Série N°8 : l'ensemble des nombres réels et sous-ensembles

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/)

Exercice1 : Parmi les nombres suivants déterminer ceux qui sont des entiers relatifs, ceux qui sont décimaux et non entiers relatifs et ceux qui sont rationnel et non décimaux

$a=\frac{-45}{3}$; $b=\frac{130}{20}$; $c=\pi$; $d=34,45$; $e=7\sqrt{2}$; $f=\frac{42}{120}$; $g=\frac{60}{21}$

Corrigé :

Règle importante : Pour savoir si un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est décimal on décompose a et b en produit de facteurs premiers pour simplifier et obtenir une fraction irréductible

Donc : $\frac{a}{b}$ est décimal si et seulement si le dénominateur s'écrit sous la forme : $2^n\times 5^m$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

D'abord on sait que : π et $\sqrt{2}$ sont irrationnels dont ni relatifs ni décimaux ni rationnels

Donc : de même $e=7\sqrt{2}$ est irrationnel sinon $\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{7}$ serait rationnel

En suite le nombre $d=34,45$ est décimal et non entier relatif car il contient des chiffes après la virgule

Enfin : $a=\frac{-45}{3}=\frac{-3\times3\times5}{3}=-15\in\mathbb{Z}$

$b=\frac{130}{20}=\frac{2\times5\times13}{2^4\times5}=\frac{13}{2^3\times5^0}\in\mathbb{D}$ Mais $b\notin\mathbb{Z}$

$f=\frac{42}{120}=\frac{2\times3\times7}{2^3\times3\times5}=\frac{7}{2^3\times5^1}\in\mathbb{D}$ Mais $f\notin\mathbb{Z}$

$g=\frac{60}{21}=\frac{2^2\times3}{7}\notin\mathbb{D}$ Mais $g\in\mathbb{Q}$

Exercice2 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$; On pose : $A=3\left(x^2+y^2\right)-2\left(x^3+y^3\right)$

1) Calculer A pour : $x=-\frac{1}{2}$ et $y=\frac{3}{2}$

2) On suppose que : $x+y=1$

Montrer que : $A=1$

Corrigé :

1) Pour : $x=-\frac{1}{2}$ et $y=\frac{3}{2}$

$$A=3\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)-2\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)$$

$$A=3\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\right)-2\left(-\frac{1}{8}+\frac{27}{8}\right)=\frac{15}{2}-\frac{13}{2}=\frac{2}{2}=1$$

2) On suppose que : $x+y=1$; Montrons que : $A=1$

On a : $x+y=1$ donc : $y=1-x$

Donc : $A=3\left(x^2+(1-x)^2\right)-2\left(x^3+(1-x)^3\right)$

Donc : $A=3\left(x^2+1-2x+x^2\right)-2\left(x^3+1-3x+3x^2-x^3\right)$

Donc : $A=3x^2+3-6x+3x^2-2x^3-2+6x-6x^2+2x^3$

Donc : $A=1$

Exercice3 : (**) Soit $E=\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{18}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{18}}$

Écris le nombre E sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est une fraction irréductible et b est un nombre entier.

Corrigé :

$$E=\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{18}}+\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{18}}=\frac{5\left(\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)+3\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)}=\frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{18}+3\sqrt{2}+3\sqrt{18}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{18}\right)^2}$$

$$E=\frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{2\times 9}}{2-18}=\frac{8\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{-16}=\frac{2\sqrt{2}}{-16}=-\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

Exercice4 : (***) On pose : $A=\sqrt{\left(52-6\sqrt{43}\right)^3}$ et $B=\sqrt{\left(52+6\sqrt{43}\right)^3}$

1) Montrer que : $A=\left(\sqrt{43}-3\right)^3$ et $B=\left(\sqrt{43}+3\right)^3$

2) En déduire que : $A-B\in\mathbb{Z}$.

Corrigé : 1) Montrons que $A=\left(\sqrt{43}-3\right)^3$

$$A=\sqrt{\left(52-6\sqrt{43}\right)^3}=\sqrt{\left(43-2\times 3\sqrt{43}+9\right)^3}=\sqrt{\left(\sqrt{43}^2-2\times 3\sqrt{43}+3^2\right)^3}$$

$$A=\sqrt{\left(\left(\sqrt{43}-3\right)^2\right)^3}=\sqrt{\left(\left(\sqrt{43}-3\right)^2\right)^3}=\left|\sqrt{43}-3\right|^3=\left(\sqrt{43}-3\right)^3$$ en effet : $\left|\sqrt{43}-3\right|=\sqrt{43}-3$ car $\sqrt{43}>3$

$$B=\sqrt{\left(52+6\sqrt{43}\right)^3}=\sqrt{\left(43+2\times 3\sqrt{43}+9\right)^3}=\sqrt{\left(\sqrt{43}^2+2\times 3\sqrt{43}+3^2\right)^3}$$

$$B=\sqrt{\left(\left(\sqrt{43}+3\right)^2\right)^3}=\sqrt{\left(\left(\sqrt{43}+3\right)^2\right)^3}=\left|\sqrt{43}+3\right|^3=\left(\sqrt{43}+3\right)^3$$

2) $A-B=\left(\sqrt{43}-3\right)^3-\left(\sqrt{43}+3\right)^3$ mais on a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

Donc : $A-B=\left(\sqrt{43}-3-\sqrt{43}-3\right)\left(\left(\sqrt{43}-3\right)^2+\left(\sqrt{43}-3\right)\left(\sqrt{43}+3\right)+\left(\sqrt{43}+3\right)^2\right)$

Donc : $A-B=-6\left(43-6\sqrt{43}+9+43-9+43+6\sqrt{43}+9\right)$

Donc : $A-B=-6\times 138=-828\in\mathbb{Z}$

Exercice5 : Montrer que : $\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}+3\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}-3\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{8}+3\right)\left(-\sqrt{7}+\sqrt{8}+3\right)\in\mathbb{N}$

Corrigé : 1) Montrons que $\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}+3\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}-3\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{8}+3\right)\left(-\sqrt{7}+\sqrt{8}+3\right)\in\mathbb{N}$

$$A=\left[\left(\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}\right)+3\right)\left(\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}\right)-3\right)\right]\left(3+\left(\sqrt{7}-\sqrt{8}\right)\right)\left(3-\left(\sqrt{7}-\sqrt{8}\right)\right)$$

$$A=\left(\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}\right)^2-3^2\right)\left(3^2-\left(\sqrt{7}-\sqrt{8}\right)^2\right)$$

$$A=\left(\left(\sqrt{7}\right)^2+2\left(\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{8}\right)+\sqrt{8}^2-3^2\right)\left(3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2+2\left(\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{8}\right)-\sqrt{8}^2\right)$$

$$A=\left(7+2\sqrt{56}+8-9\right)\left(9-7+2\sqrt{56}-8\right)$$

$$A=\left(6+2\sqrt{56}\right)\left(-6+2\sqrt{56}\right)=\left(2\sqrt{56}+6\right)\left(2\sqrt{56}-6\right)$$

$$A=\left(2\sqrt{56}\right)^2-6^2=224-16=208\in\mathbb{N}$$

Exercice6 : (**) $x\in\mathbb{R}^*$ et $y\in\mathbb{R}^*$

Simplifier les expressions suivantes le plus simplement possible :

$A=(xy)^5\times y^{-3}\times x\times x^{-4}\times y^{-1}$; $B=(-y)^4\times y^8\times(-y)^{-9}$

$C=\left(x^{12}\times x^{-31}\times x^{17}\right)^3$; $D=\left(-2x^3\times y^2\right)^5\times\left(\dfrac{x^{-7}}{8y^3}\right)^2$; $E=\dfrac{x^3\left(x^2y\right)^{-4}}{\left(x^{-1}y^5\right)y^{-3}}$

Corrigé : Rappel : $(-1)^n=1$ si n est pair et $(-1)^n=-1$ si n est impair

$$A=(xy)^5\times y^{-3}\times x\times x^{-4}\times y^{-1}=x^5\times y^5\times y^{-3}\times x^1\times x^{-4}\times y^{-1}$$

$$A=x^5\times x^1\times x^{-4}\times y^5\times y^{-3}\times y^{-1}=x^{5+1-4}\times y^{5-3-1}=x^2\times y^1=x^2\times y$$

$$B=(-y)^4\times y^8\times(-y)^{-9}=(-1)^4\times y^4\times y^8\times(-1)^{-9}\times y^{-9}=1\times y^4\times y^8\times y^{-9}\times(-1)$$

$$B=-y^{4+8-9}=-y^3$$

$$C=\left(x^{12}\times x^{-31}\times x^{17}\right)^3=\left(x^{12-31+17}\right)^3=\left(x^2\right)^3=x^{2\times3}=x^6$$

$$D=\left(-2x^3\times y^2\right)^5\times\left(\frac{x^{-7}}{8y^3}\right)^2=(-1)^5\times2^5\times x^{3\times5}\times y^{2\times5}\times x^{-7\times5}\times8^{-2}\times y^{3\times(-2)}$$

$$D=-1\times2^5\times x\times y^4\times2^{-5}=-x\times y^4$$

$$E=\frac{x^3\left(x^2y\right)^{-4}}{\left(x^{-1}y^5\right)y^{-3}}=\frac{x^3\times x^{2\times(-4)}y^{-4}}{x^{-1}\times y^5\times y^{-3}}=\frac{x^{3-8}\times y^{-4}}{x^{-1}\times y^{5-3}}=\frac{x^{-5}\times y^{-4}}{x^{-1}\times y^2}$$

$$E=x^{-5}\times y^{-4}\times x^1\times y^{-2}=x^{-5}\times x^1\times y^{-4}\times y^{-2}=x^{-5+1}\times y^{-4-2}=x^{-4}\times y^{-6}$$

Exercice7 : (**) Soit a un nombre décimal tel que : $a^3=15,625$ et $a^5=97,656225$

Calculer : a^2 et a^7 et a^6 et en déduire la valeur de a.

Corrigé : On a : $a^3=15,625$ et $a^5=97,656225$ Donc : $\dfrac{a^5}{a^3}=\dfrac{97,656225}{15,625}=6,25$.

$a^7=a^5a^2=97,656225\times6,25=610,3515625$

$a^6=\left(a^3\right)^2=244,140625$

Déduction de la valeur de a : $a=\dfrac{a^7}{a^6}=\dfrac{610,3515625}{244,140625}=2,5$

Exercice8 : $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$. Développer et simplifier les expressions suivantes :

$A=-(x+1)-2x\left(x^2-y\right)-y\left(x-y^2\right)-y^3$; $B=(2x+3)^2+(2x-3)^2-2(1-x^2)(1+x^2)$

$C=(3x-5)^3$; $E=(x+1)^4$

Corrigé : $A=-(x+1)-2x\left(x^2-y\right)-y\left(x-y^2\right)-y^3$

$A=-x-1-2x^3+2xy-2yx+y^3-y^3$

$A=-1-x-2x^3$

$B=(2x+3)^2+(2x-3)^2-2(1-x^2)(1+x^2)$

$B=(2x)^2+2\times2x\times3+3^2+(2x)^2-2\times2x\times3+3^2-2\left(1^2-\left(x^2\right)^2\right)$

$B=4x^2+4x^2+18-2\left(1-x^4\right)$

$B=8x^2+18-2+2x^4$
$B=2x^4+8x^2+16$
$C=(3x-5)^3$
$C=(3x)^3-3(3x)^2\times5+3(3x)\times5^2-5^3$
$C=27x^3-135x^2+225x-125$
$E=(x+1)^4$
$E=\left((x+1)^2\right)^2=\left(x^2+2x+1\right)^2=\left(\left(x^2+2x\right)+1\right)^2=\left(x^2+2x\right)^2+2\left(x^2+2x\right)+1$
$E=\left(x^2\right)^2+2x^2\times2x+(2x)^2+2x^2+4x+1$
$E=x^4+4x^3+4x^2+2x^2+4x+1$
$E=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

Exercice9 : Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$D=2x\left(4x^2-4x+1\right)+3(x-1)\left(2x^2-x\right)+5x^2(2x-1)$
$G=x^7+2x^5-3x^2-6$
$H=16x^4-81$
$K=(x+1)^2+(x-1)^2-4x^2$
$U=y^2-y-9x^2+3x$
$V=x^2-6x+8$
$M=a^2+4b^2-x^2+4ab$
$P=x^3-64$
$T=4x^2-4x\sqrt{5}+5+(1-2x)\left(2x-\sqrt{5}\right)$
$W=(x-3)(2x-1)+x^3-27$
$X=x^2y^2-(x+y)xy+x+y-1$
$Y=x^2y^2z^2-(x+y+z)xyz+xy+yz+zx-1$

Corrigé : $D=2x\left(4x^2-4x+1\right)+3(x-1)\left(2x^2-x\right)+5x^2(2x-1)$
$D=2x\left((2x)^2-2\times2x\times1+1^2\right)+3x(x-1)(2x-1)+5x^2(2x-1)$
$D=3x(2x-1)^2+3x(x-1)(2x-1)+5x\times x(2x-1)$
$D=2x(2x-1)(2x-1)+3x(2x-1)(x-1)+5x\times x(2x-1)$ On a : $x(2x-1)$ facteur commun
$D=x(2x-1)\left[2(2x-1)+3(x-1)+5x\right]=x(2x-1)(4x-2+3x-3+5x)=x(2x-1)(12x-5)$
$G=x^7+2x^5-3x^2-6$
$G=\left(x^7+2x^5\right)-3\left(x^2+2\right)$
$G=x^5\left(x^2+2\right)-3\left(x^2+2\right)$
$G=x^5\left(x^2+2\right)-3\left(x^2+2\right)$ On a : x^2+2 facteur commun
$G=\left(x^2+2\right)\left(x^5-3\right)$
$H=16x^4-81=(2x)^4-\left(\sqrt{81}\right)^4=\left((2x)^2\right)^2-\left(3^2\right)^2$
$H=\left((2x)^2-3^2\right)\left((2x)^2+3^2\right)=(2x-3)(2x+3)\left(4x^2+9\right)$

$K=(x+1)^2+(x-1)^2-4x^2$ On peut Développer d'abord et après factoriser

$K=x^2+2x+1+x^2-2x+1-4x^2=2x^2+2-4x^2=2-2x^2=2(1-x^2)=2(1^2-x^2)=2(1-x)(1+x)$

Donc : $K=2(1-x)(1+x)$

$M=a^2+4b^2-x^2+4ab$

$M=(a^2+4ab+4b^2)-x^2$

$M=\left(a^2+2\times a\times 2b+(2b)^2\right)-x^2=(a+2b)^2-x^2=(a+2b-x)(a+2b+x)$

$P=x^3-64=x^3-4^3$ On a : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Donc : $P=(x-4)(x^2+4x+4^2)$

Donc : $P=(x-4)(x^2+4x+16)$

$T=4x^2-4x\sqrt{5}+5+(1-2x)(2x-\sqrt{5})$

$T=(2x)^2-2\times 2x\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2+(1-2x)(2x-\sqrt{5})$

$T=(2x-\sqrt{5})^2+(1-2x)(2x-\sqrt{5})=(2x-\sqrt{5})(2x-\sqrt{5}+1-2x)$

$T=(2x-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$

$W=(x-3)(2x-1)+x^3-27$

$W=(x-3)(2x-1)+x^3-3^3=(x-3)(2x-1)+(x-3)(x^2+3x+3^2)$

$W=(x-3)(2x-1+x^2+3x+9)=(x-3)(x^2+5x+8)$

$S=3ax+3ay-2bx-2by$

$S=3ax+3ay-2bx-2by=3a(x+y)-2b(x+y)=(x+y)(3a-2b)$

$U=y^2-y-9x^2+3x$

$U=y^2-y-9x^2+3x=y^2-9x^2-(y-3x)$

$U=(y-3x)(y+3x)-(y-3x)\times 1$

Donc : $U=(y-3x)(y+3x-1)$.

$V=x^2-6x+8$

$V=x^2-6x+9-1$

$V=x^2-2\times x\times 3+3^2-1^2$

$V=(x-3)^2-1^2$

$V=(x-3-1)(x-3+1)$

$V=(x-4)(x-2)$

$X=x^2y^2-(x+y)xy+x+y-1$

$X=x^2y^2-xy+xy-x(xy)-y(xy)+x+y-1$

$X=xy(xy-1)+x-x(xy)+y-y(xy)+xy-1$

$X=xy(xy-1)-x(xy-1)-y(xy-1)+xy-1$

$X=xy(xy-1)-x(xy-1)-y(xy-1)+(xy-1)$

$X=(xy-1)(xy-x-y+1)$

De la même façon on factorise Y

Exercice10 : (***) Soient : $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}^*$ et $c\in\mathbb{R}^*$ tels que : $a\neq b$ et $b\neq c$ et $a\neq c$ et $a+b+c=0$

1) Montrer que : $a^3+b^3+c^3=3abc$

2) En déduire que : $c^4=a^4+b^4+2ab\left(2c^2-ab\right)$

Corrigé :1) Calculons : $\left(a+b+c\right)^3$

$\left(a+b+c\right)^3=\left(\left(a+b\right)+c\right)^3=\left(a+b\right)^3+3\left(a+b\right)^2c+3\left(a+b\right)c^2+c^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3ab\left(a+b\right)+3ac\left(a+c\right)+3bc\left(b+c\right)$

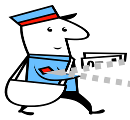
Or on a : $a+b+c=0$

Donc : $a+b=-c$ et $a+c=-b$ et $b+c=-a$

Donc :

$\left(a+b+c\right)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3ab\left(-c\right)+3ac\left(-b\right)+3bc\left(-a\right)$ $\left(a+b+c\right)^3=a^3+b^3+c^3+6abc-3abc-3abc-3abc$

Donc : $\left(0\right)^3=a^3+b^3+c^3-3abc$



Factoriser c'est écrire sous la forme d'un **produit**

Par suite : $a^3+b^3+c^3=3abc$

3) Déduction de : $c^4=a^4+b^4+2ab\left(2c^2-ab\right)$

$\left(a+b\right)^4=\left(\left(a+b\right)^2\right)^2=\left(a^2+2ab+b^2\right)^2$ $\left(a+b\right)^4=a^4+4a^2b^2+b^4+4a^3b+2a^2b^2+4ab^3$

$\left(a+b\right)^4=a^4+b^4+6a^2b^2+4a^3b+4ab^3$ $\left(a+b\right)^4=a^4+b^4+2ab\left(3ab+2a^2+2b^2\right)$

$\left(a+b\right)^4=a^4+b^4+2ab\left(-ab+2a^2+4ab+2b^2\right)$ $\left(a+b\right)^4=a^4+b^4+2ab\left(2\left(a+b\right)^2-ab\right)$

$\left(a+b\right)^4=a^4+b^4+2ab\left(2c^2-ab\right)$

Et puisque on a : $a+b=-c$ alors : $\left(a+b\right)^4=c^4$

Et par suite : $c^4=a^4+b^4+2ab\left(2c^2-ab\right)$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien