Correction Série N°9 : l'ensemble des nombres réels et sous-ensembles

Exercice1 : (**) Soient $x \in \mathbb{R}^*$; $y \in \mathbb{R}^*$ tels que : $xy = 2026$ et $2024x + 2023y = 2025$

Calculer : $\frac{2024}{y} + \frac{2023}{x}$

Corrigé : $\frac{2024}{y} + \frac{2023}{x} = \frac{2024x + 2023y}{xy} = \frac{2025}{2026}$

Exercice2 : (**) On pose : $B = 100\left(\frac{2+22+222+2222}{4+44+444+4444}\right)^2$ Montrer que : $B \in \mathbb{N}$

Corrigé : $B = 100\left(\frac{2+22+222+2222}{4+44+444+4444}\right)^2 = 100\left(\frac{2(1+11+111+1111)}{4(1+11+111+1111)}\right)^2 = 100\left(\frac{2}{4}\right)^2 = 100\frac{1}{4} = 25 \in \mathbb{N}$

Donc : $B = 25 \in \mathbb{N}$

Exercice3 : On pose : $A = \sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$

1)Montrer que : $A^2 = 100$

2) En déduire que : $A \in \mathbb{Z}^-$

Corrigé : 1) Montrons que : $A^2 = 100$

$$A^2 = \left(\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}\right)^2$$

$$A^2 = \left(\sqrt{57 - 40\sqrt{2}}\right)^2 - 2\sqrt{57 - 40\sqrt{2}}\sqrt{57 + 40\sqrt{2}} + \left(\sqrt{57 + 40\sqrt{2}}\right)^2$$

$$A^2 = 57 - 40\sqrt{2} - 2\sqrt{\left(57 - 40\sqrt{2}\right)\left(57 + 40\sqrt{2}\right)} + 57 + 40\sqrt{2}$$

$$A^2 = 114 - 2\sqrt{57^2 - \left(40\sqrt{2}\right)^2} = 114 - 2\sqrt{3249 - 3200} = 114 - 2\sqrt{49} = 114 - 14 = 100$$

Donc : $A^2 = 100$

2) On a : $A^2 = 100$

Donc : $A = \sqrt{100}$ ou $A = -\sqrt{100}$

Donc : $A = 10$ ou $A = -10$ or $\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} < \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$ c'est-à-dire : $A < 0$

Par suite : $\boxed{A = -10}$

Conclusion : $A \in \mathbb{Z}^-$

Exercice4 :

Montrer que : $\left(\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}\right) \in \mathbb{N}$

Corrigé : 1) Montrons que $A = \left(\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}\right) \in \mathbb{N}$

$$A = \left[\left(\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right) + \sqrt{7}\right)\left(\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right) - \sqrt{7}\right)\right]\left(\sqrt{7} + \left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)\right)\left(\sqrt{7} - \left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)\right)$$

$$A = \left(\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)^2 - \sqrt{7}^2\right)\left(\sqrt{7}^2 - \left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)^2\right)$$

$$A = \left(\left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right) + \sqrt{6}^2 - \sqrt{7}^2\right)\left(\sqrt{7}^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right) - \sqrt{6}^2\right)$$

$$A = \left(5 + 2\sqrt{30} + 6 - 7\right)\left(7 - 5 + 2\left(\sqrt{30}\right) - 6\right)$$

$A=\left(4+2\sqrt{30}\right)\left(-4+2\left(\sqrt{30}\right)\right)$

$A=\left(2\sqrt{30}+4\right)\left(2\sqrt{30}-4\right)$

$A=\left(2\sqrt{30}\right)^2-4^2=120-16=104\in\mathbb{N}$

Exercice5 : (**) Simplifier $a\in\mathbb{R}^*$

$A=\left(\sqrt{2}\right)^{-2}\times\left(\sqrt{2}\right)^{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)^{-5}\times\left(\sqrt{2}\right)^{3}$; $B=\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^4$; $C=\frac{a^{-2}\times(-a)^5}{-a\times a^{-4}}\times\frac{a^{-1}\times\left(a^{-2}\right)^5}{\left((-a)^4\right)^{-2}}$

Corrigé : $A=\left(\sqrt{2}\right)^{-2}\times\left(\sqrt{2}\right)^{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)^{-5}\times\left(\sqrt{2}\right)^{3}$

$A=-\left(\sqrt{2}\right)^{(-2+2-5+3)}=-\left(\sqrt{2}\right)^{-2}=-\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}$

$B=\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^4=\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=2^4\times3^{-4}$

$C=\frac{a^{-2}\times(-a)^5}{-a\times a^{-4}}\times\frac{a^{-1}\times\left(a^{-2}\right)^5}{\left((-a)^4\right)^{-2}}=\frac{-a^{-2}\times a^5\times a^{-1}\times a^{-10}}{-a\times a^{-4}\times a^{-8}}$

$C=\frac{a^{(-2+5-1-10)}}{a^{(1-4-8)}}=\frac{a^{-8}}{a^{-11}}=a^{-8+11}=a^3$

Exercice6 : (**) Soit a un réel non nul tel que : $a\neq1$ et $a\neq-1$

1) Montrer que : $a^7-1=(a-1)\left(a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1\right)$

2) En déduire la valeur de : $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$

Corrigé : 1)

$(a-1)\left(a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1\right)=a^7+a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a-a^6-a^5-a^4-a^3-a^2-a-1$

$=a^7-1$

2) Déduction : On a : $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}$

D'après la question 1) on a :

$a^7-1=(a-1)\left(a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1\right)$

Donc : $a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1=\frac{a^7-1}{a-1}$

Car $a\neq1$; donc pour : $a=\frac{1}{2}$ on trouve : $S=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1}{128}-1}{\frac{1}{2}-1}=-2\left(\frac{1}{128}-1\right)=-2\left(\frac{-127}{128}\right)=\frac{127}{64}$

Exercice7 : $x\in\mathbb{R}$; Développer et simplifier les expressions suivantes :

$A=\left(x^2+x-3\right)(2x+1)$; $B=(x-1)(2x+1)-\left[(x+2)(x-1)+2x^2+3x-5\right]$; $C=\left(x^2-2x+1\right)^2$

Corrigé : $A=\left(x^2+x-3\right)(2x+1)$

$A=2x^3+x^2+2x^2+x-6x-3$

$A=2x^3+3x^2-5x-3$

$B=(x-1)(2x+1)-\left[(x+2)(x-1)+2x^2+3x-5\right]$

$B=2x^2+x-2x-1-\left(x^2-x+2x-2+2x^2+3x-5\right)$

$B=2x^2-x-1-3x^2-4x+7$

$B=-x^2-5x+6$

$C=\left(x^2-2x+1\right)^2$

$C=\left(\left(x^2-2x\right)+1\right)^2=\left(x^2-2x\right)^2+2\left(x^2-2x\right)\times1+1^2$

$C=\left(x^2\right)^2-2\times2x\times x^2+\left(2x\right)^2+2x^2-4x+1$

$C=x^4-4x^3+4x^2+2x^2-4x+1$

$C=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

Exercice8 : Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$A=\left(2x+1\right)^2+\left(2x-1\right)^2-12x^2$; $B=4y^2-2y-9x^2+3x$

$C=9x^2-30x+24$; $D=4a^2+49b^2-x^2-28ab$

$E=8x^3+125$; $F=9x^2-6x\sqrt{7}+7+\left(1-3x\right)\left(3x-\sqrt{7}\right)$

$G=\left(x-5\right)\left(3x-2\right)+27x^3-8$; $H=3ax+3ay-2bx-2by$

Corrigé : $A=\left(2x+1\right)^2+\left(2x-1\right)^2-12x^2$ On peut Développer d'abord et après factoriser

$A=4x^2+4x+1+4x^2-4x+1-12x^2$

$A=2-4x^2=2\left(1-2x^2\right)=2\left(1^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2\right)=2\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right)$

Donc : $A=2\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right)$

$B=4y^2-2y-9x^2+3x$

$B=4y^2-2y-9x^2+3x=4y^2-9x^2-\left(2y-3x\right)$

$B=\left(2y-3x\right)\left(2y+3x\right)-\left(2y-3x\right)\times1$

Donc : $B=\left(2y-3x\right)\left(2y+3x-1\right)$.

$C=9x^2-30x+24$

$C=\left(3x\right)^2-2\times3x\times5+5^2-1^2$

$C=\left(3x-5\right)^2-1^2$

$C=\left(3x-5-1\right)\left(3x-5+1\right)$

$C=\left(3x-6\right)\left(3x-4\right)$

$D=4a^2+49b^2-x^2-28ab$

$D=\left(4a^2-28ab+49b^2\right)-x^2$

$D=\left(\left(2a\right)^2-2\times2a\times7b+\left(7b\right)^2\right)-x^2=\left(2a-7b\right)^2-x^2=\left(2a-7b-x\right)\left(2a-7b+x\right)$

$E=8x^3+125=\left(2x\right)^3+5^3$ On a : $a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$

Donc : $E=\left(2x+5\right)\left(\left(2x\right)^2-10x+5^2\right)$

Donc : $E=\left(2x+5\right)\left(4x^2-10x+25\right)$

$F=9x^2-6x\sqrt{7}+7+\left(1-3x\right)\left(3x-\sqrt{7}\right)$

$F=\left(3x\right)^2-2\times3x\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2+\left(1-3x\right)\left(3x-\sqrt{7}\right)$

$$F=\left(3x-\sqrt{7}\right)^2+(1-3x)\left(3x-\sqrt{7}\right)=\left(3x-\sqrt{7}\right)\left(3x-\sqrt{7}+1-3x\right)$$

$$F=\left(3x-\sqrt{7}\right)\left(1-\sqrt{7}\right)$$

$$G=(x-5)(3x-2)+27x^3-8$$

$$G=(x-5)(3x-2)+(3x)^3-2^3=(x-5)(3x-2)+(3x-2)\left(9x^2+3x\times 2+2^2\right)$$

$$G=(3x-2)\left(x-5+9x^2+6x+4\right)=(3x-2)\left(9x^2+7x-1\right)$$

$$H=3ax+3ay-2bx-2by$$

$$H=3ax+3ay-2bx-2by=3a(x+y)-2b(x+y)=(x+y)(3a-2b)$$

Exercice9 : (**) Soient $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$ tel que : $0<y\le x$

On pose : $A=\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}$

1) Calculer : A^2 en fonction de x et y

2)En déduire une écriture simple de A

3)Simplifier le nombre : $A=\sqrt{5-\sqrt{21}}-\sqrt{5+\sqrt{21}}$

Corrigé : 1)

$$A^2=\left(\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2=\left(\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2-2\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}+\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2$$

$$A^2=x-\sqrt{x^2-y^2}-2\sqrt{\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)}+x+\sqrt{x^2-y^2}$$

$$A^2=2x-2\sqrt{\left(x^2-\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^2\right)}=2x-2\sqrt{\left(x^2-\left(x^2-y^2\right)\right)}=2x-2\sqrt{y^2}=2x-2|y|$$

Et puisque $0<y$ alors : $A^2=2x-2y=2(x-y)$

2) Déduction d'une écriture simple de A

On a : $\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}\le\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}$ donc : $A=\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}\le 0$

$A^2=2(x-y)$ Signifie que : $A=\sqrt{2(x-y)}$ ou $A=-\sqrt{2(x-y)}$ mais on a : $A\le 0$

Finalement : $A=-\sqrt{2(x-y)}$

3)Simplification du nombre : $A=\sqrt{5-\sqrt{21}}-\sqrt{5+\sqrt{21}}$

On a : $A=\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}=-\sqrt{2(x-y)}$

On prend : $x=5$ et $y=2$ et puisque : $0<2\le 5$

$\sqrt{5-\sqrt{5^2-2^2}}-\sqrt{5+\sqrt{5^2-2^2}}=-\sqrt{2(5-2)}$ C'est-à-dire : $\sqrt{5-\sqrt{21}}-\sqrt{5+\sqrt{21}}=-\sqrt{6}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien