Tronc commun Sciences BIOF

La correction Série N°4 : L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Exercice1 : (**) Comparer a et b dans les cas suivants :

1) $a=2-\sqrt{3}$ et $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$

2) $a=5+\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{25+10\sqrt{2}}$

3) $a=\sqrt{10}$ et $b=\sqrt{3}+\sqrt{7}$

4) $a=4+\sqrt{17}$ et $b=3\sqrt{2}+\sqrt{17}$

Corrigé :1) Comparons : $a=2-\sqrt{3}$ et $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$

On calcul la différence : $a-b$

$$a-b=\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(2-\sqrt{3}\right)^2$$

$$a-b=\left(2-\sqrt{3}\right)\left[1-\left(2-\sqrt{3}\right)\right]=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(1-2+\sqrt{3}\right)=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$$

On compare : $\sqrt{3}$ et 2 : on a $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $(2)^2=4$ donc : $2>\sqrt{3}$ et par suite $a=\left(2-\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

On compare : $\sqrt{3}$ et 1 : on a $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $(1)^2=1$ donc : $\sqrt{3}>1$ et par suite $a=\sqrt{3}-1\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc : $a-b>0$

Par suite : $a>b$

2) Comparons : $a=5+\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{25+10\sqrt{2}}$

Puisque : $a=5+\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{25+10\sqrt{2}}$ sont positifs on va comparer leurs carrés :

$$a^2=\left(5+\sqrt{2}\right)^2=(5)^2+2\times5\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=27+10\sqrt{2}$$

$$b^2=\sqrt{25+10\sqrt{2}}^2=25+10\sqrt{2}$$

Puisque : $27>25$ alors : $27+10\sqrt{2}>25+10\sqrt{2}$

Alors : $a^2>b^2$

Conclusion : $a>b$

3) Comparons : $a=\sqrt{10}$ et $b=\sqrt{3}+\sqrt{7}$

Puisque : $a=\sqrt{10}$ et $b=\sqrt{3}+\sqrt{7}$ sont positifs on va comparer leurs carrés :

$$a^2=\left(\sqrt{10}\right)^2=10$$

$$b^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\sqrt{3}^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=10+2\sqrt{21}$$

Puisque : $2\sqrt{21}>0$ alors : $10+2\sqrt{21}>0+10$ c'est-à-dire : $b^2>a^2$

Conclusion : $b>a$

4) Comparons : $a=4+\sqrt{17}$ et $b=3\sqrt{2}+\sqrt{17}$

Il suffit de comparer : 4 et $3\sqrt{2}$

Puisque : 4 et $3\sqrt{2}$ sont positifs on va comparer leurs carrés :

On a $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ et $\left(4\right)^2=16$ donc : $3\sqrt{2}>4$

On a donc : $3\sqrt{2}>4$ donc : $3\sqrt{2}+\sqrt{17}>4+\sqrt{17}$

Conclusion : $b>a$

Exercice2: (**) Soit $x\in\mathbb{R}^+$;Comparer : $2\sqrt{x}-1$ et x

Corrigé : On a : $x-\left(2\sqrt{x}-1\right)=x-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\times 1+1^2=\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$

Donc: $x\geq\left(2\sqrt{x}-1\right)$ si $x\in\mathbb{R}^+$

Exercice3 : (**) Soient : a ; b deux réels distincts et strictement positifs.

1)Montrer que : $a^2+b^2>2ab$.

2)Montrer que : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$.

3) Déduire que : $3,75<\sqrt{15}<4$

Corrigé : $a>0$ et $b>0$ et $a\neq b$

1)Montrons que : $a^2+b^2>2ab$

$\left(a^2+b^2\right)-2ab=a^2-2ab+b^2=\left(a-b\right)^2>0$ Car : le carré est toujours positif et $a\neq b$

Donc : $a^2+b^2-2ab>0$

Par suite : $a^2+b^2>2ab$

2) Montrons que : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$.

a) Montrons que : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}$.

$$\frac{1}{ab}-\frac{2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab\left(a^2+b^2\right)}=\frac{\left(a-b\right)^2}{ab\left(a^2+b^2\right)}$$

On a $\left(a-b\right)^2>0$ Car : le carré est toujours positif et $a\neq b$

Et on a : $a>0$ et $b>0$ donc : $ab>0$ et aussi on a : $a^2+b^2>0$

Donc : $\frac{\left(a-b\right)^2}{ab\left(a^2+b^2\right)}>0$

Par suite : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}$ 1

b) Montrons que : $\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$.

$$\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}-\frac{1}{ab}=\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}-\frac{2ab}{2a^2b^2}=\frac{a^2+b^2-2ab}{2a^2b^2}=\frac{\left(a-b\right)^2}{2a^2b^2}$$

On a $\left(a-b\right)^2>0$ Car : le carré est toujours positif et $a\neq b$

Et on a : $2a^2b^2>0$

Donc : $\frac{\left(a-b\right)^2}{2a^2b^2}>0$

Par suite : $\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$ 2

De : 1 et 2 on déduit que : $\frac{2}{a^2+b^2}<\frac{1}{ab}<\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$

3) Déduisons que : $3,75 < \sqrt{15} < 4$

Pennons: $a = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ et $b = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$ on a bien : $a \neq b$

Donc : $\frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} < \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}} < \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}$

Donc : $\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} < \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{53}}} < \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{2\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}$

Donc : $\frac{30}{8} < \sqrt{15} < \frac{8}{2}$

Donc : $\boxed{3,75 < \sqrt{15} < 4}$

Exercice4 : (**) *Soit a* est un réel strictement positif.
1) Montrer que : si a > 1, alors : $a^3 > a^2 > a$.
2) Montrer que : si a < 1, alors : $a^3 < a^2 < a$.

Corrigé : De l'hypothèse $a > 1$, on déduit d'une part que $a^2 > a$ (on multiplie les deux membres par $a > 0$) et d'autre part que : $a^3 > \boldsymbol{a^2}$ (on multiplie par $a^2 > 0$).
Donc : $a^2 > a$ et $a^3 > a^2$ et par suite : $a^3 > a^2 > a$.
De la même façon, lorsque : $0 < a < 1$ on démontre que : $a^3 < a^2 < a$.

Exercice5 : (**) Soient $a \in \mathbb{R}^*$; on pose $A = \frac{2a}{a^2+1}$: et $B = \frac{2a-1}{a^2}$

1)Comparer : A et B

2) En déduire la comparaison de : $\frac{2,2}{2,21}$ et $\frac{1,2}{1,21}$

Corrigé :

1) On a : $A - B = \frac{2a}{a^2+1} - \frac{2a-1}{a^2}$

Donc : $A - B = \frac{2a \times a^2 - (a^2+1)(2a-1)}{a^2(a^2+1)} = \frac{2a^3 - 2a^3 + a^2 - 2a + 1}{a^2(a^2+1)} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2(a^2+1)}$

Donc : $A - B = \frac{(a-1)^2}{a^2(a^2+1)} \geq 0$ car On a aussi : $(a-1)^2 \geq 0$ et $a^2+1 \geq 0$ et $a^2 > 0$

(le carré est toujours positif)
Donc : $A \geq B$ et si $a \neq 1$ on a $A > B$

2)On a $A \geq B$ c'est-à-dire : $\frac{2a}{a^2+1} \geq \frac{2a-1}{a^2}$ si $a \in \mathbb{R}^*$

On prend : $a = 1,1 \in \mathbb{R}^*$

Donc : $\frac{2\times1,1}{(1,1)^2+1} > \frac{2\times1,1-1}{(1,1)^2}$ Donc : $\frac{2,2}{2,21} > \frac{1,2}{1,21}$

Exercice6 : (**) Soient : x et y des réels tels que : $-4 < x < -1$ et $2 < y < 5$

1) Donner un encadrement pour chacun des nombres suivants :

a) $2x+3y+7$ b) $2x-3y-2$ c) $(2x-3)(3y+10)$ d) $(2x-3)^2 - \sqrt{3y+10}$

2) En déduire un encadrement des nombres : $A = \frac{2x-3y-2}{2x+3y+7}$ et $B = \frac{3y+10}{2x-3y-2}$

Corrigé : Soient : x et y des réels tels que : $-4<x<-1$ et $2<y<5$

1)a) Encadrement de : $2x+3y+7$

On a : $-4<x<-1$ et $2<y<5$ donc : $-8<2x<-2$ et $6<3y<15$

Donc : $-8+6<2x+3y<-2+15$

Donc : $-2<2x+3y<13$

Donc : $-2+7<2x+3y+7<13+7$

Donc : $\boxed{5<2x+3y+7<20}$

b) Encadrement de : $2x-3y-2=2x+(-3y)-2$

On a : $-8<2x<-2$ et $6<3y<15$

Donc : $-8<2x<-2$ et $-15<-3y<-6$

Donc : $-8+(-15)<2x+(-3y)<-2+(-6)$

Donc : $-23<2x+(-3y)<-8$

Donc : $-23-2<2x-3y-2<-8-2$

Donc : $\boxed{-25<2x-3y-2<-10}$

c) Encadrement de : $(2x-3)(3y+10)$

On a : $-8<2x<-2$ et $6<3y<15$

Donc : $-8-3<2x-3<-2-3$ et $6+10<3y+10<15+10$

Donc : $-11<2x-3<-5$ et $16<3y+10<25$

Donc : $5<-(2x-3)<11$ et $16<3y+10<25$

Donc : $5\times16<-(2x-3)(3y+10)<11\times25$

Donc : $80<-(2x-3)(3y+10)<275$

Donc : $\boxed{-275<(2x-3)(3y+10)<-80}$

d) Encadrement de : $(2x-3)^2-\sqrt{3y+10}=(2x-3)^2+\left(-\sqrt{3y+10}\right)$

On a : $-11<2x-3<-5$ donc : $5<-(2x-3)<11$

Donc : $25<\left(-(2x-3)\right)^2<121$

Donc : $25<(2x-3)^2<121$ 1

On a aussi : $6<3y<15$ donc : $6+10<3y+10<15+10$

Donc : $16<3y+10<25$

Donc : $\sqrt{16}<\sqrt{3y+10}<\sqrt{25}$

Donc : $-5<-\sqrt{3y+10}<-4$ 2

Donc : 1 et 2 donnent : $25+(-5)<(2x-3)^2+\left(-\sqrt{3y+10}\right)<121+(-4)$

Donc : $\boxed{20<(2x-3)^2-\sqrt{3y+10}<117}$

2) a) Déduisons un encadrement du nombre : $A=\dfrac{2x-3y-2}{2x+3y+7}=(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}$

On a : $-25<2x-3y-2<-10$ et $5<2x+3y+7<20$

Donc : $10<-(2x-3y-2)<25$ et $\dfrac{1}{20}<\dfrac{1}{2x+3y+7}<\dfrac{1}{5}$

Donc : $\dfrac{10}{20}<-(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}<\dfrac{25}{5}$

Donc : $\dfrac{1}{2}<-(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}<5$

Donc : $-5<(2x-3y-2)\times\frac{1}{2x+3y+7}<-\frac{1}{2}$ Par suite : $\boxed{-5<A<-\frac{1}{2}}$

2)b) Déduisons un encadrement du nombre : $B=\frac{3y+10}{2x-3y-2}=(3y+10)\times\frac{1}{2x-3y-2}$

On a : $16<3y+10<25$ et $-25<2x-3y-2<-10$

On a : $16<3y+10<25$ et $10<-(2x-3y-2)<25$

Donc : $16<3y+10<25$ et $\frac{1}{25}<-\frac{1}{(2x-3y-2)}<\frac{1}{10}$

Donc : $\frac{16}{25}<-(3y+10)\times\frac{1}{2x-3y-2}<\frac{25}{10}$

Donc : $-\frac{25}{10}<(3y+10)\times\frac{1}{2x-3y-2}<-\frac{16}{25}$

Par suite : $\boxed{-\frac{5}{2}<B<-\frac{16}{25}}$

Exercice7: (*) Traduire chacune des expressions suivantes à l'aide d'un intervalle (ou une réunion d'intervalles).

1) $x>-4$ et $x<-1$ 2) $x\geq-3$ ou $x>3$ 3) $x\geq2$ ou $x<0$ 4) $x\neq2$ et $x>0$

Corrigé : 1) $x>-4$ et $x<-1$ Signifie que : $x\in]-4;+\infty[$ et $x\in]-\infty;-1[$

Signifie que : $x\in]-4;+\infty[\cap]-\infty;-1[$

Signifie que : $x\in]-4;-1[$

2) $x\geq-3$ ou $x>3$ Signifie que : $x\in[-3;+\infty[$ ou $x\in]3;+\infty[$

Signifie que : $x\in[-3;+\infty[\cup]3;+\infty[$

Signifie que : $x\in[-3;+\infty[$

3) $x\geq2$ ou $x<0$ Signifie que : $x\in[2;+\infty[$ ou $x\in]-\infty;0[$

Signifie que : $x\in]-\infty;0[\cup[2;+\infty[$

4) $x\neq2$ et $x>0$ Signifie que : $x\in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ et $x\in]0;+\infty[$

Signifie que : $x\in(]-\infty;2[\cup]2;+\infty[)\cap]0;+\infty[$

Signifie que : $x\in]2;+\infty[$

Exercice8 : (*) On considère les intervalles suivants : $A=]-\infty;3]$; $B=]-5;4]$: $C=]2,+\infty[$

Déterminer et écrire plus simplement les ensembles suivants :

$A\cap B$; $A\cap C$; $A\cup C$; $A\cup B$; $B\cup C$; $B\cap C$

Corrigé : $A\cap B=B=]-5;3]$; $A\cap C=]2;3]$; $A\cup C=]-\infty:+\infty[=\mathbb{R}$; $A\cup B=]-\infty;4]$; $B\cup C=]-5,+\infty[$

$B\cap C=]2;4]$

Exercice9 : (**) Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}x\geq-3\\x\succ2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x\succ5\\x\leq4\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x\succ7\\x\geq0\end{cases}$ 4) $\begin{cases}-3\leq x\leq0\\-7\prec x\prec10\end{cases}$

Corrigé : $\{$ c'est l'intersection 1) $\begin{cases}x\geq-3\\x\succ2\end{cases}$

$x\geq-3$ Signifie que : $x\in[-3,+\infty[$

Et $x>2$ Signifie que : $x\in]2,+\infty[$

Donc : $S =]2,+\infty[\cap [-3,+\infty[=]2,+\infty[$

2) $\begin{cases} x \succ 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$ On a : $x \leq 4$ Signifie que : $x \in]-\infty, 4]$

Et $x > 5$ Signifie que : $x \in]5,+\infty[$

Donc : $S =]5,+\infty[\cap]-\infty, 4] = \varnothing$

3) $x > 7$ Signifie que : $x \in]7,+\infty[$

Et $x \geq 0$ Signifie que : $x \in [0,+\infty[$

Donc : $S =]7,+\infty[\cap [0,+\infty[=]7,+\infty[$

4) $\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 \langle x \langle 10 \end{cases}$

$x \in]-7;10[$ Signifie que : $-7 < x < 10$

$-3 \leq x \leq 0$ Signifie que : $x \in [-3;0]$

Donc : $S =]-7;10[\cap [-3;0] = [-3;0]$

Exercice10 : Le jeu des erreurs

Cherche et explique les erreurs commises ci-dessous.

1)Résolution de l'inéquation : $2x+5<3x-1$

$2x+5<3x-1$ Signifie que : $2x+5-2x<3x-1-2x$

Signifie que : $5<x-1$

Signifie que : $5+1<x-1+1$

Signifie que : $x<6$

Donc : $x \in]-\infty;6[$

Alors : $S =]-\infty;6[$

2)Résolution de l'inéquation : $-x+3 \geq 5$

$-x+3 \geq 5$ Signifie que : $-x+3-3 \geq 5-3$

Signifie que : $-x \geq 2$ Signifie que : $x \geq -2$

Donc : $x \in [-2;+\infty[$ Alors : $S = [-2;+\infty[$

3)Encadrement de $-3x$ sachant que : $x \in \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$

$x \in \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$ Signifie que : $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$

Signifie que : $-\frac{1}{3}\times(-3) \leq -3\times x \leq \frac{1}{3}\times(-3)$ Signifie que : $1 \leq -3x \leq -1$

Corrigé : 1) Dans la résolution de l'inéquation : $2x+5<3x-1$

<u>L'erreur :</u> $5+1<x-1+1$ Signifie que : $x>6$

Donc : $x \in]6;+\infty[$ Alors : $S =]6;+\infty[$

2) Dans la Résolution de l'inéquation : $-x+3 \geq 5$

<u>L'erreur :</u> $-x \geq 2$ Signifie que : $x \leq -2$

Donc : $x \in]-\infty;-2]$ Alors : $S =]-\infty;-2]$

3) Dans l'encadrement de $-3x$:

L'erreur : $-\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{3}$ Signifie que : $\frac{1}{3}\times(-3)\leq -3\times x\leq -\frac{1}{3}\times(-3)$ Signifie que : $-1\leq -3x\leq 1$

Exercice11 : (**) 1) Calculer $\left(3\sqrt{2}-5\right)^2$ et comparer : $3\sqrt{2}$ et 5.

2) Simplifier $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$.

Corrigé : 1) $\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\times3\sqrt{2}\times5+(5)^2=18-30\sqrt{2}\times5+25$ Donc : $\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=43-30\sqrt{2}$

On a : $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ et $(5)^2=25$ donc $3\sqrt{2}>5$ Par suite : $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

2) $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2}=\left|3\sqrt{2}-5\right|=-\left(3\sqrt{2}-5\right)$ car $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

Par suite : $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}+5$

Exercice12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : 1) $|x-1|=5$ 2) $|2x+1|=|x-3|$

3) $|x+2|=-1$ 4) $|x-1|+|2-x|-3=0$ 5) $|x-1|+|2-x|-3=0$

Corrigé : Méthode 1 (Équations ou inéquations de référence) :

Pour résoudre une équation (ou inéquation) avec des valeurs absolues, on peut essayer de se ramener à l'une des situations suivantes ($a\in\mathbb{R}^+$) :

1. $|x|=a\Leftrightarrow x=\pm a$,
2. $|x|\leq a\Leftrightarrow x\in[-a\,;\,a]$,
3. $|x|\geq a\Leftrightarrow x\in]-\infty\,;\,-a]\cup[a\,;\,+\infty[$.

1) $|x-1|=5$ Signifie que : $x-1=5$ ou $x-1=-5$

Signifie que : $x=6$ ou $x=-4$ Donc : $S=\{-4;6\}$

2) $|2x+1|=|x-3|$ signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-(x-3)$

Signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-x+3$

Signifie que : $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$ Donc : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

3) $|x+2|=-1$ $S=\varnothing$ Car $|x+2|\geq 0$

4) $|x-1|+|3-x|-3=0$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$

$3-x=0$ Signifie que : $x=3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0 $+$	$+$	
$\|x-1\|$	$-x+1$	0 $x-1$	$x-1$	
$3-x$	$+$	$+$	0 $-$	
$\|3-x\|$	$3-x$	$3-x$	0 $x-3$	
$\|x-1\|+\|3-x\|-3$	$1-2x$	-1	$2x-7$	

Si : $x\leq1$ alors : L'équation $|x-1|+|3-x|-3=0$ devient : $-(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $4-2x-3=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{1}{2}\leq1$; Donc : $S_1=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Si : $1\leq x\leq3$ alors l'équation devient : $(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $-1=0$ Donc : $S_2=\varnothing$

Si : $x\geq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)-(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $2x-7=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{7}{2}\geq 3$ Donc : $S_3=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$

5) $|-3x+4|+|-5+x|=10$

✍ On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue :

$-3x+4=0$ Signifie que : $x=\frac{4}{3}$

$-5+x=0$ Signifie que : $x=5$

✍ On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$\lvert -3x+4\rvert$	$-3x+4$	0	$3x-4$	11	$3x-4$	
$\lvert -5+x\rvert$	$5-x$	$\frac{11}{3}$	$5-x$	0	$-5+x$	
(E_1)	$-4x+9=10$ $x=-\frac{1}{4}$ possible		$2x+1=10$ $x=\frac{9}{2}$ possible		$4x-9=10$ $x=\frac{19}{4}$ impossible	

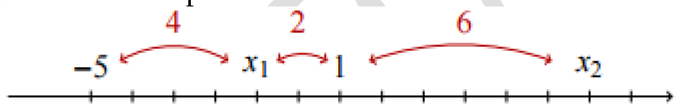
On obtient alors deux solutions : $S=\left\{-\frac{9}{4};\frac{9}{2}\right\}$

Exercice13 : Déterminer algébriquement et Graphiquement les valeurs de x pour lesquelles deux fois la distance de x à 1 est égale à la distance de x à -5.

Corrigé :

1) **Résolvons notre problème Graphiquement :**

Visualisons ce problème sur la droite des réels.



Graphiquement, nous nous apercevons qu'il y a deux positions de x possibles.

✍ soit x est dans l'intervalle $[-5\ ;\ 1]$ donc x se trouve aux deux tiers de la distance de -5 à 1 :

Donc : $x_1=-5+\frac{2(1-(-5))}{3}=-5+4=-1$

✍ soit x se trouve à l'extérieur de l'intervalle $[-5\ ;\ 1]$, donc 1 est au milieu de -5 et x_2 :

Donc : $x_2=1+(1-(-5))=1+6=7$

Donc : $S=\{-1;7\}$

2)Résolvons notre problème ou équation algébriquement :

La distance de x à 1 est égale à : $|x-1|$

La distance de x à -5 est égale à : $|x-(-5)|=|x+5|$

Donc le problème revient à résoudre l'équation : $2|x-1|=|x+5|$

$2|x-1|=|x+5|$ Signifie que : $|2x-2|=|x+5|$

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Signifie que : $2x-2=x+5$ ou $2x-2=-(x+5)$

Signifie que : $x=7$ ou $2x-2=-x-5$

Signifie que : $x=7$ ou $3x=-3$

Signifie que : $x=7$ ou $x=-1$

Donc : $S=\{-1;7\}$

Remarque : On s'aperçoit sur cet exercice que la résolution graphique est plus compliquée que la résolution algébrique,

C'est là que la puissance de l'algèbre prend toute sa valeur.

Exercice14 : (**)1) Simplifier : $A=\sqrt{\frac{1}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}}-\sqrt{\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}}$

2) Soient x et y deux réels tels que : $4<x<y$

Simplifier : $B=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(4-x)^2}-|y-3|$

3) Soient x et y deux réels tels que : $x\in\left]-1;2\right[$ et $y\in\left]-5;-3\right[$

Simplifier : $C=2|3x+3|-|2y|+5|y+3|-3|y-2x|$

Corrigé :1) Simplifions : $A=\sqrt{\frac{1}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}}-\sqrt{\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}}$

$$A=\sqrt{\left(\frac{1}{2-\sqrt{5}}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)^2}=\left|\frac{1}{2-\sqrt{5}}\right|-\left|\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right|=\frac{1}{\left|2-\sqrt{5}\right|}-\frac{1}{\left|2+\sqrt{5}\right|}$$

$A=\frac{1}{-\left(2-\sqrt{5}\right)}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ Car : $2-\sqrt{5}<0$ ($2^2=4$; $\sqrt{5}^2=5$) et $2+\sqrt{5}>0$

$$A=\frac{-1}{2-\sqrt{5}}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}=\frac{-\left(2+\sqrt{5}\right)-\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}=\frac{-4}{2^2-\sqrt{5}^2}=\frac{-4}{4-5}=\boxed{4}$$

1) Simplifions : $B=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(4-x)^2}-|y-3|$

Soient x et y deux réels tels que : $4<x<y$

$B=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(4-x)^2}-|y-3|$

$B=|x-y|+|4-x|-|y-3|$

On a : $4<x<y$ alors $x<y$ et donc : $x-y<0$

On a : $4<x<y$ alors $4<x$ et donc : $4-x<0$

On a : $4<x<y$ et $3<4$ et donc : $3<4<x<y$ et donc : $3<y$ et alors : $y-3>0$

Donc : $B=-(x-y)-(4-x)-(y-3)$

Donc : $B=-x+y-4+x-y+3$

Donc : $\boxed{B=-1}$

3) Simplifions : $C=2|3x+3|-|2y|+5|y+3|-3|y-2x|$

Soient x et y deux réels tels que : $x\in\left]-1;2\right[$ et $y\in\left]-5;-3\right[$

On a : $x\in\left]-1;2\right[$ donc : $-1<x<2$ et donc : $-3<3x<6$ et par suite : $0<3x+3<9$

Donc : $0<3x+3$ et alors : $|3x+3|=3x+3$: (1)

On a : $y\in]-5;-3[$ donc : $-5<y<-3$ et donc : $-10<2y<-6$ par suite : $2y<0$

Et alors : $|2y|=-2y$: (2)

On a : $-5<y<-3$ donc : $-2<y+3<0$ par suite : $y+3<0$ et alors : $|y+3|=-(y+3)$: (3)

On a : $-1<x<2$ donc : $-4<-2x<2$ et $-5<y<-3$ et on a : $y-2x=y+(-2x)$

Donc : $-4+(-5)<y-2x<-3+2$

Donc : $-9<y-2x<-1$ par suite : $|y-2x|=-(y-2x)=-y+2x$: (4)

D'après (1); (2) ; (3) et (4) on obtient : $C=2|3x+3|-|2y|+5|y+3|-3|y-2x|$

$C=2(3x+3)+2y-5(y+3)+3(y-2x)$

Donc : $C=6x+6+2y-5y-15+3y-6x$

Donc : $C=-9$

Exercice15 : (**) Sachant que : $2,645\le\sqrt{7}\le 2,646$

a) Que représente $2,645$ pour $\sqrt{7}$?

B) Que représente $2,646$ pour $\sqrt{7}$?

Corrigé : a) $2,645$ est une valeur approchée du réel $\sqrt{7}$ par défaut à 10^{-3} près

b) $2,645$ est une valeur approchée du réel $\sqrt{7}$ par excès à 10^{-3} près

Exercice16 : (**) Sachant que : $1,38<\sqrt{2}<1,42$

Montrer que : $|\sqrt{2}-1,40|<0,02$ et que peut-on déduire ?

Corrigé : On a : $1,38<\sqrt{2}<1,42$ donc : $-0,02<\sqrt{2}-1,40<0,02$

Donc : $|\sqrt{2}-1,40|<0,02$

Donc : $1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

On a $1,40\le\sqrt{2}<1,40+0,02$ donc $1,40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

On a $1,42-0,02<\sqrt{2}<1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

Exercice17 (***) Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $x>1$

On pose : $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

1) Montrer que : $A-1=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$

2) a) Vérifier que : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

b) En déduire que : $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\le A-1\le\dfrac{1}{2(x-1)}$

3) a) Montrer que : $\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

b) En déduire que : $1+\dfrac{1}{2x}\le A\le\dfrac{1}{2(x-1)}+1$

4) Déduire que $\dfrac{9}{4}$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec la précision $\dfrac{1}{20}$

Corrigé : 1) Montrons que : $A-1=\frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $x>1$

$$A-1=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-1=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$$ (Le conjugué)

$$A-1=\frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{x-x+1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$$

2) a) Vérifions que : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

Soit $x>1$: $2\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)=2\sqrt{x-1}-\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$

On a : $-1\le 0$ alors : $x-1\le x$ par suite : $\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}$ donc : $\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\le 0$

D'où : $2\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\le 0$ c'est-à-dire : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ ①

D'autre part, on a : $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$ et comme $\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\le 0$

Alors : $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\le 0$

Donc : $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$ ②

D'après ①et ②on obtient : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

b) Déduisons que : $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\le A-1\le\frac{1}{2(x-1)}$

Soit $x>1$:On a : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

Alors : $2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}\le\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\le\sqrt{x-1}\times 2\sqrt{x}$

Alors : $2(x-1)\le\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\le 2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x}$

Donc : $\frac{1}{2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}\le\frac{1}{2(x-1)}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\le A-1\le\frac{1}{2(x-1)}$

3) a) Montrons que : $\frac{1}{x}\le\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

Soit $x>1$; $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x(x-1)}-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x(x-1)}-x\right)\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x(x-1)}-x\right)\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}=\frac{x(x-1)-x^2}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}=\frac{x^2-x-x^2}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}$$

Comme : $-x<-1$ et $-1<0$ alors : $-x<0$ et on sait que : $x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)>0$

Donc : $\frac{-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}\leq 0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

b) Déduisons que : $1+\frac{1}{2x}\leq A\leq\frac{1}{2(x-1)}+1$

Soit $x>1$; On a : $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ alors : $\frac{1}{2x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ et comme : $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\leq A-1$

Alors : $\frac{1}{2x}\leq A-1$ par suite : $\frac{1}{2x}\leq A-1\leq\frac{1}{2(x-1)}$

Donc : $1+\frac{1}{2x}\leq A\leq\frac{1}{2(x-1)}+1$

Par suite : $\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{2x}\leq\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}$

Donc : $\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{2x}-\frac{9}{4}\leq\sqrt{x}-\frac{9}{4}\leq\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}-\frac{9}{4}$

On prend : $x=5$ on obtient : $-\frac{1}{20}\leq\sqrt{5}-\frac{9}{4}\leq 0$ et comme : $0\leq\frac{1}{20}$

Alors : $-\frac{1}{20}\leq\sqrt{5}-\frac{9}{4}\leq\frac{1}{20}$ donc : $\left|\sqrt{5}-\frac{9}{4}\right|\leq\frac{1}{20}$

D'où : $\frac{9}{4}$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec la précision $\frac{1}{20}$

Exercice18 : (***) 1) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ on a : $\frac{4}{2-x}=2+x+\frac{x^2}{2-x}$

b) En déduire que : si $|x|\leq 1$ alors $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right|\leq x^2$

2) Donner une valeur approchée du nombre : $\frac{4}{0{,}999}$ à 10^{-6} près

Corrigé : 1) a) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{2\}$; $2+x+\frac{x^2}{2-x}=\frac{(2+x)(2-x)+x^2}{2-x}=\frac{2^2-x^2+x^2}{2-x}=\frac{4}{2-x}$

b) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ tel que : $|x|\leq 1$

On a : $\frac{4}{2-x}=2+x+\frac{x^2}{2-x}$

Donc : $\frac{4}{2-x}-(2+x)=\frac{x^2}{2-x}$

Donc : $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right|=\left|\frac{x^2}{2-x}\right|$

C'est-à-dire : $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right|=\frac{x^2}{|2-x|}$ (1) Car : $x^2\geq 0$

On a : $|x|\leq 1$ Donc : $-1\leq x\leq 1$ c'est-à-dire : $-1\leq -x\leq 1$

Donc : $2-1\leq 2-x\leq 1+2$ c'est-à-dire $1\leq 2-x\leq 3$ et par suite : $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{2-x}\leq 1$ donc : $-1\leq\frac{1}{3}\leq\frac{1}{2-x}\leq 1$

Par suite : $\frac{1}{|2-x|}\leq 1$ et puisque : $x^2\geq 0$ alors : $\frac{x^2}{|2-x|}\leq x^2$ et d'après l'égalité (1)

On a donc : $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right| \leq x^2$

2) Déterminons une valeur approchée du nombre : $\frac{1}{0,99}$ à 2×10^{-4} près ???

D'après 1) b) on donne à x la valeur : $x=10^{-3}$ et puisque $\left|10^{-2}\right| \leq 1$

Alors : $\left|\frac{4}{2-10^{-3}}-\left(2+10^{-3}\right)\right| \leq \left(10^{-3}\right)^2$

C'est-à-dire on a : $\left|\frac{4}{1-0,001}-(2+0,001)\right| \leq 10^{-6}$

Donc : $\left|\frac{4}{0,999}-2,001\right| \leq 10^{-6}$ et par suite : $2,001$ est une valeur approchée du nombre : $\frac{4}{0,999}$ à 10^{-6} près

Exercice19 : Soit x et y deux réels. Démontrer que $|x+y| \leq |x|+|y|$ Cette inégalité est appelée "inégalité triangulaire".

Corrigé : $|x+y| \leq |x|+|y|$ Équivalent à : $|x+y|^2 \leq \left(|x|+|y|\right)^2$

Équivalent à : $(x+y)^2 \leq \left(|x|+|y|\right)^2$

Équivalent à : $x^2+2xy+y^2 \leq |x|^2+2|x||y|+|y|^2$

Équivalent à : $x^2+2xy+y^2 \leq x^2+2|x||y|+x^2$

Équivalent à : $xy \leq |x||y|$ cette dernière inégalité étant vraie, la première est aussi vraie.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien