Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°1 : L'ordre dans $\mathbb{R}$

Exercice1 : (**) Comparer les nombres et a et b dans les cas suivants :

1) $\frac{-3}{7}$ et $\frac{-3}{4}$ 2) $\frac{-\sqrt{2}}{7}$ et $\frac{1}{2}$ 3) $2\sqrt{10}$ et $3\sqrt{5}$

4) $a=3\sqrt{2}+1$ et $b=4\sqrt{2}-1$ 5) $a=\sqrt{13}$ et $b=\sqrt{2}+\sqrt{11}$ 6) $b=5\sqrt{3}+\sqrt{113}$ et $a=8+\sqrt{113}$

Correction : On va étudier le signe de la différence :

1) On compare $\frac{-3}{7}$ et $\frac{-3}{4}$: On va étudier le signe de la différence :

$$\frac{-3}{7}-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{-3}{7}+\frac{3}{4}=\frac{-12+21}{28}=\frac{9}{28}>0$$

Donc $\frac{-3}{7}>-\frac{3}{4}$ ou $\frac{-3}{7}\geq-\frac{3}{4}$

2) On compare $\frac{-\sqrt{2}}{7}$ et $\frac{1}{2}$: on a : $\frac{-\sqrt{2}}{7}<0$ et $\frac{1}{2}>0$

Donc : $\frac{-\sqrt{2}}{7}<\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}\geq\frac{-\sqrt{2}}{7}$

3) On compare $2\sqrt{10}$ et $3\sqrt{5}$: On a : $\left(3\sqrt{5}\right)^2=45$ et $\left(2\sqrt{10}\right)^2=40$ et $45-40=5>0$

Et puisque $2\sqrt{10}$ et $3\sqrt{5}$ sont positifs alors : $3\sqrt{5}>2\sqrt{10}$

4) $a=3\sqrt{2}+1$ et $b=4\sqrt{2}-1$: $a-b=3\sqrt{2}+1-\left(4\sqrt{2}-1\right)=3\sqrt{2}+1-4\sqrt{2}+1$

Donc : $a-b=2-\sqrt{2}$ et on a : $2>\sqrt{2}$ car $(2)^2=4$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

Donc : $a-b=2-\sqrt{2}>0$

Ce qui signifie que : $a-b\in\mathbb{R}^{*+}$ par suite : $a\succ b$

5) Comparons : $a=\sqrt{13}$ et $b=\sqrt{2}+\sqrt{11}$

Puisque : $a=\sqrt{13}$ et $b=\sqrt{2}+\sqrt{11}$ sont positifs on va comparer leurs carrés :

$$a^2=\left(\sqrt{13}\right)^2=13$$

$$b^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{11}\right)^2=\sqrt{2}^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2=13+2\sqrt{22}$$

Puisque : $2\sqrt{22}>0$ alors : $13+2\sqrt{22}>0+13$ c'est-à-dire : $b^2>a^2$

Conclusion : $b>a$

6) Comparons : $a=8+\sqrt{113}$ et $b=5\sqrt{3}+\sqrt{113}$

Il suffit de comparer : 4 et $3\sqrt{2}$

Puisque : 4 et $3\sqrt{2}$ sont positifs on va comparer leurs carrés :

On a $\left(5\sqrt{3}\right)^2=75$ et $(8)^2=64$ donc : $5\sqrt{3}>8$

On a donc : $5\sqrt{3}+\sqrt{113}>8+\sqrt{113}$

Conclusion : $b>a$

Exercice2 : (**) $a \in \mathbb{R}$ Comparer $20a-4$ **et** $25a^2$

Correction : $25a^2-(20a-4)=25a^2-20a+4=(5a)^2-2\times5a\times2+2^2=(5a-2)^2\geq0$

Car : le carré est toujours positif.

Donc : $25a^2\geq20a-4$ si $a\in\mathbb{R}$

Exercice3 : (**) Comparer $a=9^7$ **et** $b=\sqrt{9^{14}+1}$

Correction: On a: $9^{14}+1=(9^7)^2+1$

On a: $(9^7)^2<(9^7)^2+1$ car $<(9^7)^2+1-(9^7)^2=1>0$

Donc : $\sqrt{(9^7)^2}<\sqrt{(9^7)^2+1}$

Donc : $9^7<\sqrt{(9^7)^2+1}$

Donc : $a<b$

Exercice4 : (**) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; On pose : $a=\sqrt{9n^2+4}$ et $a=3n+2$

Comparer les nombres : a et b

Correction : Pour comparer deux nombres positifs on compare leurs carrés :

On a: $a^2=\left(\sqrt{9n^2+2}\right)^2=9n^2+2$ et $b^2=(3n+2)^2=9n^2+12n+4$

$$b^2-a^2=9n^2+12n+4-(9n^2+4)$$

$b^2-a^2=9n^2+12n+4-9n^2-4=12n>0$ Car $n\in\mathbb{N}^*$

Donc : $b^2>a^2$ et par suite $b>a$; car $a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$

Exercice5 : (**) Soient : a ; b des réels strictement positifs tel que : $\frac{a}{b}\leq1$.

Montrer que : $\frac{a}{b}\leq\frac{a+2}{b+2}$.

Correction : Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+2}{b+2}$ revient à étudier le signe de : $\frac{a+2}{b+2}-\frac{a}{b}$.

$$\frac{a+2}{b+2}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+2)-a(b+2)}{b(b+2)}=\frac{ba+2b-ab-2a}{b(b+2)}$$

Donc : $\frac{a+2}{b+2}-\frac{a}{b}=\frac{2b-2a}{b(b+2)}=\frac{2(b-a)}{b(b+2)}$ et puisque : b et 2des réels strictement positifs

Alors : $b(b+2)>0$ et on a aussi : $\frac{a}{b}\leq1$

Donc: $b\times\frac{a}{b}\leq b\times1$ c'est à dire: $a\leq b$

Par suite: $0\leq b-a$.

Donc: $\frac{a+2}{b+2}-\frac{a}{b}\geq0$ et par conséquent: $\frac{a+c}{b+c}\geq\frac{a}{b}$.

Exercice6 : (**) Soient $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $b\in\mathbb{R}^{*+}$ Comparer : $x=\frac{2a+3b}{2a}$ et $y=\frac{12b}{2a+3b}$

Correction : On a : $x-y=\frac{2a+3b}{2a}-\frac{12b}{2a+3b}$

Donc : $x-y=\frac{(2a+3b)^2-24a\times b}{2a(2a+3b)}$

Donc : $x-y=\dfrac{4a^2+12ab+9b^2-24a\times b}{2a(2a+3b)}$

Donc : $x-y=\dfrac{4a^2-12a\times b+9b^2}{2a(2a+3b)}=\dfrac{(2a)^2-2\times 2a\times 3b+(3b)^2}{2a(2a+3b)}$

Donc : $x-y=\dfrac{(2a-3b)^2}{2a(2a+3b)}\in\mathbb{R}^+$ Car : $2a(2a+3b)\in\mathbb{R}^{+*}$ et $(2a-3b)^2\in\mathbb{R}^+$

D'où : $x\geq y$

Exercice7 : (**) Soit x un élément de l'intervalle $\left[\dfrac{-5}{3};+\infty\right[$

Comparer : 11 **et** $-3x+\dfrac{1}{2}$ en utilisant les propriétés de l'ordre.

Correction : On a $x\in\left[\dfrac{-5}{3};+\infty\right[$ donc : $x\geq\dfrac{-5}{3}$

Donc : $x\times(-3)\leq\dfrac{-5}{3}\times(-3)$ c'est à dire : $-3x\leq 5$

Donc : $-3x+\dfrac{1}{2}\leq 5+\dfrac{1}{2}$ c'est à dire : $-3x+\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{11}{2}$

Donc : ① $-3x+\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{11}{2}$ et on sait que : $\dfrac{11}{2}<11$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $-3x+\dfrac{1}{2}<11$

Exercice8 : (**) Calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de la valeur absolue).

1) $\left|-3+\dfrac{1}{2}\right|$ 2) $\left|\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\right|$ 3) $\left|-\sqrt{3}-11\right|$ 4) $\left|2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right|$

5) $A=\left|5-2\sqrt{3}\right|+\left|6-4\sqrt{3}\right|-\left|2\sqrt{3}-1\right|$

Correction : 1) $\left|-3+\dfrac{1}{2}\right|=\left|-\dfrac{5}{2}\right|=-\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$

2) $\left|\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\right|=\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}$ car $\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}>0$

3) $\left|-\sqrt{3}-11\right|=\left|-\left(\sqrt{3}+11\right)\right|=\left|\sqrt{3}+11\right|$ car $|-X|=|X|$

Donc : $\left|-\sqrt{3}-11\right|=\left|\sqrt{3}+11\right|=\sqrt{3}+11$ car : $\sqrt{3}+11>0$

4) $\left|2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right|$

On compare : $2\sqrt{5}$ et $3\sqrt{3}$

On a : $\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$ et $\left(3\sqrt{3}\right)^2=27$ donc $3\sqrt{3}>2\sqrt{5}$

Par suite $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}^{-*}$ Donc $\left|2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right|=-\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}-2\sqrt{5}$

5) $A=\left|5-2\sqrt{3}\right|+\left|6-4\sqrt{3}\right|-\left|2\sqrt{3}-1\right|$

On a : $\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ et $(5)^2=25$ donc $5>2\sqrt{3}$ par suite $\left(5-2\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc : $\left|5-2\sqrt{3}\right|=5-2\sqrt{3}$

On a : $\left(4\sqrt{3}\right)^2=48$ et $(6)^2=36$ donc $5>2\sqrt{3}$ par suite $\left(6-4\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}^{-*}$

Donc : $\left|6-4\sqrt{3}\right|=-\left(6-4\sqrt{3}\right)$

On a : $\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ et $1^2=1$ donc $2\sqrt{3}>1$ par suite $\left(2\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc : $\left|2\sqrt{3}-1\right|=2\sqrt{3}-1$

Donc : $A=5-2\sqrt{3}-\left(6-4\sqrt{3}\right)-\left(2\sqrt{3}-1\right)$

Donc : $A=5-2\sqrt{3}-6+4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1$

Donc : $A=0$

Exercice9 : (Résoudre les équations suivantes :1) $|x-1|=2$ 2) $|3x+2|=|x-4|$

3) $3|x+5|=-\dfrac{1}{2}$ 4) $|x-1|+|2-x|-3=0$

Correction : 1) $|x-1|=2$ Signifie que : $x-1=2$ ou $x-1=-2$

Signifie que : $x=3$ ou $x=-1$ Donc : $S=\{-1;3\}$

2) $|3x+2|=|x-4|$ signifie que : $3x+1=x-4$ ou $3x+2=-(x-4)$

Signifie que : $3x+1=x-4$ ou $3x+2=-x+4$

Signifie que : $2x=-5$ ou $4x=2$

Signifie que : $x=-\dfrac{5}{2}$ ou $x=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Donc : $S=\left\{-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$

3) $3|x+5|=-\dfrac{1}{2}$ Signifie que : $|x+5|=-\dfrac{1}{6}$

$S=\varnothing$ Car $|x+5|\geq 0$ et $-\dfrac{1}{6}<0$

4) $|x-1|+|3-x|-3=0$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$

$3-x=0$ Signifie que : $x=3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	0	$x-1$		$x-1$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\lvert 3-x\rvert$	$3-x$		$3-x$	0	$x-3$
$\lvert x-1\rvert+\lvert 3-x\rvert-3$	$1-2x$		-1		$2x-7$

Si : $x\leq 1$ alors : L'équation $|x-1|+|3-x|-3=0$ devient : $-(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $4-2x-3=0$

Ce qui signifie que : $x=\dfrac{1}{2}\leq 1$; Donc : $S_1=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Si : $1\leq x\leq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $-1=0$ Donc : $S_2=\varnothing$

Si : $x \geq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)-(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $2x-7=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{7}{2}\geq 3$ Donc : $S_3=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$

Exercice10 : (**) 1) Calculer $\left(6\sqrt{2}-9\right)^2$ et comparer : $6\sqrt{2}$ et 9.

2) Simplifier $\sqrt{153-108\sqrt{2}}$.

Correction : 1) $\left(6\sqrt{2}-9\right)^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2-2\times 6\sqrt{2}\times 9+9^2=72-108\sqrt{2}+81$

Donc : $\left(6\sqrt{2}-9\right)^2=153-108\sqrt{2}$

On a : $\left(6\sqrt{2}\right)^2=72$ et $9^2=81$ donc $9>6\sqrt{2}$ Par suite : $6\sqrt{2}-9\in\mathbb{R}^-$

2) $\sqrt{153-108\sqrt{2}}=\sqrt{\left(6\sqrt{2}-9\right)^2}=\left|6\sqrt{2}-9\right|=-\left(6\sqrt{2}-9\right)$ car $6\sqrt{2}-9\in\mathbb{R}^-$

Par suite : $\sqrt{153-108\sqrt{2}}=9-6\sqrt{2}$

Exercice11 : (*) Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$:

$2...[2;6[$; $6...[2;6[$; $3...[1;+\infty[$; $100....[0;+\infty[$; $-1....]-\infty;1]$; $\left\{0;\frac{1}{2};1;2\right\}...[0;3[$

$\{0;1;200\}...]0;+\infty[$; $]0;1[....\mathbb{Q}$.

Correction : $2\in[2;6[$; $6\notin[2;6[$; $3\in[1;+\infty[$; $100\in[0;+\infty[$; $-1\notin]-\infty;1]$; $\left\{0;\frac{1}{2};1;2\right\}\subset[0;3[$

$\{0;1;200\}\not\subset]0;+\infty[$ car $0\in\{0;1;200\}$ *et* $\notin]0;+\infty[$; $]0;2[\not\subset\mathbb{Q}$ car $\sqrt{2}\in]0;2[$ *et* $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice12 : (**) Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}x\geq -2\\ x>0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x>6\\ x\leq 2\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ x\geq -1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}-2\leq x\leq 5\\ -5<x<6\end{cases}$

Correction : $\{$ c'est l'intersection 1) $\begin{cases}x\geq -2\\ x>0\end{cases}$

$x\geq -2$ Signifie que : $x\in[-2,+\infty[$

Et $x>0$ Signifie que : $x\in]0,+\infty[$

Donc : $S=]0,+\infty[\cap[-2,+\infty[=]0,+\infty[$

2) $\begin{cases}x>6\\ x\leq 2\end{cases}$ On a : $x\leq 2$ Signifie que : $x\in]-\infty,2]$

Et $x>6$ Signifie que : $x\in]6,+\infty[$

Donc : $S=]6,+\infty[\cap]-\infty,2]=\varnothing$

3) $\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ x\geq -1\end{cases}$; $x>\frac{1}{2}$ Signifie que : $x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

Et $x\geq -1$ Signifie que : $x\in[-1,+\infty[$

Donc : $S = \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\cap [-1,+\infty[$ = $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

4) $\begin{cases} -2 \le x \le 7 \\ -5 < x < 6 \end{cases}$

$-2 \le x \le 7$ Signifie que : $x \in [-2;7]$

$-5 < x < 6$ Signifie que : $x \in]-5;6[$

Donc : $S =]-5;6[\cap [-2;7]$ = $[-2;6[$

Exercice13 : (**) *x* est un réel tel que : $x \in [-2;3]$

On pose : $A = -5x + \frac{1}{2}$. Trouver un encadrement de A et trouer son amplitude

Correction : $x \in [-2;3]$ Signifie que : $-2 \le x \le 3$

Signifie que : $-15 \le -5x \le 10$

Signifie que : $-15 + \frac{1}{2} \le -5x + \frac{1}{2} \le 10 + \frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{29}{2} \le A \le \frac{21}{2}$: encadrement de A

$\frac{21}{2} - \left(-\frac{29}{2}\right) = \frac{21}{2} + \frac{29}{2} = \frac{50}{2} = 25$: est l'amplitude de l'encadrement

Exercice14 : (*) On considère l'intervalle $I = [-8;2]$; Trouver le milieu et l'amplitude et le rayon de l'intervalle I

Correction : $\frac{-8+2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ Est le milieu de l'intervalle I .

$2-(-8) = 10$ Est l'amplitude de l'intervalle I .

$\frac{2-(-8)}{2} = \frac{10}{2} = 5$ Est le rayon de l'intervalle I .

Exercice15 : (**) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\left|x - \frac{7}{2}\right| < \frac{1}{2}$; Trouver l'intervalle qui correspond à cette inégalité.

Correction : ($x \in \mathbb{R}$ et $\left|x - \frac{7}{2}\right| < \frac{1}{2}$)

Signifie : $-\frac{1}{2} < x - \frac{7}{2} < \frac{1}{2}$ Signifie : $-\frac{1}{2} + \frac{7}{2} < x - \frac{7}{2} + \frac{7}{2} < \frac{1}{2} + \frac{7}{2}$

Signifie : $3 < x < 4$

C'est-à-dire : $x \in]3,4[$

Donc : ($x \in \mathbb{R}$ et $\left|x - \frac{7}{2}\right| < \frac{1}{2}$) signifie (x appartient à l'intervalle ouvert de centre $c = \frac{7}{2}$ et de rayon $r = \frac{1}{2}$

Exercice16 : (**) Résoudre les inéquations suivantes : 1) $|x| \le \frac{1}{2}$ 2) $|2x-3| < 1$ 3) $|x+3| > \frac{4}{7}$

Correction : 1) $|x| \le \frac{1}{2}$ Signifie que : $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

Donc : $S = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

2) $|2x-3| < 1$ Signifie $-1 < 2x-3 < 1$

Signifie que : $-1+3 < 2x-3+3 < 1+3$ Signifie que : $2 < 2x < 4$

Signifie $2 \times \frac{1}{2} < 2x \times \frac{1}{2} < 4 \times \frac{1}{2}$

C'est-à-dire que : $1 < x < 2$ donc : $S =]1;2[$

3) $|x+3|>\frac{4}{7}$ Signifie $x+3>\frac{4}{7}$ ou $x+3<-\frac{4}{7}$

Signifie $x>\frac{4}{7}-3$ ou $x<-\frac{4}{7}-3$

Signifie $x>-\frac{17}{7}$ ou $x<-\frac{25}{7}$

Donc $S=\left]-\infty;-\frac{25}{7}\right[\cup\left]-\frac{17}{7};+\infty\right[$

Exercice17 : (***) Soient a et b deux réels tels que : $\left|\frac{3a-11}{a-2}\right|<2$ et $\left|\frac{2b-3}{b+1}-5\right|<2$

1) Montrer que : $3<a<7$ et $-6<b<-2$
2) Encadrer les nombres : $a+b+1$ et ab
3) En déduire une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

Corrigé :

1) a) Montrons que : $3<a<7$

On a : $\left|\frac{3a-11}{a-2}\right|<2$ donc : $-2<\frac{3a-11}{a-2}<2$

Donc : $-2<\frac{3a-6+6-11}{a-2}<2$

Donc : $-2<\frac{3(a-2)-5}{a-2}<2$ c'est-à-dire : $-2<\frac{3(a-2)}{a-2}-\frac{5}{a-2}<2$

Donc : $-2<3-\frac{5}{a-2}<2$ c'est-à-dire : $-2-3<-\frac{5}{a-2}<2-3$

Donc : $-5<-\frac{5}{a-2}<-1$ c'est-à-dire : $1<\frac{5}{a-2}<5$

Donc : $\frac{1}{5}<\frac{a-2}{5}<1$ c'est-à-dire : $1<a-2<5$

Donc : $\boxed{3<a<7}$

b) Montrons que : $-6<b<-2$

On a : $\left|\frac{2b-3}{b+1}-5\right|<2$ donc : $-2<\frac{2b-3}{b+1}-5<2$

Donc : $-2<\frac{2(b+1)-2-3}{b+1}-5<2$

Donc : $-2<\frac{2(b+1)}{b+1}-\frac{5}{b+1}-5<2$ c'est-à-dire : $-2<2-\frac{5}{b+1}-5<2$

Donc : $-2<-\frac{5}{b+1}-3<2$ c'est-à-dire : $1<-\frac{5}{b+1}<5$

Donc : $\frac{1}{5}<-\frac{b+1}{5}<1$ c'est-à-dire : $-1<\frac{b+1}{5}<-\frac{1}{5}$

Donc : $-5<b+1<-1$ c'est-à-dire : $\boxed{-6<b<-2}$

2) a) Encadrement du nombre : $a+b+1$

On a : $3<a<7$ et $-6<b<-2$

Donc : $3+(-6)<a+b<7+(-2)$

Donc : $-3<a+b<5$

Donc : $-3+1<a+b+1<5+1$

Donc : $\boxed{-2<a+b+1<6}$

b) Encadrement du nombre : ab

On a : $3<a<7$ et $-6<b<-2$

Donc : $3<a<7$ et $2<-b<6$

Donc : $6<-ab<42$

Donc : $\boxed{-42<ab<-6}$

3) Déduirons une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

On a : $3<a<7$ donc $6<2a<14$ et $-6<b<-2$

$0<2a+b<12$

Donc : $2a+b$ est positif et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$ est positif aussi

On va comparer leurs carrés :

$(2a+b)^2-\sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2=4a^2+4ab+b^2-2a^2-b^2-3ab=2a^2+ab=a(2a+b)$

Or : $2a+b$ est positif et a est positif donc $a(2a+b)>0$

Par suite : $(2a+b)^2-\sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2>0$

Alors : $\boxed{2a+b>\sqrt{2a^2+b^2+3ab}}$

Exercice18 : (**) Sachant que : $\frac{1}{3}$ est une valeur approchée du réel a à $\frac{2}{3}$ près

Et $2,25$ est une valeur approchée du réel b à 5×10^{-2} près

1) Donner un encadrement des réels a et b

2) Donner un encadrement des réels suivants a) $a+b$ b) $a-b$ c) $A=\frac{a+1}{a^2+a+2}$

Correction : 1) a) On a : $\frac{1}{3}$ est une valeur approchée du réel a à $\frac{2}{3}$ près donc : $\left|a-\frac{1}{3}\right|<\frac{2}{3}$

$\left|a-\frac{1}{3}\right|<\frac{2}{3}$ Signifie que : $-\frac{2}{3}<a-\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$

Signifie que : $-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}<a-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}<\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$

Signifie que : $\boxed{-\frac{1}{3}<a<1}$

b) $2,25$ est une valeur approchée du réel b à 5×10^{-2} près donc : $|b-2;25|<5\times10^{-2}$

$|b-2;25|<5\times10^{-2}$ Signifie que : $-5\times10^{-2}<b-2;25<5\times10^{-2}$

Signifie que : $-5\times10^{-2}+2,25<b<5\times10^{-2}+2,25$

Signifie que : $\boxed{2,2<b<2,3}$

2)a) On a : $-\frac{1}{3}<a<1$ et $2,2<b<2,3$ donc : $-\frac{1}{3}+2,2<a+b<1+2,3$

Donc : $-\frac{1}{3}+2,2<a+b<1+2,3$

Donc : $\frac{5,6}{3}<a+b<3,3$

Donc : $\frac{56}{30}<a+b<3,3$ c'est-à-dire : $\boxed{\frac{28}{15}<a+b<3,3}$

2)b) On a : $a-b=a+(-b)$ et $-\frac{1}{3}<a<1$ et $2,2<b<2,3$ donc : $-2,3<-b<-2,2$

Donc : $-\frac{1}{3}+(-2,3)<a+(-b)<1+(-2,2)$

Donc : $\frac{-7,9}{3}<a-b<-1,2$

Donc : $\boxed{\frac{-79}{30}<a-b<-1,2}$

c) $A=(a+1)\times\frac{1}{a^2+a+2}$

On a : $-\frac{1}{3}<a<1$ donc : $-\frac{1}{3}+1<a+1<1+1$

Donc : $\frac{2}{3}<a+1<2$

On a : donc : $0\leq a<1$ ou $-\frac{1}{3}\leq a\leq 0$

Donc : $0\leq a^2<1$ ou $0\leq -a\leq\frac{1}{3}$

Donc : $0\leq a^2<1$ ou $0\leq a^2\leq\frac{1}{9}$

Donc : $\boxed{0\leq a^2<1}$ et on a : $-\frac{1}{3}+2<a+2<1+2$

Donc : $0\leq a^2<1$ et on a : $\frac{5}{3}<a+2<3$

Donc : $\frac{5}{3}\leq a^2+a+2<4$

Donc : $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{a^2+a+2}<\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}<a+1<2$

Donc : $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\leq(a+1)\times\frac{1}{a^2+a+2}<\frac{3}{5}\times 2$

Donc : $\boxed{\frac{1}{6}\leq A<\frac{6}{5}}$

Exercice19 : (***) Soient a et b deux réels tel que : $a\in[0;2]$ et $b\in[0;2]$

1) Montrer que : $\frac{3}{16}|a-b|\leq\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\leq\frac{3}{4}|a-b|$

2) Sachant que : $0.866\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\leq 0.867$ et $0.707\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\leq 0.708$

Donner une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut et excès à 2×10^{-3} près

3) En déduire que : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\leq 1,2\times 10^{-1}$

Corrigé : 1) $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3(2+b)-3(2+a)}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{6+3b-6-3a}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3b-3a}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{3(b-a)}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\frac{|3||b-a|}{|(2+b)(2+a)|}=\frac{3|a-b|}{|(2+b)(2+a)|}$ Car : $|b-a|=|a-b|$

Or on a : $a\in[0;2]$ signifie $0\le a\le 2$

Et on a : $b\in[0;2]$ signifie $0\le b\le 2$

Donc : $2\le 2+a\le 4$ et $2\le 2+b\le 4$

Par suite : $4\le(2+b)(2+a)\le 16$

C'est-à-dire : $|(2+b)(2+a)|=(2+b)(2+a)$

Et on a aussi : $\frac{1}{16}\le\frac{1}{(2+b)(2+a)}\le\frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3|a-b|}{16}\le\frac{3|a-b|}{(2+b)(2+a)}\le\frac{3|a-b|}{4}$ car : $3|a-b|\ge 0$

Par suite : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

2) On a : $0.866\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 0.867$ et $0.707\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.708$

On a $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et on a : $-0.708\le-\frac{\sqrt{2}}{2}\le-0.707$

Donc : $0.866-0.708\le\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le 0.867-0.707$

Donc : $0.158\le\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.16$ et $0.16-0.158=2\times10^{-3}$

Par suite : $0{,}16$ est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par excès à : 2×10^{-3} près

$0{,}158$: Est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut à : 2×10^{-3} près

3) D'après 1) on a $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le\frac{3}{4}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$ et on a : $0.158\le\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.16$

Donc : $0\le\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.16$

Par suite : $\frac{3}{4}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\le\frac{3}{4}\times 0.16=0.12$

Finalement : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\leq 0.12$

C'est-à-dire : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\leq 1,2\times 10^{-1}$

Exercice20 : (***) 1**)** Montrer que : $\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) Montrer que : $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Corrigé :1) On pose : $B=\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}$

On va Calculer B^2 : $B^2=\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}\right)^2+2\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}\right)^2$

$$B^2=6+2\sqrt{\frac{36-1}{4}}=6+2\sqrt{\frac{5}{4}}=6+\sqrt{5}$$

$$B^2=\frac{6+\sqrt{31}}{2}+2\sqrt{\left(\frac{6+\sqrt{31}}{2}\right)\left(\frac{6-\sqrt{31}}{2}\right)}+\frac{6-\sqrt{31}}{2}$$

Donc : $B^2=6+\sqrt{5}$

Donc : $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$ ou $B=-\sqrt{6+\sqrt{5}}$

Or $B>0$ donc : $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

D'où: $\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$??

On pose: $B=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}$ Calculons B^2 ?

$B^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}\right)^2+2\sqrt{9-\sqrt{79}}\sqrt{9+\sqrt{79}}+\left(\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2$ $B^2=9-\sqrt{79}+2\sqrt{\left(9-\sqrt{79}\right)\left(9+\sqrt{79}\right)}+9+\sqrt{79}$

$B^2=18+2\sqrt{81-79}=18+\sqrt{8}$ Donc : $B^2=18+\sqrt{8}$

Donc : $B=\sqrt{18+\sqrt{8}}$ ou $B=-\sqrt{18+\sqrt{8}}$ Or $B>0$ donc : $B=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Par suite : $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Exercice21 : (**) Soient $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$ tel que : 1,5 est une valeur approchée par excès de x a $0,1$ prés
Et -1,4 est une valeur approchée par défaut de y a $0,2$ prés

1) Donner un encadrement de $x-y$ en précisant son amplitude.

2) Montrer que : $\frac{11}{4}$ est une valeur approchée de : $x-y$ a $\frac{3}{20}$ prés

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien