Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°10 : l'ensemble des nombres réels et sous-ensembles

Exercice1 : (**) Calculer **et** simplifier : $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ $B=\frac{5}{4}-\frac{8}{5}$; $C=\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$; $E=\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}{-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\times\frac{2-\frac{1}{2}-\frac{3}{6}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}$;

$F=2+\frac{1}{1+\frac{1}{-1+\frac{1}{2}}}$; $G=\frac{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}{1+\frac{1}{6}-\frac{1}{1-\frac{1}{6}}}$ et $H=\frac{9-\frac{2}{\pi}}{10-18\pi}$

Corrigé : $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3-2+1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$B=\frac{5}{4}-\frac{8}{5}=\frac{5\times5-4\times8}{4\times5}=\frac{25-32}{4\times5}=\frac{-7}{20}$

$C=\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}-\frac{2\times3}{3\times4}=\frac{3}{5}-\frac{2}{4}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}=\frac{6-5}{10}=\frac{1}{10}$

$C=\frac{287}{180}+\frac{1}{12}=\frac{287+15}{180}=\frac{302}{180}=\frac{151}{90}$

$$E=\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}{-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\times\frac{2-\frac{1}{2}-\frac{3}{6}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}=\frac{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}{-\frac{3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\times\frac{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{6}}{\frac{2}{2}-\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}=\frac{\frac{3-1}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{-3+1}{3}-\frac{1}{6}}\times\frac{\frac{4-1}{2}-\frac{3}{6}}{\frac{2-3}{2}-\frac{5}{6}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{-2}{3}-\frac{1}{6}}\times\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{6}}{\frac{-1}{2}-\frac{5}{6}}=\frac{\frac{4+9}{6}}{\frac{-4-1}{6}}\times\frac{\frac{9-3}{6}}{\frac{-3-5}{6}}=\frac{\frac{13}{6}}{\frac{-5}{4}}\times\frac{\frac{6}{6}}{\frac{-8}{4}}=-\frac{13}{6}\times\frac{4}{5}\frac{1}{-2}=\frac{13}{15}$$

$$F=2+\frac{1}{1+\frac{1}{-1+\frac{1}{2}}}=2+\frac{1}{1-2}=2-1=1$$

$$G=\frac{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}{1+\frac{1}{6}-\frac{1}{1-\frac{1}{6}}}=\frac{\frac{5-1}{5}+\frac{5}{6}}{\frac{6+1}{6}-\frac{6}{5}}=\frac{\frac{4}{5}+\frac{5}{6}}{\frac{7}{6}-\frac{6}{5}}=\frac{\frac{24+25}{30}}{\frac{35-36}{30}}=-\frac{49}{30}\times\frac{30}{1}=-49$$

$$H=\frac{9-\frac{2}{\pi}}{10-45\pi}=\frac{9\pi-2}{\pi}\times\frac{1}{10-45\pi}=\frac{9\pi-2}{\pi}\times\frac{1}{-5(9\pi-2)}=-\frac{1}{5\pi}$$

Exercice2 : (**) $a\in\mathbb{R}$ on pose : $E=(x-4)^2-(x-2)(x-8)$

1) Développer et calculer et simplifier E

2) En déduire une simplification du nombre : $h=(999\,996)^2-(999\,998)(999\,992)$

Corrigé : 1) $E=(x-4)^2-(x-2)(x-8)=x^2-2x\times4+4^2-\left(x^2-8x-2x+16\right)$

Donc : $E=x^2-8x+16-x^2+10x-16=2x$

Donc : $E=2x$

2) On pose : $a=1000000$ donc : $h=(1000000-4)^2-(1000000-2)(1000000-8)=2\times1000000=2000000$

Par suite : $h=(999\,996)^2-(999\,998)(999\,992)=2000000$

Exercice3 : On pose : $B=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{3+\sqrt{8}}$

Calculer B^2 et en déduire que : $B\in\mathbb{Z}$

Corrigé : 1) Montrons que $A\in\mathbb{Z}$

$$B^2=\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^2$$

$$B^2=\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^2-2\sqrt{3-\sqrt{8}}\sqrt{3+\sqrt{8}}+\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^2$$

$$B^2=3-\sqrt{8}-2\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)}+3+\sqrt{8}$$

$$B^2=6-2\sqrt{3^2-\sqrt{8}^2}=6-2\sqrt{9-8}=6-2\sqrt{1}=6-2=4$$

Donc : $B^2=4$

Donc : $B=\sqrt{4}$ ou $B=-\sqrt{4}$

Donc : $B=2$ ou $B=-2$ or $\sqrt{3-\sqrt{8}}<\sqrt{3+\sqrt{8}}$ c'est-à-dire : $B<0$

Par suite : $\boxed{B=-2}$

Conclusion : $B\in\mathbb{Z}$

Exercice4 : Montrer que : $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\right)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)\in\mathbb{N}$

Corrigé : 1) Montrons que $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\right)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)\in\mathbb{N}$

$$A=\left[\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+2\right)\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-2\right)\right]\left(2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right)\left(2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right)$$

$$A=\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-2^2\right)\left(2^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2\right)$$

$$A=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2+2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}^2-2^2\right)\left(2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2+2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}^2\right)$$

$$A=\left(2+2\sqrt{6}+3-4\right)\left(4-2+2\sqrt{6}-3\right)=\left(1+2\sqrt{6}\right)\left(-1+2\sqrt{6}\right)=\left(2\sqrt{6}+1\right)\left(2\sqrt{6}-1\right)$$

$$A=\left(2\sqrt{6}\right)^2-1^2=24-11=23\in\mathbb{N}$$

Exercice5 : (***) Soit : $x\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x+\sqrt{x}-3=0$

Montrer que : $x^2-7x+7\in\mathbb{Z}$.

Corrigé : Supposons que : $x\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x+\sqrt{x}-3=0$

Montrons que $x^2-7x+7\in\mathbb{Z}$

On a : $x+\sqrt{x}-3=0$ donc : $\sqrt{x}=3-x$

Donc : $\sqrt{x}^2=(3-x)^2$

Donc : $x=9-6x+x^2$

Donc : $x^2-7x+9=0$

Donc : $x^2-7x+7+2=0$

Donc : $x^2-7x+7=-2\in\mathbb{Z}$

Exercice6 : (**) On pose : $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ et $B=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

1)Montrer que : $A\times B=1$

2)On pose : $X=A+B$ et $Y=A-B$ Calculer : X^2 et Y^2

3)En déduire une écriture simple de X et Y

4)En déduire une écriture simple de A et B

Corrigé : $A\times B=\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}$

$A\times B=\sqrt{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{49-48}=\sqrt{1}=1$

2) On a : $X=A+B$ et $Y=A-B$

Donc : $X^2=\left(A+B\right)^2=A^2+B^2+2A\times B=A^2+B^2+2\times 1$

Donc ; $X^2=7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}+2\times 1=14+2=16$

Et : $Y^2=\left(A-B\right)^2=A^2+B^2-2A\times B=A^2+B^2-2\times 1$

Donc : $Y^2=7-4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}-2=12$

3) Déduction d'une écriture simple de X et Y :

On a : $X^2=16$ donc : $X=\sqrt{16}$ ou $X=-\sqrt{16}$

Or on sait que : $X=A+B$ donc X est la somme de deux nombres positifs donc c'est un nombre positif

Donc : $X=\sqrt{16}=4$

On a aussi : $Y^2=12$ et on Remarque que : $A<B$ donc : Y est négative par suite : $Y=-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$

4) Déduire une écriture simple de A et B :

On a : $\begin{cases} X=4 \\ Y=-2\sqrt{3} \end{cases}$ équivaut à : $\begin{cases} A+B=4 \\ A-B=-2\sqrt{3} \end{cases}$

En faisant la somme membre à membre les deux équations : On trouve : $2A=4-2\sqrt{3}$

Donc : $A=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}=2-\sqrt{3}$

Et on a : $A+B=4$ donc: $B=4-A=4-2+\sqrt{3}$ Equivaut à : $B=2+\sqrt{3}$

Exercice7 : (**) Simplifier $a\in\mathbb{R}^*$

$A=\left(\left(-\sqrt{3}\right)^{-2}\right)^2$; $B=\left(\dfrac{a\times\left(a^{-3}\right)^{-2}}{a^{-2}\times\left(a^{-4}\times a^7\right)^2}\right)^{-3}$; $F=\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^6\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)^3$; $G=\left(\dfrac{5^3\times 2^{-3}}{4\times 25}\right)^2\times\dfrac{2^8}{10^2\times 5}$.

Corrigé : $A=\left(\left(-\sqrt{3}\right)^{-2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}^2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

$B=\left(\dfrac{a\times\left(a^{-3}\right)^{-2}}{a^{-2}\times\left(a^{-4}\times a^7\right)^2}\right)^{-3}=\left(\dfrac{a\times a^6}{a^{-2}\times a^6}\right)^{-3}=\left(\dfrac{a}{a^{-2}}\right)^{-3}$ $E=\left(a\times a^2\right)^{-3}=\left(a^3\right)^{-3}=a^{-9}$

$F=\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^6\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)^3$ $F=-\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^2\times\dfrac{2^6}{5^6}\times\dfrac{5^3}{2^3}=-\dfrac{2^6\times 5^3}{2^6\times 5^6\times 2^3}$

$F=-\dfrac{2^6\times 5^3}{2^9\times 5^6}=-\dfrac{1}{2^3\times 5^3}=-\dfrac{1}{\left(2\times 5\right)^3}=-\dfrac{1}{10^3}=-10^{-3}$

$G=\left(\dfrac{5^3\times 2^{-3}}{4\times 25}\right)^2\times\dfrac{2^8}{10^2\times 5}=\dfrac{5^6\times 2^{-6}}{\left(2^2\times 5^2\right)^2}\times\dfrac{2^8}{\left(2^2\times 5^2\right)\times 5}$

$G=\dfrac{5^6\times 2^{-6}\times 2^8}{2^4\times 5^4\times 2^2\times 5^2\times 5}=\dfrac{5^6\times 2^2}{2^6\times 5^7}=\dfrac{1}{2^4\times 5}=\dfrac{1}{80}$

Exercice8 : (*) $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}^*$

On considère le nombre : $C = \dfrac{(ab^2)^3 \times a^4 b^2}{(ab)^5}$

1) Calculer et simplifier C

2) Ecrire C sous la forme d'une puissance de base 10 Sachant que ; $a = \dfrac{1}{10}$ et $b = 100$.

Corrigé : 1) $C = \dfrac{(ab^2)^3 \times a^4 b^2}{(ab)^5} = \dfrac{a^3 \times b^6 \times a^4 \times b^2}{a^5 \times b^5} = \dfrac{a^7 \times b^8}{a^5 \times b^5} = a^2 \times b^3$

2) $a = \dfrac{1}{10}$ et $b = 100$

Donc : $C = (10^{-1})^2 \times (10^2)^3 = 10^{-2} \times 10^6 = 10^4$

Exercice9 : (**) Ecrire en notation scientifique les nombres suivants :

$A = 3,8 \times 10^{25} \times 5 \times 10^{-14}$

$B = \dfrac{13 \times 10^{-7} \times 45 \times 10^{-3}}{9 \times 10^{-23}}$

$C = 0.0000000000048 \times 0.000005$

$D = 15000000 \times (4000)^2$

Corrigé : $A = 3,8 \times 10^{25} \times 5 \times 10^{-14} = 3,8 \times 5 \times 10^{25+(-14)} = 19 \times 10^{11} = 1,9 \times 10^{12}$

$B = \dfrac{13 \times 10^{-7} \times 45 \times 10^{-3}}{9 \times 10^{-23}} = \dfrac{13 \times 10^{-7} \times 9 \times 5 \times 10^{-3}}{9 \times 10^{-23}} = 13 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{-3} \times 10^{23}$

$B = 13 \times 5 \times 10^{-7-3+23} = 65 \times 10^{13} = 6,5 \times 10^{14}$

$C = 4,8 \times 10^{-11} \times 5 \times 10^{-6} = 4,8 \times 5 \times 10^{-11-6} = 22 \times 10^{-17} = 2,2 \times 10^{-16}$

$D = 15000000 \times (4000)^2 = 1,5 \times 10^7 \times (4 \times 10^3)^2 = 1,5 \times 10^7 \times 16 \times (10^3)^2 = 24 \times 10^7 \times 10^6 = 24 \times 10^{7+6}$

$D = 2,4 \times 10^1 \times 10^{13} = 2,4 \times 10^{14}$

Exercice10 : 1) Montrer que pour tous nombres *a* et *b* de $\mathbb{R}$ on a l'égalité suivante :

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2) Utiliser cette égalité pour factoriser $x^3 - 8$.

Corrigé :1) Développer $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$ pour vérifier.

2) Avec $a = x$, et $b = 2$: $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

Exercice11 : Factoriser les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$

$A = 3x(9x^2 - 12x + 4) + (5x-1)(3x^2 - 2x) + 6x^2(3x-2)$

$B = 2x^3 - x^2 - 10x + 5$

$C = 16x^4 - 1$

$D = (2x+1)^2 + (2x-1)^2 - 12x^2$

$E = 4y^2 - 2y - 9x^2 + 3x$

Corrigé : $A = 3x(9x^2 - 12x + 4) + (5x-1)(3x^2 - 2x) + 6x^2(3x-2)$

$A = 3x((3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2) + x(5x-1)(3x-2) + 6x^2(3x-2)$

$A = 3x(3x-2)^2 + x(5x-1)(3x-2) - 6x \times x(3x-2)$ On a : $x(3x-2)$ facteur commun

$A = x(3x-2)[3(3x-2) + 3(5x-1) - 6x] = x(3x-2)(9x - 6 + 15x - 3 - 6x) = x(3x-2)(18x-3)$

$B=2x^3-x^2-10x+5$

$B=\left(2x^3-x^2\right)+5\left(-2x+1\right)$

$B=x^2\left(2x-1\right)-5\left(2x-1\right)$ On a : $2x-1$ facteur commun

$B=\left(2x-1\right)\left(x^2-5\right)=\left(2x-1\right)\left(x^2-\sqrt{5}^2\right)=\left(2x-1\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$

$C=16x^4-1=\left(2x\right)^4-1^4=\left(\left(2x\right)^2\right)^2-\left(1^2\right)^2$

$C=\left(\left(2x\right)^2-1^2\right)\left(\left(2x\right)^2+1^2\right)=\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)\left(4x^2+1\right)$

$D=\left(2x+1\right)^2+\left(2x-1\right)^2-12x^2$ On peut Développer d'abord et après factoriser

$D=4x^2+4x+1+4x^2-4x+1-12x^2$

$D=2-4x^2=2\left(1-2x^2\right)=2\left(1^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2\right)=2\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right)$

Donc : $D=2\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right)$

$E=4y^2-2y-9x^2+3x$

$E=4y^2-2y-9x^2+3x=4y^2-9x^2-\left(2y-3x\right)$

$E=\left(2y-3x\right)\left(2y+3x\right)-\left(2y-3x\right)\times1$

Donc : $E=\left(2y-3x\right)\left(2y+3x-1\right)$.

Exercice12 : (***) Démontrer par l'absurde **que** : $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel

Corrigé : Montrons que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Supposons que : $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

$\sqrt{2}>0$, Il existe donc : $p\in\mathbb{N}^*$ et $q\in\mathbb{N}^*$, tel que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

On a alors : $\frac{p^2}{q^2}=2\Rightarrow p^2=2q^2$ (1)

On en déduit que p^2 est un nombre pair.

Le carré d'un nombre impair étant impair

p est donc nécessairement pair.

(En effet : $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$)

Comme p est pair, il existe $n\in\mathbb{N}$, tel que : $p=2n$

Donc : $p^2=4n^2$ (2)

En égalisant (1) et (2), on obtient : $2q^2=4n^2$ c'est-à-dire : $q^2=2n^2$

Comme $n^2\in\mathbb{N}$, on en déduit que q^2 est pair

Donc q est pair.

Ce qui est absurde car la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible

Par suite : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien