{\frac{a}{b}<\frac{2a}{a+b}<\frac{2a+3b}{a+b}}$

Exercice6 : (**) Soit $x\in\mathbb{R}^{*+}$

1) Comparer : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

2) En déduire une comparaison de : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

Corrigé :1) On a $x+2\geq x$ car $(x+2)-x\geq 0$ Donc $\sqrt{x+2}\geq\sqrt{x}$

En ajoutant $\sqrt{x+1}$ aux deux membres on trouve : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$ (Le conjugué)

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

Donc : $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

Et on aussi : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Et puisque : $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$: donc $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

D'où $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Exercice7 : (**) x est un réel tel que : $-1 < x < 2$.

On pose : B = $-2x-3$. Trouver un encadrement de B et trouer son amplitude

Corrigé : $-1 < x < 2$ Signifie que : $-4<-2x<2$

Signifie que : $-4-3<-2x-3<2-3$

Signifie que : $-7<-2x-3<-1$

Donc : $-7<B<-1$: encadrement de B

$-1-(-7)=-1+7=6$: est l'amplitude de l'encadrement

Exercice8 : (*) On considère l'intervalle $I=[-3;4]$

Trouver le milieu et l'amplitude et le rayon de l'intervalle I

Corrigé : $\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}$ Est le milieu de l'intervalle I.

$4-(-3)=7$ Est l'amplitude de l'intervalle I .

$\frac{4-(-3)}{2}=\frac{7}{2}$ Est le rayon de l'intervalle I.

Exercice9 : (*) Ecrire les intervalles suivants sous forme d'inégalités :

1) $x\in[-1;5[$ 2) $x\in]-2;+\infty[$ 3) $x\in]-\infty,0]$ 4) $x\in\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ 5) $x\in]4;5[$

6) $x\in]-3,3]$ 7) $x\in\left]-\frac{1}{2},3\right]\cap[0,+\infty[$ 8) $x\in[-1;2[\cup[1;4]$

Corrigé :1) $x\in[-1;5[$ Equivaut à : $-1\le x<5$

2) $x\in]-2;+\infty[$ équivaut à : $x>-2$

3) $x\in]-\infty,0]$ équivaut à : $x\le 0$

4) $x\in\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ équivaut à : $x\ge\frac{1}{3}$

5) $x\in]4;5[$ équivaut à : $4<x<5$

6) $x\in]-3,3]$ équivaut à : $-3<x\le 3$

7) $x\in\left]-\frac{1}{2},3\right]\cap[0,+\infty[$ équivaut à : $x\in\left]-\frac{1}{2},3\right]$ et $x\in[0,+\infty[$

Équivaut à : $-\frac{1}{2}<x\le 3$ et $x\ge 0$

Équivaut à : $0\le x\le 3$

8) $x\in[-1;2[\cup[1;4]$ équivaut à : $x\in[-1;2[$ ou $x\in[1;4]$

Équivaut à : $-1\le x<2$ ou $1\le x\le 4$

Équivaut à : $-1\le x\le 4$

Exercice10 : (*) Simplifier : 1) $]-3;4[\cap[2;7[$ 2) $[-8;4[\cap[10;20[$ 3) $]-\infty;1[\cap\left[-\frac{7}{4};+\infty\right[$

4) $]5;9[\cup[4;8[$ 5) $[-5;-2[\cup[-3;+\infty[$ 6) $\left]-\infty,\frac{2}{7}\right[\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$

Corrigé :1) $]-3;4[\cap[2;7[=[2;4[$

2) $[-8;4[\cap[10;20[=\varnothing$

3) $]-\infty;1[\cap\left[-\frac{7}{4};+\infty\right[=\left[-\frac{7}{4};1\right[$

4) $]5;9[\cup[4;8[=[4;8[$

5) $[-5;-2[\cup[-3;+\infty[=[-5;+\infty[$

6) $\left]-\infty,\frac{2}{7}\right[\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

Exercice11 : (**) Soit x un élément de l'intervalle $]-1,+\infty[$

Comparer : 12 **et** $-5x+1$ en utilisant les propriétés de l'ordre.

Corrigé : On a $x \in \left]-1;+\infty\right[$ donc : $x \succ -1$

Règle : On ne change pas la relation d'ordre si l'on multiplie ou divise par un même nombre positif chaque côté de l'inéquation.
Mais On inverse la relation d'ordre si l'on multiplie ou divise par un même nombre négatif chaque côté de l'inéquation.

Donc : $-5x \prec -5\times(-1)$ c'est à dire : $-5x \prec 5$

Donc : ① $-5x+1 \prec 6$ et on sait que : $6 \prec 12$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $-5x+1 \prec 12$

Exercice12 : (**) $x \in [1;3]$ et $y \in [2;4]$ et $z \in [-3;-1]$

1) Trouver un encadrement de : x^2 ; y^2 ; $2x$ $3y$; $-x$; $-y$; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$; $\frac{x}{y}$ et $y\times z$

2) Trouver un encadrement de : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ et $B = \frac{2x-1}{x+1}$ et trouver les amplitudes des encadrements

Corrigé : 1) $x \in [1;3]$ Signifie que : $1 \le x \le 3$ $y \in [2;4]$ Signifie que : $2 \le y \le 4$

On a $1 \le x \le 3$ donc $1^2 \le x^2 \le 3^2$

C'est-à-dire : $1 \le x^2 \le 9$

On a $2 \le y \le 4$ donc $2^2 \le y^2 \le 4^2$

C'est-à-dire : $4 \le y^2 \le 16$

On a $1 \le x \le 3$ donc $2\times 1 \le 2x \le 2\times 3$

C'est-à-dire : $2 \le 2x \le 6$

On a $2 \le y \le 4$ donc $3\times 2 \le 3\times y \le 3\times 4$

C'est-à-dire : $6 \le 3y \le 12$

On a $1 \le x \le 3$ donc $-3 \le -x \le -1$

On a $2 \le y \le 4$ donc $-4 \le -y \le -2$

On a $1 \le x \le 3$ donc $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le 1$

On a $2 \le y \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$

On a $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ donc $1\times\frac{1}{4} \le x\times\frac{1}{y} \le 3\times\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{4} \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{2}$

Encadrement de $y\times z$: On a $2 \le y \le 4$ et $-3 \le z \le -1$

Donc : $2 \le y \le 4$ et $1 \le -z \le 3$

Donc : $2\times 1 \le y(-z) \le 4\times 3$

Donc : $2 \le -yz \le 12$ par suite : $-12 \le yz \le -2$

2) Encadrement de : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$

$6 \le 3y \le 12$ Donc $-12 \le -3y \le -6$

On fait la somme membre a membre on trouve : $1+4+2-12 \le x^2 + y^2 + 2x - 3y \le 9+16+6-6$

Donc : ① $-5 \le A \le 25$: ① est un encadrement du réel A à $25-(-5) = 30$ près

Encadrement de : $B = \frac{2x-1}{x+1}$

On a : $B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1)\times\frac{1}{x+1}$ et on a $1 \le x \le 3$

Donc $2 \le 2x \le 6$

Donc : $2-1 \le 2x-1 \le 6-1$ cad : $1 \le 2x-1 \le 5$ ❸

Et on a $1 \le x \le 3$ donc $2 \le x+1 \le 4$

Alors : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ ❹.

On fait la produit membre a membre de ❸ et❹ on trouve : $1\times\frac{1}{4} \leq (2x-1)\times\frac{1}{x+1} \leq 5\times\frac{1}{2}$

Donc $\frac{1}{4} \leq B \leq \frac{5}{2}$ est un encadrement du réel B D'amplitudes $r=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

Exercice13 : (**) Calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de la valeur absolue).

1) $|-3|$ 2) $|3|$ 3) $\left|-\frac{3}{5}\right|$ 4) $|\sqrt{5}-2|$ 5) $|1-\sqrt{3}|$ 6) $|\pi-4|$

7) $|\sqrt{2}-\sqrt{7}|$ 8) $|3-2\sqrt{3}|$ 9) $A=|4-2\sqrt{3}|-|5-3\sqrt{3}|-|9-5\sqrt{3}|$

Corrigé :1) $|-3|=-(-3)=3$ 2) $|3|=3$ 3) $\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}$

4) $|\sqrt{5}-2|$ On compare : $\sqrt{5}$ et 2

On a $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ et $(2)^2=4$ donc $\sqrt{5}>2$

Par suite $\left(\sqrt{5}-2\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ Donc $|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$

5) $|1-\sqrt{3}|$ On compare : $\sqrt{3}$ et 1

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{3}>1$ et par suite $\left(1-\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}^{-*}$.

Donc : $|1-\sqrt{3}|=-\left(1-\sqrt{3}\right)=-1+\sqrt{3}$

6) $|\pi-4|=-(\pi-4)=-\pi+4$ car $4>\pi$

7) $|\sqrt{2}-\sqrt{7}|$ on compare : $\sqrt{7}$ et $\sqrt{2}$

On a $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ donc : $\sqrt{7}>\sqrt{2}$

Donc $\sqrt{2}-\sqrt{7}<0$. Par suite : $|\sqrt{2}-\sqrt{7}|=-\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{7}$

8) On a : $3<2\sqrt{3}$ car $3^2<\left(2\sqrt{3}\right)^2$ Alors : $3-2\sqrt{3}\in\mathbb{R}^-$.

Donc ; $|3-2\sqrt{3}|=-\left(3-2\sqrt{3}\right)=-3+2\sqrt{3}$

9) On a : $4>2\sqrt{3}$ alors : $4-2\sqrt{3}\in\mathbb{R}^+$

On a : $3\sqrt{3}>5$ alors : $5-3\sqrt{3}\in\mathbb{R}^-$

On a : $9>5\sqrt{3}$ alors : $9-5\sqrt{3}\in\mathbb{R}^+$

$A=|4-2\sqrt{3}|-|5-3\sqrt{3}|-|9-5\sqrt{3}|=4-2\sqrt{3}--\left(5-3\sqrt{3}\right)-\left(9-5\sqrt{3}\right)$

$A=4-2\sqrt{3}+5-3\sqrt{3}-9+5\sqrt{3}=0$

Exercice14 : (**) 1) Comparer : $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$

2) Développer et Calculer $\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2$

3) On pose : $A=\sqrt{55-12\sqrt{21}}$

Simplifier A.

4) Sachant que : $1.7<\sqrt{3}<1.8$ et $2.6<\sqrt{7}<2.7$

Donner une approximation de A d'amplitude 0,5 par défaut et par excès

Corrigé :1) On a : $\left(3\sqrt{3}\right)^2=27$ et $\left(2\sqrt{7}\right)^2=28$ donc $2\sqrt{7}>3\sqrt{3}$

2) $\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2-2\times3\sqrt{3}\times2\sqrt{7}+\left(2\sqrt{7}\right)^2=27-12\sqrt{21}+28$

Donc : $\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2=55-12\sqrt{21}$

3) $A=\sqrt{55-12\sqrt{21}}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2}=\left|3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right|=-\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)$ car $3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\in\mathbb{R}^-$

Par suite : $A=\sqrt{55-12\sqrt{21}}=-3\sqrt{3}+2\sqrt{7}=2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$

4) On a : $1.7<\sqrt{3}<1.8$ et $2.6<\sqrt{7}<2.7$ et $A=2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$

Donc : $5.2<2\sqrt{7}<5.4$ et $5.1<3\sqrt{3}<5.4$ et $-5.4<-3\sqrt{3}<-5.1$

Donc : $-0.2<2\sqrt{7}-3\sqrt{3}<0.3$

Donc : $-0.2<A<0.3$

D'où − 0, 2 est une approximation de A par défaut d'amplitude : $0.3-(-0.2)=0.5$

Et 0,3 est une approximation de A par excès d'amplitude $0.3-(-0.2)=0.5$

Exercice15 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$2(x-1)-3(x+1)>4(3x-2)$

Corrigé : Comme pour les équations, on enlève les parenthèses puis on isole l'inconnue, ce qui donne :

$2(x-1)-3(x+1)>4(3x-2)$) Equivaut à : $2x-2-3x-3>12x-8$

Equivaut à : $2x-3x-12x>2+3-8$

Equivaut à : $-13x>-3$

On divise par −13, on change donc la relation d'ordre, ce qui Equivaut à $x<\frac{3}{13}$

On conclut par l'intervalle solution : Donc : $S=\left]-\infty;\frac{3}{13}\right[$

Exercice16 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ algébriquement l'équation : $|x-2|=5$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ Graphiquement l'équation : $|x-2|=5$

Corrigé :

1) **Résolvons notre équation algébriquement :**

Égalité de deux valeurs absolues :

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

D'après notre règle, on a donc les égalités suivantes :

$|x-2|=5$ Signifie que : $x-2=5$ ou $x-2=-5$

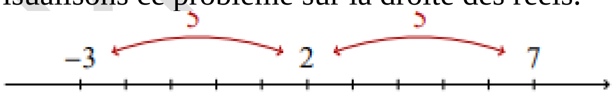
Signifie que : $x=7$ ou $x=-3$

Donc : $S=\{-3;7\}$

1) **Résolvons notre équation Graphiquement :**

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 2 est égale à 5.

Visualisons ce problème sur la droite des réels.



Graphiquement, nous trouvons donc comme solution −3 et 7.

Donc : $S=\{-3;7\}$

Exercice17:A) Ecrire sans le symbole de la valeur absolue les nombres suivants :

$A=\left|\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right|$ et $B=\left|\frac{7}{3}-\sqrt{7}\right|$

B) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : 1) $|-2x|=7$ 2) $|-x|=-4$ 3) $|-x+5|=0$

4) $|-3x+5|=|x-7|$ 5) $|2x+1|+2|x-3|=-1$

Corrigé : A) $A=\left|\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right|$; On compare : $\sqrt{3}$ et $\frac{5}{3}$

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}\simeq 2,7$ donc $\sqrt{3}>\frac{5}{3}$

Par suite $\left(\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ Donc $A=\left|\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right|=\sqrt{3}-\frac{5}{3}$

2) $B=\left|\frac{7}{3}-\sqrt{7}\right|$ On compare : $\sqrt{7}$ et $\frac{7}{3}$

On a $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$ et $\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}\simeq 5,4$ donc $\sqrt{7}>\frac{7}{3}$ et par suite $\left(\frac{7}{3}-\sqrt{7}\right)\in\mathbb{R}^{-*}$.

Donc : $B=\left|\frac{7}{3}-\sqrt{7}\right|=-\left(\frac{7}{3}-\sqrt{7}\right)=-\frac{7}{3}+\sqrt{7}=\sqrt{7}-\frac{7}{3}$

B) Méthode 1 (Équations ou inéquations de référence) :

Pour résoudre une équation (ou inéquation) avec des valeurs absolues, on peut essayer de se ramener à l'une des situations suivantes ($a\in\mathbb{R}^+$) :

1. $|x|=a \Leftrightarrow x=\pm a$,
2. $|x|\leqslant a \Leftrightarrow x\in[-a\,;\,a]$,
3. $|x|\geqslant a \Leftrightarrow x\in]-\infty\,;\,-a]\cup[a\,;\,+\infty[$.

1) $|-2x|=7$ Signifie que : $|2x|=7$ car $|-X|=|X|$

Signifie que : $2x=7$ ou $2x=-7$

Signifie que : $x=\frac{7}{2}$ ou $x=-\frac{7}{2}$

Donc : $S=\left\{-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right\}$

2) $|-x|=-4$ Signifie que : $|x|=-4$ car $|-X|=|X|$

$S=\varnothing$ Car $|x|\geq 0$

3) $|-x+5|=0$ Signifie que : $-x+5=0$ ($|X|=0$ Signifie que : $X=0$)

Signifie que : $-x=-5$

Signifie que : $x=5$

Donc : $S=\{5\}$

4) $|-3x+5|=|x-7|$ signifie que : $-3x+5=x-7$ ou $-3x+5=-(x-7)$

Signifie que : $-3x+5=x-7$ ou $-3x+5=-x+7$

Signifie que : $-4x=-12$ ou $-2x=2$

Signifie que : $x=3$ ou $x=-1$

Donc : $S=\{-1;3\}$

5) $|2x+1|+2|x-3|=-1$

On a : $|2x+1|\geq 0$ et $2|x-3|\geq 0$ donc : $|2x+1|+2|x-3|\geq 0$

Donc : $S=\varnothing$

Exercice18 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ algébriquement l'inéquation : $|x-2|\leq 5$

2)Résoudre Graphiquement l'inéquation : $|x-2|\leq 5$

Corrigé :

1) **Résolvons notre équation algébriquement :**

Règle : $|x-a|\leq r$ **est équivalente à :** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D’après notre règle, on a donc :

$|x-2|\leq 5$ Signifie que : $-5\leq x-2\leq 5$

Signifie que : $-5+2\leq x-2+2\leq 5+2$

Signifie que : $-3\leq x\leq 7$

Donc : $S=[-3;7]$

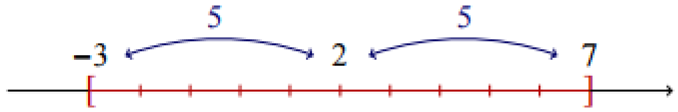
1) **Résolvons notre inéquation Graphiquement :**

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 2 est égale à 5.

Visualisons ce problème sur la droite des réels.

Graphiquement Cela revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 2 est inférieure ou égale à 5.

Visualisons les solutions sur la droite des réels :



On obtient alors l’intervalle [−3 ; 7] ; avec que 2 est le centre et 5 le rayon de l’intervalle.

Donc : $S=[-3;7]$

Exercice19 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ algébriquement l’inéquation : $|x-1|\geq 3$

2)Résoudre Graphiquement l’inéquation : $|x-1|\geq 3$

Corrigé :

1) **Résolvons notre équation algébriquement :**

Règle : $|x-a|\geq r$ **est équivalente à :** $x-a\geq r$ ou $x-a\leq -r$ avec $r>0$

D’après notre règle, on a donc :

$|x-1|\geq 3$ Signifie que : $x-1\geq 3$ ou $x-1\leq -3$

Signifie que : $x\geq 4$ ou $x\leq -2$

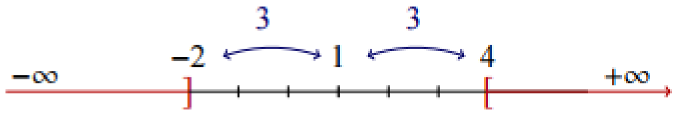
On obtient alors l’union d’intervalle suivant : $]-\infty;-2]$ et $[4;+\infty[$

Donc : $S=]-\infty;-2]\cup[4;+\infty[$

1) **Résolvons notre inéquation Graphiquement :** $|x-1|\geq 3$

Graphiquement Cela revient à Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 1 est supérieure ou égale à 3.

Visualisons ce problème sur la droite des réels.



On obtient alors l’union d’intervalle suivant : $]-\infty;-2]$ et $[4;+\infty[$

Donc : $S=]-\infty;-2]\cup[4;+\infty[$

Exercice20 : (***) Résoudre l’inéquation suivante : $|2x-1|+3|x-2|\succ 4$

Corrigé : $x-2=0$ Signifie que : $x=2$

$2x-1=0$ Signifie que : $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\|2x-1\|$		$-2x+1$	0	$2x-1$		$2x-1$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\|x-2\|$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$\|2x-1\|+3\|x-2\|$		$7-5x$		$-x+5$		$5x-7$	

Si : $x \le \frac{1}{2}$ alors : $|2x-1|+3|x-2| \succ 4$

Devient : $-(2x-1)-3(x-2)-4 \succ 0$

Ce qui signifie que : $-5x+3 \succ 0$

C'est-à-dire : $x \prec \frac{3}{5}$

Donc : $S_1 = \left]-\infty;\frac{3}{5}\right[\cap \left]-\infty;\frac{1}{2}\right] = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

Si : $\frac{1}{2} \le x \le 2$ alors l'inéquation devient : $(2x-1)-3(x-2)-4 \succ 0$

Ce qui Signifie que : $-x+1 \succ 0$ c'est-à-dire : $x \prec 1$

Donc : $S_2 = \left[\frac{1}{2};2\right] \cap \left]-\infty;1\right] = \left[\frac{1}{2};1\right[$

Si : $x \ge 2$ alors l'inéquation devient $(2x-1)+3(x-2)-4 \succ 0$

Ce qui Signifie que : $5x-11 \succ 0$ ce qui Signifie que : $x \succ \frac{11}{5}$

Donc : $S_3 = \left]\frac{11}{5};+\infty\right[\cap [2;+\infty[= \left]\frac{11}{5};+\infty\right[$

Par conséquent : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2};1\right[\cup \left]\frac{11}{5};+\infty\right[$

Ce qui Signifie que $S = [-\infty;1[\cup \left]\frac{11}{5};+\infty\right[$

Exercice21 : (***) Soient x et y deux réels tels que : $y \ge -2$ et $x \le \frac{1}{5}$ et $x-y=1$

1) Calculer : $E = \sqrt{(5x-1)^2} + \sqrt{(5y+10)^2}$.

2) Montrer que :. $-2 \le y \le -\frac{4}{5}$ et $-1 \le x \le \frac{1}{5}$

3) Calculer : $F = |x+y+3| + \left|x+y+\frac{3}{5}\right|$.

Corrigé :1) On a : $E = \sqrt{(5x-1)^2} + \sqrt{(5y+10)^2} = |5x-1| + |5y+10|$

Or on a : $x \le \frac{1}{5}$ donc : $5x \le 1$

Qui signifie que : $5x-1 \le 0$

On a aussi : $y \ge -2$ donc : $5y \ge -10$

Qui signifie que : $5y+10 \ge 0$

Donc : $E = |5x-1| + |5y+10| = -(5x-1)+(5y+10)$ Car $5x-1 \le 0$ et $5y+10 \ge 0$

Donc : $E = -5x+1+5y+10 = -5(x-y)+11 = -5\times1+11 = 6$ Car $x-y=1$

2) a) Pour montrer que $-1 \le x \le \frac{1}{5}$ il suffit de montrer que : $-1 \le x$ car : $x \le \frac{1}{5}$.

On sait que : $y \ge -2$ et $x-y=1$ ce qui signifie que $x-1=y$

Donc : $x-1 \ge -2$ par suite : $x \ge -1$

b) Pour montrer que $-2 \le y \le -\frac{4}{5}$ il suffit de montrer que : $y \le -\frac{4}{5}$ car $-2 \le y$.

On sait que : $x \le \frac{1}{5}$ et $x-y=1$ ce qui signifie que : $x = y+1$.

Donc : $y \le \frac{1}{5} - 1$: par suite $y+1 \le \frac{1}{5}$

C'est-à-dire : $y \le -\frac{4}{5}$.

3) Calculons : $F = |x+y+3| + \left|x+y+\frac{3}{5}\right|$

On a : $-1 \le x \le \frac{1}{5}$ et $-2 \le y \le -\frac{4}{5}$ donc : $-1-2 \le x+y \le \frac{1}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)$.

Qui signifie que: $x+y \le \frac{-3}{5}$.

Qui signifie que: $0 \le x+y+3$ et $x+y+\frac{3}{5} \le 0$

Donc : $|x+y+3| = x+y+3$ et $\left|x+y+\frac{3}{5}\right| = -\left(x+y+\frac{3}{5}\right) = -x-y-\frac{3}{5}$

Par suite : $F = x+y+3-x-y-\frac{3}{5} = 3-\frac{3}{5} = \frac{12}{5}$.

Exercice22 : (** Sachant que : $\left(\sqrt{3} = 1.732050808...\right)$

Donner un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près

Et préciser une valeur approchée décimale par défaut et par excès à 10^{-2} près.

Corrigé : On a : $\left(\sqrt{3} \simeq 1.732050808...\right)$

Donc ① $1.73 \le \sqrt{3} \le 1.74$ et ② $1.732 \le \sqrt{3} \le 1.733$

① Est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.74-1.73$ près ; c'est-à-dire : à $10^{-2} = 0.01$ près

② Est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.733-1.732$ près ; c'est-à-dire : à $10^{-3} = 0.001$ près

Et on a : 1.73 est une valeur approchée décimale

du réel $\sqrt{3}$ par défaut à 10^{-2} près

1.74 : Est une valeur approchée décimale du réel $\sqrt{3}$ par excès à 10^{-2} près.

Exercice23 : (**) 1) Effectuer et calculer : $\left(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right)^2$.

2) On pose : $E = \sqrt{19 - 4\sqrt{21}}$

a) Simplifier : E

b) Si on a : $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$ et $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$

Donner une valeur approchée du réel E par défaut et excès à $0,5$ près.

Corrigé : 1) $\left(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2\times\sqrt{7}\times 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2$ $\left(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{21} + 12 = 19 - 4\sqrt{21}$

2) a) $E = \sqrt{19 - 4\sqrt{21}} = \sqrt{\left(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right)^2} = \left|\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right|$ $E = -\sqrt{7} + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{7}$

Car $\sqrt{7} - 2\sqrt{3} < 0$ $\left(\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12\right.$ et $\left.\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7\right)$

b) On a : $E = 2\sqrt{3} - \sqrt{7} = 2\sqrt{3} + \left(-\sqrt{7}\right)$

Or on a : $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$ donc $3,46 < 2\sqrt{3} < 3,48$

Et on a : $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$

Donc : $-2,65 < -\sqrt{7} < -2,64$

Par suite : $3,46 - 2,65 < 2\sqrt{3} - \sqrt{7} < 3,48 - 2,64$

Ce qui signifie que : $0,81 < A < 0,84$

Et puisque : $0,84 - 0,81 = 0,03 = 3\times10^{-2}$ alors :

- $0,84$ Est une valeur approchée du réel E par excès à : 3×10^{-2} près.
- $0,81$ Est une valeur approchée du réel E par défaut à : 3×10^{-2} près.

Exercice24 : (**) Soit : $x \in \mathbb{R}$; on pose : $A = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

1) Montrer que : $A - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$

2) En déduire que : $\left|A - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{16}x^2$.

3) Trouver une valeur approchée du nombre $\dfrac{1}{\sqrt{4,16}}$ d'amplitude 10^{-2}

Corrigé : 1) $A - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \dfrac{1}{2}$

$$A - \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{\left(2-\sqrt{x^2+4}\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}{2\sqrt{x^2+4}\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)} = \frac{2^2-\sqrt{x^2+4}^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}^2\right)}$$

$$A - \frac{1}{2} = \frac{4-x^2-4}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)} = \frac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$$

2) Déduisons que : $\left|A - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{16}x^2$.

On a : $A - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$ donc : $\left|A - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}\right| = \dfrac{x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$

Car x^2 *et* $2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)$ sont positifs

On a : $x^2 \geq 0$ donc : $x^2+4 \geq 4$ donc : $\sqrt{x^2+4} \geq \sqrt{4}$ c'est-à-dire : $\sqrt{x^2+4} \geq 2$ donc $2\sqrt{x^2+4} \geq 4$

De : $2\sqrt{x^2+4} \geq 4$ et $x^2+4 \geq 4$ par somation on a donc : $2\sqrt{x^2+4}+x^2+4 \geq 8$

Donc : $2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right) \geq 16$

Donc : $\dfrac{1}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)} \leq \dfrac{1}{16}$

Donc : $\dfrac{x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)} \leq \dfrac{1}{16}x^2$

D'où : $\left|A - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{16}x^2$

3) Trouvons une valeur approchée du nombre $\dfrac{1}{\sqrt{1,0004}}$ d'amplitude 2×10^{-4}

On a : $\left|A-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{16}x^2$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{16}x^2$

Prenons : $x=0,4$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{0,4^2+4}}-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{16}\times 0,4^2$ ce qui signifie que : $\left|\frac{1}{\sqrt{4,16}}-0.5\right|\leq 10^{-2}$

D'où 0.5 est une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{4,16}}$ d'amplitude 10^{-2}

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien