Tronc commun Sciences BIOF

La correction Série N°3 : L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Exercice1 : (**)
Dans un parc de loisirs, certaines attractions sont réservées à des enfants d'une taille bien précise.
<u>Attraction 1 :</u> Réservée aux enfants de moins de 1,40 m.
<u>Attraction 2 :</u> Réservée aux enfants d'au moins 1,40 m.
<u>Attraction 3 :</u> Interdite aux enfants de 1,40 m et moins.
<u>Attraction 4 :</u> Interdite aux enfants de plus de 1,40 m.
Soit t la taille d'un enfant en mètres.
Écris pour chaque attraction une inégalité (par exemple $t \leq 1,40$ ou $t > 1,40$) traduisant le fait que l'enfant est autorisé à y participer.

Corrigé :<u>Attraction 1 :</u> Réservée aux enfants de moins de 1,40 m signifie que : $t < 1,40$
<u>Attraction 2 :</u> Réservée aux enfants d'au moins 1,40 m signifie que : $t \geq 1,40$
<u>Attraction 3 :</u> Interdite aux enfants de 1,40 m et moins signifie que : $t > 1,40$
<u>Attraction 4 :</u> Interdite aux enfants de plus de 1,40 m signifie que : $t \leq 1,40$

Exercice2 : (**) Comparer a et b dans les cas suivants :

1) $a = 2+\sqrt{3}$ et $b = 2\sqrt{3}$ 2) $a = \sqrt{6}$ et $b = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1$ 3) $b = \sqrt{5}+\sqrt{2}-1$ et $a = \sqrt{10}$

4) $b = 70+\sqrt{2}$ et $a = 10\sqrt{51}$ 5) $a = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b = \dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$

6) $b = \sqrt{28}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$ et $a = 3\sqrt{18}-\sqrt{72}+2\sqrt{\dfrac{9}{2}}$ 7) $b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ et $a = \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Corrigé :1) $a-b = 2-\sqrt{3}$ nombre positif ce qui signifie que : $a-b \in \mathbb{R}^{*+}$ par suite : $a \succ b$

2) $a-b = \sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1 = \sqrt{3}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$

Donc : $a-b = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$

On compare : $\sqrt{2}$ et 1 : on a $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ et $(1)^2 = 1$ donc : $\sqrt{2} > 1$ et par suite $\left(\sqrt{2}-1\right) \in \mathbb{R}^{+*}$

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ et $(1)^2 = 1$ donc $\sqrt{3} > 1$ par suite $\left(\sqrt{3}-1\right) \in \mathbb{R}^{+*}$

Donc : $a-b = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) \in \mathbb{R}^{+*}$ D'où $a > b$

3) On compare : $a = \sqrt{10}$ et $b = \sqrt{5}+\sqrt{2}-1$
On calcul la différence : $a-b = \sqrt{10}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{5\times 2}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1\right)$

$a-b = \sqrt{5}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+1 = \sqrt{5}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$ On factorise par : $\sqrt{5}$ et par $\left(\sqrt{2}-1\right)$

Donc : $a-b = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$ or on a : $\sqrt{2} > 1$ car $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ et $(1)^2 = 1$

Donc : $\left(\sqrt{2}-1\right) \in \mathbb{R}^{+*}$

Et on a : $\sqrt{5} > 1$ car $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ et $1^2 = 1$ donc : $\left(\sqrt{5}-1\right) \in \mathbb{R}^{+*}$ alors : $a-b = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right) \in \mathbb{R}^{+*}$ et par suite : $a > b$

4) On compare : $a = 10\sqrt{51}$ et $b = 70+\sqrt{2}$

Puisque a et b sont positifs il suffit de comparer a^2 et b^2 : on a $a^2=\left(10\sqrt{51}\right)^2=5100$

$b^2=\left(70+\sqrt{2}\right)^2=4900+140\sqrt{2}+2=4902+140\sqrt{2}$

$a^2-b^2=198-140\sqrt{2}=2\left(99-70\sqrt{2}\right)$ et on a : $(99)^2=9801$ et $\left(70\sqrt{2}\right)^2=9800$

Donc : $99-70\sqrt{2}\in\mathbb{R}^{+*}$ équivaut à : $2\left(99-70\sqrt{2}\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Alors : $a^2-b^2>0$ donc $a>b$ ($a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$)

5) On compare : $a=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b=\frac{4+\sqrt{2}}{7}$?

$$b-a=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$b-a=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{8+2\sqrt{2}-7\sqrt{2}}{14}=\frac{8-5\sqrt{2}}{14}$$

On a : $8>5\sqrt{2}$ car $(8)^2=64$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$ donc : $8-5\sqrt{2}\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc on a aussi : $\frac{8-5\sqrt{2}}{14}\in\mathbb{R}^{+*}$

Par suite : $b>a$

6) On compare : $b=\sqrt{28}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$ et $a=3\sqrt{18}-\sqrt{72}+2\sqrt{\frac{9}{2}}$

$$a-b=\left(3\sqrt{18}-\sqrt{72}+2\sqrt{\frac{9}{2}}\right)-\left(\sqrt{28}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}\right)$$

$a-b=\left(9\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)-\left(2\sqrt{7}+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)$ $a-b=9\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{7}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}-2\sqrt{7}$

On a : $\left(4\sqrt{2}\right)^2=32$ et $\left(2\sqrt{7}\right)^2=28$ car $4\sqrt{2}>2\sqrt{7}$

Donc : $4\sqrt{2}-2\sqrt{7}\in\mathbb{R}^{+*}$ Et par suite : $a>b$

7) $a-b=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(2\sqrt{3}+2-\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}\right)-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}$

$a-b=\frac{2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}$. $a-b=\frac{3\sqrt{3}-5}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}-5}{2}$

On a : $(5)^2=25$ et $\left(3\sqrt{3}\right)^2=27$ car $3\sqrt{3}>5$

Donc : $3\sqrt{3}-5\in\mathbb{R}^{+*}$ et on a aussi : $\frac{3\sqrt{3}-5}{2}\in\mathbb{R}^{+*}$

Par suite :. $a>b$

Exercice3 : (**) On pose $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) Donner le signe de : B

2) Calculer B^2

3) Donner une écriture simplifiée de B

Corrigé : $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) On Remarque que : $6-2\sqrt{5}<6+2\sqrt{5}$ donc : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}<\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Donc : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\in\mathbb{R}^{*-}$ cad $B<0$

2) $B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Donc : $B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Donc : $B^2=6-2\sqrt{5}-2\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}+6+2\sqrt{5}$

$B^2=12-2\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=12-2\sqrt{6^2-20}=12-2\sqrt{16}$

Donc : $B^2=12-2\times4=4$

3) $B^2=4$ Equivaut à : $B=\sqrt{4}$ ou $B=-\sqrt{4}$

Donc : $B=2$ ou $B=-2$ or $B<0$

Donc : $B=-2$

Exercice4 : (**) Soient a et b deux nombres réels tels que : $1<a<b$

Comparer les nombres : $A=a^2+1$ et $B=ab+2$

Corrigé : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $1<a<b$

Comparons les nombres : $A=a^2+1$ et $B=ab+2$

Etudions le signe de : $A-B$

$A-B=\left(a^2+1\right)-\left(ab+2\right)=a^2+1-ab-2=a^2-ab-1=a\left(a-b\right)-1$

On a : $1<a<b$ alors : $a<b$ c'est-à-dire : $a-b<0$

Par suite : $a\left(a-b\right)<a\times0$ c'est-à-dire : $a\left(a-b\right)<0$ car $a>0$

C'est-à-dire : $a\left(a-b\right)-1<-1$ Et puisque : $-1<0$ alors : $a\left(a-b\right)-1<0$

D'où : $A-B<0$

Ce qui signifie que : $A<B$:

Exercice5 : (**) Soient : x et y des réels tels que : $x>y>-\frac{2}{3}$

1) Etudier le signe de chacun des nombres :

a) $2x+y+3$ b) $(3x+2)(3y+2)$

2) Comparer les deux nombres suivants : $A=\frac{2x+3}{2y+3}$ et $B=\frac{2y+3}{2x+3}$

Corrigé : Soient : x et y des réels tels que : $x>y>-\frac{2}{3}$

1)a) Etudions le signe du nombre : $2x+y+3$

On a : $x>y>-\frac{2}{3}$ donc : $x>-\frac{2}{3}$ et $y>-\frac{2}{3}$

Donc : $2x>-\frac{4}{3}$ et $y+3>-\frac{2}{3}+3$

Donc : $2x>-\frac{4}{3}$ et $y+3>\frac{7}{3}$

Donc : $2x+y+3>-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}$

Donc : $2x+y+3>1$ et puisque $1>0$

Alors : $2x+y+3>0$ c'est-à-dire : $2x+y+3$ est positif

b) Etudions le signe du nombre : $(3x+2)(3y+2)$

On a : $x > y > -\frac{2}{3}$ donc : $x > -\frac{2}{3}$ et $y > -\frac{2}{3}$

Donc : $3x > -2$ et $3y > -2$ c'est-à-dire : $3x+2>0$ et $3y+2>0$

Donc : $(3x+2)(3y+2)>0$ c'est-à-dire : $(3x+2)(3y+2)$ est positif

Donc : $(3x+2)(3y+2)>0\times 0$

2) Comparons les deux nombres suivants : $A=\frac{2x+3}{2y+3}$ et $B=\frac{2y+3}{2x+3}$

$$A-B=\frac{2x+3}{2y+3}-\frac{2y+3}{2x+3}=\frac{(2x+3)^2-(2y+3)^2}{(2x+3)(2y+3)}=\frac{\left[(2x+3)-(2y+3)\right]\left[(2x+3)+(2y+3)\right]}{(2x+3)(2y+3)}$$

$$A-B=\frac{(2x+3-2y-3)(2x+3+2y+3)}{(2x+3)(2y+3)}=\frac{(2x-2y)(2x+2y+6)}{(2x+3)(2y+3)}=\frac{4(x-y)(x+y+3)}{(2x+3)(2y+3)}$$

On a : $x > y > -\frac{2}{3}$ donc : $x > -\frac{2}{3}$ et $y > -\frac{2}{3}$

Donc : $x-y>0$ et $2x > -\frac{4}{3}$ et $2y > -\frac{4}{3}$ et $x+y > -\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$

Donc : $x-y>0$ et $2x+3 > -\frac{4}{3}+3$ et $2y+3 > -\frac{4}{3}+3$ et $x+y+3 > -\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+3$

Donc : $x-y>0$ et $2x+3 > \frac{5}{3} > 0$ et $2y+3 > \frac{5}{3} > 0$ et $x+y+3 > \frac{5}{3} > 0$

Donc : $\frac{4(x-y)(x+y+3)}{(2x+3)(2y+3)} > 0$

Donc : $A-B>0$ Par suite : $A>B$

Exercice6 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $|x-2|=4$ 2) $|x+5|=-3$

3) $|x+3|\leq 2$ 4) $|x-1|>5$ 5) $|3x-1|=|5x+2|$ 6) $|x+1|=4-|3x+2|$

7) $|x^2-2x+3|=2$

Corrigé :

1) On a les équivalences suivantes :

$|x-2|=4$ Signifie que : $x-2=4$ ou $x-2=-4$

Signifie que : $x=6$ ou $x=-2$

Donc : $S=\{-2;6\}$

2) $|x+5|=-3$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative :Donc : $S=\varnothing$

3)**Règle :** $|x-a|\leq r$ **est équivalente à :** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|x+3|\leq 2$ Signifie que : $-2\leq x+3\leq 2$

Signifie que : $-2-3\leq x+3-3\leq 2-3$

Signifie que : $-5\leq x\leq -1$

Donc : $S=[-5;-1]$

4) $|x-1|>5$

Règle : $|x-a|>r$ **est équivalente à :** $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$|x-1|>5$ Signifie que : $x-1>5$ ou $x-1<-5$

Signifie que : $x>6$ ou $x<-4$ Donc : $S=\left]-\infty;-4\right[\cup\left]6;+\infty\right[$

5) $|3x-1|=|5x+2|$

Égalité de deux valeurs absolues :

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|3x-1|=|5x+2|$ Signifie que : $3x-1=5x+2$ ou $3x-1=-(5x+2)$

Signifie que : $3x-5x=2+1$ ou $3x-1=-5x-2$

Signifie que : $-2x=3$ ou $8x=-1$

Signifie que : $x=-\frac{3}{2}$ ou $x=-\frac{1}{8}$

Donc : $S=\left\{-\frac{3}{2};-\frac{1}{8}\right\}$

6) $|x+1|=4-|3x+2|$

On a les équivalences suivantes :

$x+1\geq 0$ Signifie que : $x\geq -1$

$3x+2\geq 0$ Signifie que : $x\geq -\frac{2}{3}$

On distingue alors trois cas :

• Sur : $]-\infty;-1]$: $|x+1|=4-|3x+2|$ Signifie que : $-(x+1)=4-(-(3x+2))$

Signifie que : $-x-1=4+3x+2$

Signifie que : $-4x=7$

Signifie que : $x=-\frac{7}{4}\in]-\infty;-1]$

• Sur : $\left[-1;-\frac{2}{3}\right[$: $|x+1|=4-|3x+2|$ Signifie que : $x+1=4-(-(3x+2))$

Signifie que : $x+1=4+3x+2$ Signifie que : $-2x=5$

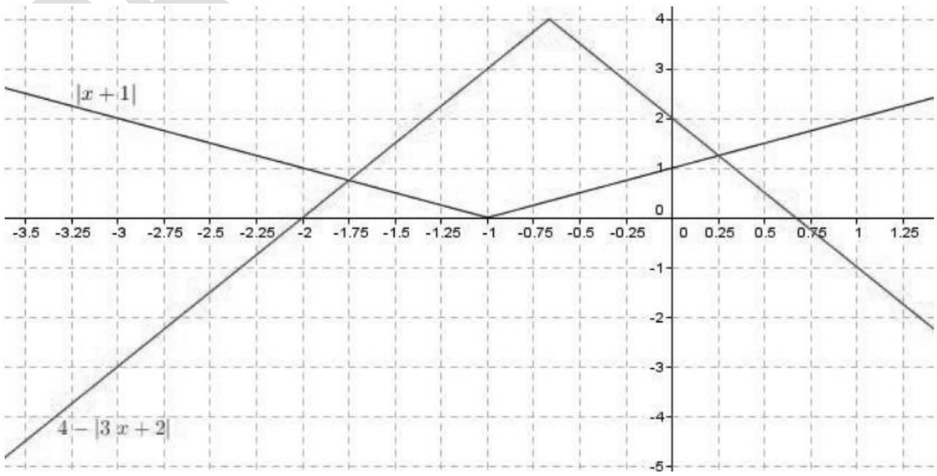
Signifie que : $x=-\frac{5}{2}\notin\left[-1;-\frac{2}{3}\right[$

• Sur : $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$: $|x+1|=4-|3x+2|$ Signifie que : $x+1=4-(3x+2)$

Signifie que : $x+1=4-3x-2$ Signifie que : $4x=1$

Signifie que : $x=\frac{1}{4}\in\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$

Au final : $S=\left\{-\frac{7}{4};\frac{1}{4}\right\}$ Ceci est confirmé par la lecture graphique suivante :



7) (E) ; $|x^2-2x+3|=2$

$|x^2-2x+3|=2$ Signifie que : $x^2-2x+3=2$ ou $x^2-2x+3=-2$

• Résolution de $x^2-2x+3=2$

$x^2-2x+3=2$ Signifie que : $x^2-2x+1=0$

Signifie que : $(x-1)^2=0$

Signifie que : $x-1=0$

Signifie que : $x=1$

La seule solution de $x^2-2x+3=2$ est 1.

• Résolution de $x^2-2x+3=-2$.

$x^2-2x+3=-2$ Signifie que : $x^2-2x+5=0$

On calcule son discriminant : $\Delta=-16$.

Ainsi l'équation $x^2-2x+5=0$ n'a aucune solution réelle

Au final, l'ensemble solution de (E) est S = {1}.

Exercice7 : (*) **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ algébriquement l'équation : $|x-3|=|x+5|$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ Graphiquement l'équation : $|x-2|=5$

Corrigé :1) **Résolvons notre équation algébriquement :**

Égalité de deux valeurs absolues :

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

D'après notre règle, on a donc les égalités suivantes :

$|x-3|=|x+5|$ Signifie que : $x-3=x+5$ ou $x-3=-(x+5)$

Signifie que : $-3=5$ (impossible) ou $x-3=-x-5$

Signifie que : $2x=-2$

Signifie que : $x=-1$ Donc : $S=\{-1\}$

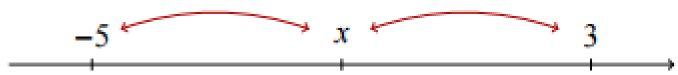
2) **Résolvons notre équation Graphiquement :** $|x-3|=|x-(-5)|$

La distance de x à 3 est égale à : $|x-3|$

La distance de x à −5 est égale à : $|x-(-5)|=|x+5|$

Déterminons les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 3 est égale à la distance de x à -5

Visualisons ce problème sur la droite des réels.



Graphiquement, nous nous apercevons que x doit être au milieu de l'intervalle $x\in[-5;3]$

Donc : $x=\frac{-5+3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

Donc : $S=\{-1\}$

Exercice8 : (*) 1) Compléter l'inégalité : $\ldots\leq x\leq\ldots$ de façon à traduire que 5,5 est une valeur approchée par défaut de x à la précision 0,3

2) Compléter l'inégalité : $\ldots\leq x\leq\ldots$ de façon à traduire que 5,5est une valeur approchée par excès de x à 0,3près.

3) Compléter l'inégalité : $\ldots\leq x\leq\ldots$ de façon à traduire que 5,5est une valeur approchée de x à 0,3 près.

4) Compléter l'inégalité : $|x-\ldots|\leq\ldots$ de façon à traduire que 5,5est une valeur approchée de x à 0,3 près

Corrigé :1) $5,5\leq x\leq 5,5+0.3$ c'est-à-dire : $\boxed{5,5\leq x\leq 5,8}$

2) $5,5-0.3\leq x\leq 5,5$ c'est-à-dire : $\boxed{5,2\leq x\leq 5,5}$

3) $|x-5,5|\leq 0.3$ c'est-à-dire : $-0,3\leq x-5,5\leq 0,3$ c'est-à-dire : $-0,3+5,5\leq x\leq 0,3+5,5$

L'inégalité est donc : $\boxed{5,2\leq x\leq 5,8}$

4) $|x-5,5|\leq 0.3$

Exercice9 : (**) 1) Développer et Calculer $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)^2$

3) On pose : $A=\sqrt{13-4\sqrt{10}}$ Simplifier A.

4) Sachant que : $1.414<\sqrt{2}<1.415$ et $2.236<\sqrt{5}<2.237$

Donner une approximation de A d'amplitude 3×10^{-3} par défaut et par excès

Corrigé :1) $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}+\left(2\sqrt{2}\right)^2=5-4\sqrt{10}+8$

Donc : $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)^2=13-4\sqrt{10}$

3) $A=\sqrt{13-4\sqrt{10}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right|$

On a : $\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$ et $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ donc $2\sqrt{2}>\sqrt{5}$ par suite : $\sqrt{5}-2\sqrt{2}\in\mathbb{R}^-$

Donc : $A=-\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$

Par suite : $A=\sqrt{13-4\sqrt{10}}=2\sqrt{2}-\sqrt{5}$

4) On a : $1.414<\sqrt{2}<1.415$ et $2.236<\sqrt{5}<2.237$ 1et $A=2\sqrt{2}-\sqrt{5}=2\sqrt{2}+\left(-\sqrt{5}\right)$

Donc : $2.828<2\sqrt{2}<2.830$ et $-2.237<-\sqrt{5}<-2.236$

Donc : $2.828+-2.237<2\sqrt{2}+\left(-\sqrt{5}\right)<2.830+-2.236$

Donc : $0.591<A<0.594$

D'où 0.591 est une approximation de A par défaut d'amplitude : $0.594-0.591=0.003=3\times10^{-3}$

Et 0.594 est une approximation de A par excès d'amplitude 3×10^{-3}

Exercice10 : (*) Ecrire les inégalités suivantes sous forme d'intervalles :

1) $3\leq x\leq 7$ 2) $\frac{2}{3}<x<\frac{5}{4}$ 3) $-3<x\leq 0$ 4) $-5\leq x<-8$ 5) $x\geq -5$

6) $x\leq 7$ 7) $x>\frac{6}{5}$ 8) $x<7$ 9) $x\leq 0$ ou $x\geq 0$ 10) $x<5$ et $x\geq -1$

Corrigé :1) $3\leq x\leq 7$ Equivaut à : $x\in[3;7]$.

2) $\frac{2}{3}<x<\frac{5}{4}$ Equivaut à : $x\in\left]\frac{2}{3};\frac{5}{4}\right[$.

3) $-3<x\leq 0$ équivaut à : $x\in]-3;0]$

4) $-5\leq x<-8$ équivaut à : $x\in[-5;-8[$

5) $x\geq -5$ équivaut à : $x\in[-5;+\infty[$

6) $x\leq 7$ équivaut à : $x\in]-\infty;7]$

7) $x>\frac{6}{5}$ équivaut à : $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

8) $x<7$ équivaut à : $x\in]-\infty,7[$

9) $x\leq 0$ ou $x\geq 0$ équivaut à : $x\in]-\infty;0]$ ou $x\in[0,+\infty[$

Équivaut à : $x\in]-\infty,0]\cup[0;+\infty[$ Équivaut à : $x\in]-\infty;+\infty[$

Par suite : $x\leq 0$ ou $x\geq 0$ équivaut à : $x\in]-\infty;+\infty[$

10) $x<5$ et $x\geq -1$ équivaut à : $x\in\left]-\infty;5\right[$ ou $x\in\left[-1,+\infty\right[$

Équivaut à : $x\in\left]-\infty;5\right[\cap\left[-1,+\infty\right[$ Équivaut à : $x\in\left[-1;5\right[$

Exercice11 : (*) Simplifier si c'est possible

1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] 2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6] 3)] -∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[

Corrigé : 1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] = [4 ; 5]

2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6] = [2 ; 6].

3)]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[= [-1 ; 2]

4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[=]-∞ ; +∞[

Exercice12 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{3x-1}{4}\leq\frac{5x+1}{6}$

Corrigé : On multiplie par le dénominateur commun, ici 12, ce qui Equivaut à :

$12\frac{3x-1}{4}\leq 12\frac{5x+1}{6}$) Equivaut à : $3(3x-1)\leq 2(5x+1)$

Equivaut à : $9x-10x\leq 3+2$

Equivaut à : $-x\leq 5$

On inverse la relation d'ordre car on change les signes de chaque côté de l'inéquation :

On divise par −13, on change donc la relation d'ordre, ce qui Equivaut à $x<\frac{3}{13}$

Equivaut à : $x\geq -5$

On conclut par l'intervalle solution : Donc : $S=\left[-5;+\infty\right[$

Exercice13 : (**) Déterminer un intervalle ouvert I sachant que son centre est -3 et son rayon est 4

Corrigé : Pour déterminer $\left]a;b\right[$ on va déterminer a et b.

On a donc : $\frac{a+b}{2}=-3$ et $\frac{b-a}{2}=4$

On va résoudre donc le système suivant : $\begin{cases}(1)\,a+b=-6\\(2)\,b-a=8\end{cases}$ $(1)+(2)$ Donne : $2b=2$ donc : $b=1$

Par suite : $a+1=-6$ donc : $a=-7$

Par conséquent : l'intervalle ouvert est : $I=\left]-7;1\right[$

Exercice14 : (**) *(Résolution des inéquations)*

Résoudre les inéquations suivantes : 1) $|x-1|\leq 2$ 2) $|x+2|\geq 3$ 3) $|2x+1|<6$

Corrigé :1)$|x-1|\leq 2$ Signifie que : $-2\leq x-1\leq 2$

Signifie : $-2+1\leq x-1+1\leq 2+1$

Signifie : $-1\leq x\leq 3$ donc : $S=[-1;3]$

2) $|x+2|\geq 3$ Signifie $x+2\geq 3$ ou $x+2\leq -3$

Signifie : $x\geq 1$ ou $x\leq -5$

Signifie : $x\in\left[1;+\infty\right[$ ou $x\in\left]-\infty;-5\right]$

Donc $S=\left]-\infty;-5\right]\cup\left[1;+\infty\right[$

3) $|2x+1|<6$ Signifie $-6<2x+1<6$

Signifie que : $-6-1<2x+1-1<6-1$ Signifie que : $-7<2x<5$

Signifie $-7\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<5\times\frac{1}{2}$

C'est-à-dire que : $\frac{-7}{2}<x<\frac{5}{2}$ donc : $S=\left]-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right[$

Exercice15 : (**) Soit : $x\in[4;6]$; On pose : $B=\frac{6x-1}{x-2}$

1) Donner un encadrement du nombre B et préciser son amplitude

2) a) Vérifier que : $B=6+\frac{11}{x-2}$

b) Déterminer un autre encadrement du nombre B et préciser son amplitude

3) Déterminer le plus fin des deux encadrements précédents de B

Corrigé :1) $x\in[4;6]$ Signifie que : $4\le x\le 6$

Encadrement de : $B=\frac{6x-1}{x-2}$

On a : $B=\frac{6x-1}{x-2}=(6x-1)\times\frac{1}{x-2}$ et on a $4\le x\le 6$

Donc $24\le 6x\le 36$

Donc : $23\le 6x-1\le 35$ ①

Et on a : $4\le x\le 6$ donc $4-2\le x-2\le 6-2$ C'est-à-dire : $2\le x-2\le 4$

Alors : $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x-2}\le\frac{1}{2}$ ②.

On fait la produit membre a membre de ① et② on trouve : $23\times\frac{1}{4}\le(6x-1)\times\frac{1}{x-2}\le 35\times\frac{1}{2}$

Donc $\frac{23}{4}\le B\le\frac{35}{2}$ est un encadrement du réel B d'amplitudes $r=\frac{35}{2}-\frac{23}{4}=\frac{70}{4}-\frac{23}{4}=\frac{43}{4}$

2) a) vérifions que : $B=6+\frac{11}{x-2}$

$$6+\frac{11}{x-2}=\frac{6(x-2)+11}{x-2}=\frac{6x-12+11}{x-2}=\frac{6x-1}{x-2}=B$$

D'où : $B=6+\frac{11}{x-2}$

b) Déterminons un autre encadrement du nombre B et précisons son amplitude

On a : $B=6+\frac{11}{x-2}$ et $4\le x\le 6$

Donc : $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x-2}\le\frac{1}{2}$ ②.(voir question1)

Donc : $\frac{11}{4}\le\frac{11}{x-2}\le\frac{11}{2}$

Donc : $\frac{11}{4}+6\le\frac{11}{x-2}+6\le\frac{11}{2}+6$ C'est-à-dire : $\frac{35}{4}\le B\le\frac{23}{2}$

Par suite : $\frac{35}{4}\le B\le\frac{23}{2}$ est un autre encadrement du nombre B et son amplitude est : $\frac{23}{2}-\frac{35}{4}=\frac{46}{4}-\frac{35}{4}=\frac{11}{4}$

3) Déterminons le plus fin des deux encadrements précédents de B :

Le plus fin des deux encadrements précédents de B : est celui qui a l'amplitude le plus petit

$\frac{23}{4}\le B\le\frac{35}{2}$ est un encadrement du réel B d'amplitudes $r=\frac{43}{4}$

$\frac{35}{4} \leq B \leq \frac{23}{2}$ est un encadrement du nombre B d'amplitude est : $r' = \frac{11}{4}$

Le plus fin des deux encadrements est : $\frac{35}{4} \leq B \leq \frac{23}{2}$ car $\frac{11}{4} < \frac{43}{4}$

Exercice16 : (***) $x \in [-3;2]$ **et** $y \in [-7;1]$

Trouver un encadrement de : $x+2y$ et $2x-y$ et $-5x+3y-8$ et xy.

Corrigé : $x \in [-3;2]$ Signifie $-3 \leq x \leq 2$ et $y \in [-7;1]$ Signifie $-7 \leq y \leq 1$

Donc : $-7\times 2 \leq 2y \leq 1\times 2$

Par suite : $-7\times 2+(-3) \leq 2y+x \leq 1\times 2+2$ c'est-à-dire : $-17 \leq 2y+x \leq 4$

On a : $-6 \leq 2x \leq 4$ et $-1 \leq -y \leq 7$

Donc $-6-1 \leq 2x-y \leq 4+7$ cad $-7 \leq 2x-y \leq 11$

On a : $-3 \leq x \leq 2$ donc : $-7 \leq y \leq 1$: et on a $-10 \leq -5x \leq 15$ donc : $-21 \leq 3y \leq 3$

Par suite : $-31 \leq -5x+3y \leq 18$

Par conséquent : $-23 \leq -5x+3y+8 \leq 26$.

<u>Encadrement de :</u> xy

On a : $-3 \leq x \leq 2$ et $-7 \leq y \leq 1$

1ére cas : $-3 \leq x \leq 0$ et $-7 \leq y \leq 0$ On a donc : $0 \leq -x \leq 3$ et $0 \leq -y \leq 7$

Alors on a : $0 \leq (-x)\times(-y) \leq 21$

Par suite : $0 \leq xy \leq 21$ (1)

2ére cas : $0 \leq y \leq 1$ et $-3 \leq x \leq 0$ On a donc : $0 \leq y \leq 1$ و $0 \leq -x \leq 3$

Alors on a : $0 \leq (-x)\times y \leq 3$

Par suite : (2) $-3 \leq xy \leq 0$

3ére cas : $-7 \leq y \leq 0$ et $0 \leq x \leq 2$ On a donc : $0 \leq -y \leq 7$ et $0 \leq x \leq 2$

Alors on a : $0 \leq (-y)\times x \leq 14$

Par suite : (3) $-14 \leq xy \leq 0$

4ére cas : $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq x \leq 2$ Alors on a : (4) $0 \leq xy \leq 2$

De : (1) ; (2) ; (4) et (3)

En déduit que : $-14 \leq xy \leq -21$.

Exercice17 : (***) Soit a un réel tel que : $\left|a+\frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4}$ On pose : $A = \frac{a}{a^2+1}$

1)En cadrer le nombre a et déduire que : $\frac{1}{2} < \frac{1}{a^2+1} < \frac{4}{5}$

2) Montrer que : $-\frac{4}{5} < A < -\frac{1}{4}$

3) En déduire que le nombre $-\frac{21}{40}$ est une valeur approchée de A à la précision $\frac{11}{40}$

Corrigé :1) $\left|a+\frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4}$ signifie que : $-\frac{1}{4} < a+\frac{3}{4} < \frac{1}{4}$

Signifie que : $-\frac{1}{4}-\frac{3}{4} < a+\frac{3}{4}-\frac{3}{4} < \frac{1}{4}-\frac{3}{4}$ Signifie que : $\boxed{-1 < a < -\frac{1}{2}}$

On a donc : $-1 < a < -\frac{1}{2}$ donc : $\frac{1}{2} < -a < 1$ donc : $\frac{1}{4} < (-a)^2 < 1$ donc : $\frac{1}{4}+1 < a^2+1 < 1+1$

Donc : $\frac{5}{4} < a^2+1 < 2$ Donc : $\boxed{\frac{1}{2} < \frac{1}{a^2+1} < \frac{4}{5}}$

2) Montrons que : $-\frac{4}{5} < A < -\frac{1}{4}$

On a : $\frac{1}{2} < \frac{1}{a^2+1} < \frac{4}{5}$ et $\frac{1}{2} < -a < 1$ donc : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} < \frac{1}{a^2+1} \times (-a) < \frac{4}{5} \times 1$

Donc : $\frac{1}{4} < -\frac{a}{a^2+1} < \frac{4}{5}$

Donc : $-\frac{4}{5} < \frac{a}{a^2+1} < -\frac{1}{4}$

Donc : $-\frac{4}{5} < A < -\frac{1}{4}$

3) En déduisons que le nombre $-\frac{21}{40}$ est une valeur approchée de A à la précision $\frac{11}{40}$

On a : $-\frac{4}{5} < A < -\frac{1}{4}$ donc : $-\frac{4}{5} + \frac{21}{40} < A - \left(-\frac{21}{40}\right) < -\frac{1}{4} + \frac{21}{40}$

Donc : $-\frac{32}{40} + \frac{21}{40} < A - \left(-\frac{21}{40}\right) < -\frac{10}{40} + \frac{21}{40}$

Donc : $-\frac{11}{40} < A - \left(-\frac{21}{40}\right) < \frac{11}{40}$

Donc : $\left|A - \left(-\frac{21}{40}\right)\right| < \frac{11}{40}$

Par suite : le nombre $-\frac{21}{40}$ est une valeur approchée de A à la précision $\frac{11}{40}$

Exercice18 : (***) 1) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ on a : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

b) En déduire que : si $|x| \le \frac{1}{2}$ alors $\left|\frac{1}{1-x} - (1+x)\right| \le 2x^2$

2) Donner une valeur approchée du nombre : $\frac{1}{0,99}$ à 2×10^{-4} près

Corrigé : 1) a) Soit : $x \in \mathbb{R} - \{1\}$; $1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x} = \frac{1^2 - x^2 + x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

b) Soit : $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ tel que : $|x| \le \frac{1}{2}$

On a : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

Donc : $\frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{x^2}{1-x}$

Donc : $\left|\frac{1}{1-x} - (1+x)\right| = \left|\frac{x^2}{1-x}\right|$

C'est-à-dire : $\left|\frac{1}{1-x} - (1+x)\right| = \frac{x^2}{|1-x|}$ (1) Car : $x^2 \ge 0$

On a : $|x| \le \frac{1}{2}$ Donc : $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2} \le -x \le \frac{1}{2}$

Donc : $1 - \frac{1}{2} \le 1 - x \le 1 + \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{2} \le 1 - x \le \frac{3}{2}$ et par suite : $\frac{2}{3} \le \frac{1}{1-x} \le 2$ donc : $-2 \le \frac{2}{3} \le \frac{1}{1-x} \le 2$

Par suite : $\frac{1}{|1-x|} \leq 2$ et puisque : $x^2 \geq 0$ alors : $\frac{x^2}{|1-x|} \leq 2x^2$ et d'après l'égalité (1)

On a donc : $\left|\frac{1}{1-x} - (1+x)\right| \leq 2x^2$

2) Déterminons une valeur approchée du nombre : $\frac{1}{0,99}$ à 2×10^{-4} près ???

D'après 1) b) on donne à x la valeur : $x = 10^{-2}$ et puisque $\left|10^{-2}\right| \leq \frac{1}{2}$

Alors : $\left|\frac{1}{1-10^{-2}} - \left(1+10^{-2}\right)\right| \leq 2\times\left(10^{-2}\right)^2$

C'est-à-dire on a : $\left|\frac{1}{1-0,01} - (1+0,01)\right| \leq 2\times10^{-4}$

Donc : $\left|\frac{1}{0,99} - 1,01\right| \leq 2\times10^{-4}$ et par suite : $1,01$ est une valeur approchée du nombre : $\frac{1}{0,99}$ à 2×10^{-4} près

Exercice19 : (***) On pose : $A = \sqrt{x^2+1} - |x|$ et $B = \sqrt{x^2+1} + |x|$

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $A > 0$

b) En déduire que : $B > 2|x|$

2) Calculer : $A \times B$ et déduire que : $A \leq \frac{1}{2|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

3) En déduire que : $|x| < \sqrt{1+x^2} < |x| + \frac{1}{2|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

4) Donner un encadrement pour le nombre : $\frac{\sqrt{122}}{3}$ d'amplitude $\frac{1}{66}$

Corrigé : 1) a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $A > 0$

$$A = \sqrt{x^2+1} - |x| = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - |x|\right)\left(\sqrt{x^2+1} + |x|\right)}{\sqrt{x^2+1} + |x|} = \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - |x|^2}{\sqrt{x^2+1} + |x|} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + |x|}$$ car $|x|^2 = x^2$

Donc : $A = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + |x|} > 0$

Ceci signifie que A > 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Déduisons que : $B > 2|x|$

Soit : $x \in \mathbb{R}$

$B - 2|x| = \sqrt{x^2+1} + |x| - 2|x|$

Donc : $B - 2|x| = \sqrt{x^2+1} - |x| = A > 0$

Par suite : $B > 2|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2) Calculons : $A \times B$

$$A \times B = \left(\sqrt{x^2+1} - |x|\right)\left(\sqrt{x^2+1} + |x|\right)$$

$A \times B = \sqrt{x^2+1}^2 - |x|^2 = x^2+1-x^2$ car $|x|^2 = x^2$

Donc : $A \times B = 1$

Déduisons que : $A \leq \frac{1}{2|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

Soit : $x \in \mathbb{R}^*$: On a $A \times B = 1$ donc : $B = \frac{1}{A}$ et puisque : $B > 2|x|$

Alors : $\frac{1}{A} > 2|x|$ et par suite : : $A \leq \frac{1}{2|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

3) Déduisons que : $|x| < \sqrt{1+x^2} < |x| + \frac{1}{2|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

Soit : $x \in \mathbb{R}^*$

On a : $A > 0$ alors $\sqrt{x^2+1} - |x| > 0$ donc : $|x| < \sqrt{x^2+1}$ ①

D'autre part, on a : $A \leq \frac{1}{2|x|}$ alors $\sqrt{x^2+1} - |x| \leq \frac{1}{2|x|}$

Donc : $\sqrt{x^2+1} \leq |x| + \frac{1}{2|x|}$ ②

D'après ①et ② on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $|x| < \sqrt{1+x^2} < |x| + \frac{1}{2|x|}$

4) On prend : $x = 11$ alors on obtient d'après l'encadrement $|x| < \sqrt{1+x^2} < |x| + \frac{1}{2|x|}$:

On a alors : $|11| < \sqrt{1+11^2} < |11| + \frac{1}{2|11|}$ c'est-à-dire : $11 < \sqrt{122} < 11 + \frac{1}{22}$

C'est-à-dire : $11 < \sqrt{122} < \frac{243}{22}$ et par suite : $\frac{11}{3} < \frac{\sqrt{122}}{3} < \frac{243}{66}$ © avec : $\frac{243}{66} - \frac{11}{3} = \frac{1}{66}$

$\frac{11}{3} < \frac{\sqrt{122}}{3} < \frac{243}{66}$: est un encadrement pour le nombre : $\frac{\sqrt{122}}{3}$ d'amplitude $\frac{1}{66}$

Exercice20 : (***) Soit $a \geq 1$ on pose : $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$

1) Montrer que : $a(A+1)(A-1) = 1$

2) a) Montrer que : $2 \leq A+1 \leq 3$

b) En déduire que : $1 + \frac{1}{3a} \leq A \leq 1 + \frac{1}{2a}$

3) Montrer que : 1,1 est une valeur approchée de $\sqrt{1,2}$ a $\frac{1}{30}$ prés

Corrigé :1) $a \geq 1$ et $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$

Montrons que : $a(A+1)(A-1) = 1$?

On a : $(A+1)(A-1) = A^2 - 1 = \left(\sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)^2 - 1$

Donc : $(A+1)(A-1) = 1 + \frac{1}{a} - 1 = \frac{1}{a}$

Donc : $(A+1)(A-1) = \frac{1}{a}$ et par suite : $a(A+1)(A-1) = 1$

2) Montrons que : $2 \leq A+1 \leq 3$?

On a : $a \geq 1 > 0$ donc : $\frac{1}{a} \geq 0$ donc : $\frac{1}{a} + 1 \geq 1$

Donc : $A \geq 1$ donc : $A+1 \geq 2$ (1)

On a : $a \geq 1$ donc : $\frac{1}{a} \leq 1$ alors : $1+\frac{1}{a} \leq 2$

Donc : $A \leq \sqrt{2}$ par suite : $A+1 \leq \sqrt{2}+1 \leq 3$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $2 \leq A+1 \leq 3$

Et on a : $a(A+1)(A-1)=1$ donc : $A-1=\frac{1}{a(A+1)}$

D'autre part on a : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{A+1} \leq \frac{1}{2}$ donc : $\frac{1}{3a} \leq \frac{1}{a(A+1)} \leq \frac{1}{2a}$

Donc : $\frac{1}{3a} \leq A-1 \leq \frac{1}{2a}$

Donc : $\frac{1}{3a}+1 \leq A \leq \frac{1}{2a}+1$

3) On a $1,2=1+0,2=1+\frac{1}{5}$ donc $A=\sqrt{1,2}=\sqrt{1+\frac{1}{5}}$ par suite : $a=5$

$\frac{1}{15}+1 \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{1}{10}+1$ Equivaut à : $\frac{16}{15} \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{11}{10}$

Signifie que : $\frac{32}{30} \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{33}{30}$ et on a $\frac{33}{30}-\frac{32}{30}=\frac{1}{30}$ $\left(\frac{33}{30}=1,1\right)$

Donc : $1,1$ est une valeur approchée de $\sqrt{1,2}$ a $\frac{1}{30}$ prés

Exercice21 : (***) Soient a et b et c des nombres réels positifs.

Montrer que : $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$

Corrigé Soient a et b et c des nombres réels positifs. On a : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$

Donc : $\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$

Donc : $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$

C'est-à-dire : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.(1)

De même on a : $b+c \geq 2\sqrt{bc}$.(2)

De même on a : $a+c \geq 2\sqrt{ac}$.(3)

Par suite : $(1)\times(2)\times(3)$ donne : $(a+b)\times(b+c)\times(a+c) \geq 2\sqrt{bc}\times 2\times\sqrt{ab}\times 2\sqrt{ac}$

Donc : $(a+b)\times(b+c)\times(a+c) \geq 8\sqrt{abbcac}$

C'est-à-dire : $(a+b)\times(b+c)\times(a+c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$

Donc : $(a+b)\times(b+c)\times(a+c) \geq 8|abc|$ et puisque : $abc \geq 0$.

Alors : $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien