Tronc commun Sciences BIOF

La correction Série N°2 : L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Exercice1 : (*) I) Comparer les nombres a et b dans chacun des cas suivants :

1) $a=-3$ et $b=\sqrt{0,000001}$ 2) $a=-\frac{1+\sqrt{7}}{-3}$ et $b=\frac{624\sqrt{2}+1}{-5}$ 3) $a=\frac{-2}{-356}$ et $b=\pi-4$

4) $a=\frac{375}{248}$ et $b=\frac{374}{248}$ 5) $a=\frac{0;9}{0,98}$ et $b=\frac{1}{1,1}$ 6) $a=\frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{5}}$ et $b=\frac{\sqrt{2}+1}{5\sqrt{3}}$

Corrigé : 1) On compare $a=-3$ et $b=\sqrt{0,000001}$

On a : $a<0$ et $b>0$

Donc : $a<b$

2) On compare : $a=-\frac{1+\sqrt{7}}{-3}$ et $b=\frac{624\sqrt{2}+1}{-5}$

On a : $a=-\frac{1+\sqrt{7}}{-3}=\frac{1+\sqrt{7}}{3}>0$ et $b=-\frac{624\sqrt{2}+1}{5}<0$

Donc $a>b$

3) On compare : $a=\frac{-2}{-356}$ et $b=\pi-4$

On a : $a=\frac{2}{356}>0$ et $b=\pi-4<0$ car $\pi<4$

Donc $a>b$

4) On compare : $a=\frac{375}{248}$ et $b=\frac{374}{248}$

On a : $374<375$ et puisque a et b ont le même dénominateur alors : $a>b$

5) On compare : $a=\frac{0;9}{0,98}$ et $b=\frac{1}{1,1}$

On a : $b=\frac{1}{1,1}=\frac{1\times 0,9}{1,1\times 0,9}=\frac{0,9}{0,979}$

On a : $0,979<0,98$ et puisque a et b ont le même numérateur

Alors : $a<b$

6) On compare : $a=\frac{3\sqrt{2}-5}{3\sqrt{7}}$ et $b=\frac{\sqrt{3}-1}{7\sqrt{19}}$

On a : $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ et $5^2=25$ donc : $3\sqrt{2}<5$ c'est-à-dire : $3\sqrt{2}-5<0$

Donc : $a=\frac{3\sqrt{2}-5}{3\sqrt{7}}<0$ et d'autre part on a : $1<\sqrt{3}$ puisque : $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $1^2=1$

Donc : $b=\frac{\sqrt{3}-1}{7\sqrt{19}}>0$ et alors : $a<b$

Exercice2: (**) Soient : a ; b deux réels distincts et strictement positifs.

Comparer les nombres x et y dans chacun des cas suivants :

1) $x=\frac{2a+1}{a}$ et $y=\frac{a}{2a+1}$ 2) $x=\frac{a^2+b^2}{ab}$ et $y=2$ 3) $x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et $y=\frac{2}{a+b}$

4) $x=(2a-1)(3b-5)$ et $y=6ab+5$

Corrigé : Soient $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $b\in\mathbb{R}^{*+}$

1) Comparons : $x=\frac{2a+1}{a}$ et $y=\frac{a}{2a+1}$

On a : $x-y=\frac{2a+1}{a}-\frac{a}{2a+1}=\frac{(2a+1)^2-a^2}{a(2a+1)}=\frac{(2a+1-a)(2a+1+a)}{a(2a+1)}=\frac{(a+1)(3a+1)}{a(2a+1)}$

Or : $a\in\mathbb{R}^{*+}$ donc : $\frac{(a+1)(3a+1)}{a(2a+1)}>0$

Par suite : $x-y>0$

Donc : $x>y$

2) Comparons : $x=\frac{a^2+b^2}{ab}$ et $y=2$

On a : $x-y=\frac{a^2+b^2}{ab}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}$

Or : $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $b\in\mathbb{R}^{*+}$ donc : $ab>0$ et $(a-b)^2\geq 0$

Par suite : $x-y\geq 0$

Donc : $x\geq y$

3) Comparons : $x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et $y=\frac{2}{a+b}$

On a : $x-y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{a+b}=\frac{a+b}{ab}-\frac{2}{a+b}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab(a+b)}=\frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{ab(a+b)}$

Donc : $x-y=\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)}$

Or : $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $b\in\mathbb{R}^{*+}$ donc : $ab>0$ et $a^2+b^2>0$ et $a+b>0$

Par suite : $x-y>0$

Donc : $x>y$

4) Comparons : $x=(2a-1)(3b-5)$ et $y=6ab+5$

On a : $x-y=(2a-1)(3b-5)-(6ab+5)$

Donc : $x-y=6ab-10a-3b+5-6ab-5$

Donc : $x-y=-10a-3b=-(10a+3b)$

Or : $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $b\in\mathbb{R}^{*+}$ donc : $10a+3b>0$ et et donc : $-(10a+3b)<0$

Par suite : $x-y<0$ et donc : $x<y$

Exercice3 : (**) Soient $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $b\in\mathbb{R}^{*+}$ Comparer : $x=\frac{7a+2b}{7a}$ et $y=\frac{8b}{7a+2b}$

Corrigé : On a : $x-y=\frac{7a+2b}{7a}-\frac{8b}{7a+2b}$

Donc : $x-y=\frac{(7a+2b)^2-7a\times 8b}{7a(7a+2b)}$

Donc : $x-y=\frac{49a^2+14ab+14ab+4b^2-56a\times b}{7a(7a+2b)}$

Donc : $x-y=\frac{49a^2-28a\times b+4b^2}{7a(7a+2b)}=\frac{(7a)^2-2\times 7a\times 2b+(2b)^2}{7a(7a+2b)}$

Donc : $x-y=\frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)}\in\mathbb{R}^{+}$ Car : $7a(7a+2b)\in\mathbb{R}^{+}$ et $(7a-2b)^2\in\mathbb{R}^{+}$

D'où : $x\geq y$

Exercice4 :(**) Soient $x \in \mathbb{R}^{*+}$; $y \in \mathbb{R}^{*+}$ et $x \neq y$

Donner le signe du quotient suivant :. $Z = \dfrac{x^2 - y^2}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}}$

Corrigé : $x > 0$ et $y > 0$ et $x \neq y$

$$Z = \frac{x^2 - y^2}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} = \frac{x^2 - y^2}{\dfrac{y - x}{xy}} = (x-y)(x+y) \times \frac{xy}{y-x}$$

Donc : $Z = (x-y)(x+y) \times \dfrac{xy}{-(x-y)} = -xy(x+y)$

On a : $x > 0$ et $y > 0$ donc $xy > 0$ c'est-à-dire : $-xy < 0$ Et on a : $x + y > 0$ par suite : $Z < 0$.

Exercice5 : (**) Traduire chacune des inégalités suivantes ou encadrements par l'appartenance à un intervalle qui convient :

1) $x \geq -3$ 2) $x < 5$ 3) $1 \leq 2x \leq 4$ 4) $0 < 6x - 2 \leq 10$ 5) $-8 \leq 2 - 2x \leq 6$

6) $x > -2$ et $x \leq 2$ 7) $x \leq 0$ ou $x > 0$ 8) $x > 1$ et $x \leq 0$ 9) $|x-2| < 1$

10) $|x+1| \geq 2$ 11) $1 < |x-1| < 2$

Corrigé :1) $x \geq -3$ Equivaut à : $x \in [-3, +\infty[$.

2) $x < 5$ Equivaut à : $x \in]-\infty, 5[$.

3) $1 \leq 2x \leq 4$ équivaut à : $\frac{1}{2} \times 1 \leq \frac{1}{2} \times 2x \leq 4 \times \frac{1}{2}$ Signifie que : $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ c'est à dire : $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

4) $0 < 6x - 2 \leq 10$ équivaut à : $0 + 2 < 6x - 2 + 2 \leq 10 + 2$ équivaut à : $2 < 6x \leq 12$

Équivaut à : $2 \times \frac{1}{2} < 6x \times \frac{1}{2} \leq 12 \times \frac{1}{2}$ c'est à dire : $1 < 3x \leq 6$

Équivaut à : $1 \times \frac{1}{3} < 3x \times \frac{1}{3} \leq 6 \times \frac{1}{3}$

Équivaut à : $\frac{1}{3} < x \leq 2$ c'est à dire : $x \in \left]\frac{1}{3}, 2\right]$

5) $-8 \leq 2 - 2x \leq 6$ Équivaut à : $-8 - 2 \leq 2 - 2x - 2 \leq 6 - 2$

Équivaut à : $-10 \leq -2x \leq 4$ 2quivaut à : $-10 \times \frac{1}{2} \leq -2x \times \frac{1}{2} \leq 4 \times \frac{1}{2}$

Équivaut à : $-5 \leq -x \leq 2$ c'est à dire : $x \in [-2, 5]$ Équivaut $-2 \leq x \leq 5$

6) $x > -2$ et $x \leq 2$

Signifie que : $x \in]-2; +\infty[$ et $x \in]-\infty, 2]$

Signifie que : $x \in]-2; +\infty[\cap]-\infty, 2]$

Signifie que : $x \in]-2; 2]$

7) $x \leq 0$ ou $x > 0$ signifie : $x \in]-\infty, 0]$ ou $x \in]0; +\infty[$ Signifie que : $x \in]-\infty, 0] \cup]0; +\infty[$

Par suite : $x \in \mathbb{R}$

8) $x > 1$ et $x \leq 0$ signifie : $x \in]1; +\infty[$ et $x \in]-\infty, 0]$ Signifie que: $x \in]-\infty, 0] \cap]1; +\infty[$

Par suite : $x \in \varnothing$

9) $|x - 2| < 1$ signifie $-1 < x - 2 < 1$

C'est-à-dire : $-1 + 2 < x - 2 + 2 < 1 + 2$

Signifie $1 < x < 3$ c'est-à-dire que : $x \in]1; 3[$

10) $|x+1|\geq 2$ signifie $x+1\geq 2$ ou $x+1\leq -2$

Signifie que : $x\geq 1$ ou $x\leq -3$

Par suite : $x\in \left]-\infty;-3\right]\cup\left[1;+\infty\right[$

11) $\begin{cases}|x-1|<2\\|x-1|>1\end{cases}$ Signifie $1<|x-1|<2$

Signifie : $\begin{cases}-2<x-1<2\\ et \\ x-1<-1 \text{ ou } x-1>1\end{cases}$ ssi $\begin{cases}-1<x<3\\ et \\ x<0 \text{ ou } x>2\end{cases}$

C'est-à-dire que : $x\in \left]-1;3\right[\cap\left(\left]-\infty;0\right[\cup\left]2;+\infty\right]\right)$

C'est-à-dire que : $x\in \left]-1;3\right[\cap\left]-\infty;0\right[\cup\left]-1;3\right[\cap\left]2;+\infty\right]$

Signifie $x\in \left]-1;0\right[\cup\left]2;3\right[$

Exercice6 : (**) Calculer le rayon de l'intervalle $I=\left[\frac{1}{2};b\right]$ sachant que son centre est : $c=\frac{7}{2}$

Corrigé : Le rayon de l'intervalle I est $r=\frac{b-\frac{1}{2}}{2}$

Nous allons calculer la deuxième borne b :

Nous avons le centre $c=\frac{7}{2}$ et nous savons que : $c=\frac{b+\frac{1}{2}}{2}$ D'où : $\frac{7}{2}=\frac{b+\frac{1}{2}}{2}$ ou encore : $2\frac{7}{2}=b+\frac{1}{2}$

Donc : $b=\frac{13}{2}$. Par suite : $r=\frac{\frac{13}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{6}{2}=3$

Exercice7: On donne l'intervalle]2 ; 10[.

Déterminer cet intervalle avec une valeur absolue.

Corrigé : Règle 5 : Un intervalle peut être donné sous la forme : $|x-c|<r$ ou $|x-c|\leq r$

Les nombres c et r représentent respectivement le centre et le rayon de cet l'intervalle.

On détermine alors le centre c et le rayon r de l'intervalle : $]2;10[$

$c=\frac{10+2}{2}=6$ et $r=10-6=4$

Comme 2 et 10 sont exclus de l'intervalle, l'inégalité sera stricte, on obtient donc :

$|x-6|<4$

Exercice8 : (**) Soit x un élément de l'intervalle $\left]6,+\infty\right[$; Montrer que : $2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\succ 0,5$

En utilisant les propriétés de l'ordre.

Corrigé : On a $x\in\left]6;+\infty\right[$ donc : $x\succ 6$

Donc : $\frac{1}{x}\prec\frac{1}{6}$ par suite : $\frac{2}{x}\prec\frac{2}{6}$ car $2\succ 0$

C'est-à-dire : $\frac{2}{x}\prec\frac{1}{3}$ donc : $-\frac{2}{x}\succ-\frac{1}{3}$ ①

Or on a : $\frac{3}{x^2}\geq 0$ ② car $x^2\geq 0$ et $3\geq 0$

① + ② donne : $-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\succ-\frac{1}{3}$ et on ajoute 2 on trouve : $2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\succ 2-\frac{1}{3}$

C'est-à-dire : $2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\succ\frac{5}{3}$ or on a : $\frac{5}{3}\succ 0.5$

Donc : $2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\succ 0,5$

Exercice9: (**) 1) Résoudre les équations : a) $|3x-2|=6$ b) $|-3x-1|=-3$ c) $|3x+1|=|4x-2|$

2) Résoudre les inéquations : a) $|4x-7|\leq 2$ b) $|8x+3|\geq\frac{1}{4}$ c) $1\leq|6x-3|\leq 4$

Corrigé :1) a) Résolution de l'équation : $|3x-2|=6$

On a les équivalences suivantes :

$|3x-2|=6$ Signifie que : $3x-2=6$ ou $3x-2=-6$

Signifie que : $3x=8$ ou $3x=-4$

Signifie que : $x=\frac{8}{3}$ ou $x=-\frac{4}{3}$

Donc : $S=\left\{-\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right\}$

b) Résolution de l'équation : $|-3x-1|=-3$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative

Donc : $S=\varnothing$

c) Résolution de l'équation : $|2x+1|=|3x-4|$

Égalité de deux valeurs absolues :

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|3x+1|=|4x-2|$ Signifie que : $3x+1=4x-2$ ou $3x+1=-(4x-2)$

Signifie que : $-x=-3$ ou $3x+1=-4x+2$

Signifie que : $x=3$ ou $7x=1$

Signifie que : $x=3$ ou $x=\frac{1}{7}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{7};3\right\}$

5)a) Résolution de l'inéquation : $|4x-7|\leq 2$

Règle : $|x-a|\leq r$ **est équivalente à :** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|4x-7|\leq 2$ Signifie que : $-2\leq 4x-7\leq 2$

Signifie que : $-2+7\leq 4x-7+7\leq 2+7$

Signifie que : $5\leq 4x\leq 9$

Signifie que : $\frac{5}{4}\leq x\leq\frac{9}{4}$

Donc : $S=\left[\frac{5}{4};\frac{9}{4}\right]$

b) Résolution de l'inéquation : $|8x+3|\geq\frac{1}{4}$

Règle : $|x-a|>r$ **est équivalente à :** $x-a\geq r$ ou $x-a\leq -r$ avec $r>0$

$|8x+3|\geq\frac{1}{4}$ Signifie que : $8x+3\geq\frac{1}{4}$ ou $8x+3\leq-\frac{1}{4}$

Signifie que : $8x\geq\frac{1}{4}-3$ ou $8x\leq-\frac{1}{4}-3$

Signifie que : $8x\geq-\frac{11}{4}$ ou $8x\leq-\frac{13}{4}$

Signifie que : $x\geq-\frac{11}{32}$ ou $x\leq-\frac{13}{32}$

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{13}{32}\right]\cup\left[-\frac{11}{32};+\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $1\leq|6x-3|\leq 4$

$2\leq|10x+2|\leq 5$ Signifie que : $|6x-3|\leq 4$ et $|6x-3|\geq 1$

• Résolution de l'inéquation : $|6x-3|\leq 4$

$|6x-3|\leq 4$ Signifie que : $-4\leq 6x-3\leq 4$

Signifie que : $-4+3\leq 6x-3+3\leq 4+3$

Signifie que : $-1\leq 6x\leq 7$

Signifie que : $-\frac{1}{6}\leq x\leq\frac{7}{6}$

Donc : $S_1=\left[-\frac{1}{6};\frac{7}{6}\right]$

• Résolution de l'inéquation : $|6x-3|\geq 1$

$|6x-3|\geq 1$ Signifie que : $6x-3\geq 1$ ou $6x-3\leq -1$

Signifie que : $6x\geq 4$ ou $6x\leq 2$

Signifie que : $x\geq\frac{4}{6}$ ou $x\leq\frac{2}{6}$

Signifie que : $x\geq\frac{2}{3}$ ou $x\leq\frac{1}{3}$

Donc : $S_2=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$

Finalement on a : $S=S_1\cap S_2=\left[-\frac{1}{6};\frac{7}{6}\right]\cap\left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[\right)$

Donc : $S=\left[-\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};\frac{7}{6}\right]$

Exercice10 : (***) 1)Simplifier : $E=\sqrt{\frac{1}{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}}-\sqrt{\frac{1}{\left(3+\sqrt{10}\right)^2}}$

2) Soient x et y deux réels tels que : $3<x<y$

Simplifier : $F=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(3-x)^2}-|y-2|$

3) Soient x et y deux réels tels que : $x\in\left]-2;5\right[$ et $y\in\left]-3;-1\right[$

Simplifier : $G=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

Corrigé : 1) Simplifions : $E=\sqrt{\frac{1}{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}}-\sqrt{\frac{1}{\left(3+\sqrt{10}\right)^2}}$

$$E=\sqrt{\left(\frac{1}{3-\sqrt{10}}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{3+\sqrt{10}}\right)^2}=\left|\frac{1}{3-\sqrt{10}}\right|-\left|\frac{1}{3+\sqrt{10}}\right|=\frac{1}{\left|3-\sqrt{10}\right|}-\frac{1}{\left|3+\sqrt{10}\right|}$$

$E=\dfrac{1}{-\left(3-\sqrt{10}\right)}-\dfrac{1}{3+\sqrt{10}}$ Car : $3-\sqrt{10}<0$ $(3^2=9\ ;\ \sqrt{10}^2=10)$ et $3+\sqrt{10}>0$

$$E=\frac{-1}{3-\sqrt{10}}-\frac{1}{3+\sqrt{10}}=\frac{-\left(3+\sqrt{10}\right)-\left(3-\sqrt{10}\right)}{\left(3+\sqrt{10}\right)\left(3-\sqrt{10}\right)}=\frac{-6}{3^2-\sqrt{10}^2}=\frac{-6}{9-10}=6$$

1) Simplifions : $F=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(3-x)^2}-|y-2|$

Soient x et y deux réels tels que : $3<x<y$

$F=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(3-x)^2}-|y-2|$

$F=|x-y|+|3-x|-|y-2|$

On a : $3<x<y$ alors $x<y$ et donc : $x-y<0$

On a : $3<x<y$ alors $3<x$ et donc : $3-x<0$

On a : $3<x<y$ et $2<3$ et donc : $2<3<x<y$ et donc : $2<y$ et alors : $y-2>0$

Donc : $F=-(x-y)-(3-x)-(y-2)$

Donc : $F=-x+y-3+x-y+2$

Donc : $\boxed{F=-1}$

3) Simplifions : $G=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

Soient x et y deux réels tels que : $x\in\left]-2;5\right[$ et $y\in\left]-3;-1\right[$

On a : $x\in\left]-2;5\right[$ donc : $-2<x<5$ et donc : $-4<2x<10$ et par suite : $3<2x+7<17$

Donc : $0<2x+7$ et alors : $|2x+7|=2x+7$: (1)

On a : $y\in\left]-3;-1\right[$ donc : $-3<y<-1$ et donc : $-9<3y<-3$ par suite : $3y<0$

Et alors : $|3y|=-3y$: (2)

On a : $-3<y<-1$ donc : $5<y+8<7$ par suite : $0<y+8$ et alors : $|y+8|=y+8$: (3)

On a : $-2<x<5$ donc : $-5<-x<2$ et $-6<2y<-2$ et on a : $2y-x=2y+(-x)$

Donc : $-6+(-5)<2y-x<-2+2$

Donc : $-11<2y-x<0$ par suite : $|2y-x|=-(2y-x)=-2y+x$: (4)

D'après (1); (2) ; (3) et (4) on obtient : $G=2(2x+7)+3y+2(y+8)+2y-x$

Donc : $G=4x+14+3y+2y+16+2y-x$

Donc : $G=3x+7y+30$

Exercice11 : (***) $x\in[2;5]$ **et** $y\in[-4;-2]$

Trouver un encadrement de : xy et $\dfrac{x}{y}$ et $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

Corrigé : $x\in[2;5]$ Signifie $2\le x\le 5$ et $y\in[-4;-2]$ Signifie $-4\le y\le -2$

On encadre : xy

Donc : $\begin{cases}2\le x\le 5\\ 2\le -y\le 4\end{cases}$ Donc : $2\times 2\le x(-y)\le 5\times 4$

Donc : $4 \le -xy \le 20$

Donc : $\boxed{-20 \le xy \le -4}$

On encadre : $\frac{x}{y}$

On a : $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$

Comme : $\begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ 2 \le -y \le 4 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ \frac{1}{4} \le -\frac{1}{y} \le \frac{1}{2} \end{cases}$ alors : $2 \times \frac{1}{4} \le -x\frac{1}{y} \le 5 \times \frac{1}{2}$ alors : $\frac{1}{2} \le -\frac{x}{y} \le \frac{5}{2}$

Par suite : $\boxed{-\frac{5}{2} \le \frac{x}{y} \le -\frac{1}{2}}$

On encadre : $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$

On a : $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = \left(x^2 + y^2\right) \times \frac{1}{x - y}$

On a : $\begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ 2 \le -y \le 4 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} 2^2 \le x^2 \le 5^2 \\ 2^2 \le (-y)^2 \le 4^2 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} 4 \le x^2 \le 25 \\ 4 \le y^2 \le 16 \end{cases}$

Par suite : $8 \le x^2 + y^2 \le 41$ ①

D'autre part on a : $\begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ 2 \le -y \le 4 \end{cases}$ donc : $2 + 2 \le x + (-y) \le 5 + 4$

Par suite : $4 \le x - y \le 9$ et donc : $\frac{1}{9} \le \frac{1}{x - y} \le \frac{1}{4}$ ②

D'après ① et ② on en déduit que : $8 \times \frac{1}{9} \le \left(x^2 + y^2\right) \times \frac{1}{x - y} \le 41 \times \frac{1}{4}$

Par suite : $\boxed{\frac{8}{9} \le \frac{x^2 + y^2}{x - y} \le \frac{41}{4}}$

Exercice12 : (***) Soient a et b deux réels tels que : $-1 \le b \le 4$ et $|a + 2| \le 3$

1) Montrer que : $a \in [-5;1]$

2) Montrer que : $|a + b - 1| \le 7$

3) On pose : $E = ab + 6b - 5a$

a) Vérifier que : $E = (a + 6)(b - 5) + 30$

b) Déduire un encadrement pour le nombre E.

Corrigé : 1) Soit a tel que : $|a + 2| \le 3$

On a: $|a + 2| \le 3$ signifie que : $-3 \le a + 2 \le 3$

Signifie que : $-3 - 2 \le a + 2 - 2 \le 3 - 2$

Signifie que : $-5 \le a \le 1$

Signifie que : $a \in [-5;1]$

2) Montrons que : $|a + b - 1| \le 7$

On sait que : $-5 \le a \le 1$ et $-1 \le b \le 4$ donc : $-6 \le a + b \le 5$

Par suite : $-7 \le a + b - 1 \le 4$ et comme : $4 \le 7$ alors : $-7 \le a + b - 1 \le 7$

Donc : $|a+b-1|\leq 7$

3) On pose : $E=ab+6b-5a$

a) Vérifions que : $E=(a+6)(b-5)+30$

Méthode1 : $(a+6)(b-5)+30=ab-5a+6b-30+30$

$$=ab-5a+6b=ab+6b-5a$$
$$=E$$

Donc : $E=(a+6)(b-5)+30$

Méthode2 : $E=ab+6b-5a=ab-5a+6b=a(b-5)+6b+30-30$

$E=a(b-5)+6(b-5)+30$

$E=(b-5)(a+6)+30$

Donc : $E=(a+6)(b-5)+30$

b) Déduisons un encadrement pour le nombre E.

On sait que : $E=(a+6)(b-5)+30$

On sait aussi que : $-5\leq a\leq 1$ et $-1\leq b\leq 4$ donc : $1\leq a+6\leq 7$ et $-6\leq b-5\leq -1$

Par suite : $1\leq a+6\leq 7$ et $1\leq -(b-5)\leq 6$

Donc : $1\leq -(a+6)(b-5)\leq 42$

Donc : $-42\leq (a+6)(b-5)\leq -1$

D'où : $-42+30\leq (a+6)(b-5)+30\leq -1+30$

Conclusion : $\boxed{-12\leq E\leq 29}$

Exercice13 : (***) $x\in]-6;3[$ **et** $y\in]5;9[$

Trouver un encadrement de : xy et x^2 et y^2 et $3x^2+y^2-x+y$

Corrigé : $x\in]-6;3[$ Signifie $-6<x<3$

$y\in]5;9[$ Signifie $5<y<9$

$x\in]-6;3[$ Signifie $-6<x\leq 0$ ou $0\leq x<3$

Encadrement de : xy

1ére cas : $-6<x\leq 0$ et $5<y<9$

On a donc : $0\leq -x<6$ et $5<y<9$

Alors on a : $0\leq (-x)\times y<54$

Alors on a : $0\leq -x\times y<54$

Par suite : $-54<x\times y\leq 0\ (1)$

2ére cas : $5<y<9$ et $0\leq x<3$

On a donc :(2) $0\leq x\times y<27$

De(1)et (2)en déduit finalement que : $-54<xy<-27$.

Encadrement de : x^2

On a : $x\in]-6;3[$ Signifie $-6<x\leq 0$ ou $0\leq x<3$

Signifie $0\leq -x<6$ ou $0\leq x<3$

Signifie $0^2\leq (-x)^2<6^2$ ou $0^2\leq x^2<3^2$

Signifie $0\leq x^2<36$ ou $0\leq x^2<9$

Signifie $\boxed{0 \leq x^2 < 36}$

Encadrement de : y^2

On a : $y \in]5;9[$ Signifie : $5 < y < 9$

Signifie : $5^2 \leq y^2 < 9^2$

Signifie : $\boxed{25 < y^2 < 49}$

Encadrement de : $3x^2 + y^2 - x + y$

On a : $0 \leq x^2 < 36$ Signifie que : $0 \leq 3x^2 < 108$ et on a : $25 < y^2 < 49$ et $-3 < -x < 6$ et $5 < y < 9$

Donc : $0 + 25 - 3 + 5 < 3x^2 + y^2 - x + y < 108 + 49 + 6 + 9$

Donc : $27 < 3x^2 + y^2 - x + y < 172$

Exercice14 : (**) Sachant que : $(\pi = 3,1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5...)$

1) Montrer que : $3,14$ est une valeur approchée décimale du réel π à 10^{-2} près

2) Donner une valeur approchée du réel π à 10^{-5} près

Corrigé : 1) On a : $3,13 < \pi < 3,15$

Donc : $3,13 - 3,14 < \pi - 3,14 < 3,15 - 3,14$

Donc : $-0,01 < \pi - 3,14 < 0,01$

Donc : $|\pi - 3,14| < 10^{-2}$.

Qui signifie que : $3,14$ est une valeur approchée du réel π à 10^{-2} près

2) On a : $3,14159 < \pi < 3,14161$ donc : $3,14159 - 3,14160 < \pi - 3,14160 < 3,14161 - 3,14160$

Donc : $-10^{-5} < \pi - 3,14160 < -10^{-5}$

Donc : $|\pi - 3,14160| < 10^{-5}$

Qui signifie que : $3,14160$ est une valeur approchée du réel π à 10^{-5} près.

Exercice15 : (**) Soit : $x \in \mathbb{R}$; on pose : $A = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

1) Montrer que : $A - 1 = \dfrac{-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1}$

2) En déduire que : $|A - 1| \leq \dfrac{1}{2} x^2$.

3) Trouver une valeur approchée du nombre $\dfrac{1}{\sqrt{1,04}}$ d'amplitude 2×10^{-2}

Corrigé : 1) $A - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

$$A - 1 = \frac{1 - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\left(1 - \sqrt{x^2+1}\right)\left(1 + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(1 + \sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1^2 - \sqrt{x^2+1}^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}^2}$$

$$A - 1 = \frac{1 - x^2 - 1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}^2} = \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1}$$

2) Déduisons que : $|A - 1| \leq \dfrac{1}{2} x^2$.

On a : $A-1=\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$ donc : $|A-1|=\left|\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\right|=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Car x^2 *et* $\sqrt{x^2+1}+x^2+1$ sont positifs

On a : $x^2\geq 0$ donc : $x^2+1\geq 1$ donc : $\sqrt{x^2+1}\geq\sqrt{1}$ c'est-à-dire : $\sqrt{x^2+1}\geq 1$

De : $\sqrt{x^2+1}\geq 1$ et $x^2+1\geq 1$ par somation on a donc : $\sqrt{x^2+1}+x^2+1\geq 2$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\leq\frac{1}{2}$

Donc : $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\leq\frac{1}{2}x^2$

D'où : $|A-1|\leq\frac{1}{2}x^2$

3) Trouvons une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ d'amplitude 2×10^{-4}

On a : $|A-1|\leq\frac{1}{2}x^2$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right|\leq\frac{1}{2}x^2$

Prenons : $x=0,2$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{0,2^2+1}}-1\right|\leq\frac{1}{2}\times 0,2^2$ ce qui signifie que : $\left|\frac{1}{\sqrt{1,04}}-1\right|\leq 2\times 10^{-2}$

D'où 1 est une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,04}}$ d'amplitude 2×10^{-2}

Exercice16: (**) Soient : a ; b et c des réels qui appartiennent a l'intervalle $]0,1]$

1) Vérifier que : $-1<(ab-1)(bc-1)(ac-1)\leq 0$

2) Montrer que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc\leq a+b+c+\frac{1}{abc}$

Corrigé :1) Montrons que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc\leq a+b+c+\frac{1}{abc}$

$a\in]0,1]$ Signifie que : $0<a\leq 1$

$b\in]0,1]$ Signifie que : $0<b\leq 1$

$c\in]0,1]$ Signifie que : $0<c\leq 1$

Multiplions ces inégalités membre a membre deux a deux on obtient :

$0<ab\leq 1$ et $0<bc\leq 1$ et $0<ac\leq 1$

Donc : $\begin{cases}-1<ab-1\leq 0\\-1<bc-1\leq 0\\-1<ac-1\leq 0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}0\leq-(ab-1)<1\\0\leq-(bc-1)<1\\0\leq-(ac-1)<1\end{cases}$ Multiplions ces inégalités membre a membre

On obtient : $0\leq-(ab-1)(bc-1)(ac-1)<1$

Donc : $-1<(ab-1)(bc-1)(ac-1)\leq 0$

2) Montrons que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc\leq a+b+c+\frac{1}{abc}$

$a\in]0,1]$ Signifie que : $0<a\leq 1$

$b \in \left]0,1\right]$ Signifie que : $0 < b \leq 1$

$c \in \left]0,1\right]$ Signifie que : $0 < c \leq 1$

Multiplions ces inégalités membre a membre on obtient : $0 < abc \leq 1$ donc : $abc > 0$

On a : $(ab-1)(bc-1)(ac-1) \leq 0$ et $abc > 0$

Donc : $\dfrac{(ab-1)(bc-1)(ac-1)}{abc} \leq 0$

Donc : $\left(\dfrac{ab-1}{a}\right)\left(\dfrac{bc-1}{b}\right)\left(\dfrac{ac-1}{c}\right) \leq 0$

Donc : $\left(\dfrac{ab}{a}-\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{bc}{b}-\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{ac}{c}-\dfrac{1}{c}\right) \leq 0$

Donc : $\left(\left(b-\dfrac{1}{a}\right)\left(c-\dfrac{1}{b}\right)\right)\left(a-\dfrac{1}{c}\right) \leq 0$

Donc : $\left(bc-1-\dfrac{c}{a}+\dfrac{1}{ab}\right)\left(a-\dfrac{1}{c}\right) \leq 0$

Donc : $abc-b-a+\dfrac{1}{c}-c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{abc} \leq 0$

Donc : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+abc \leq a+b+c+\dfrac{1}{abc}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.