Tronc commun Sciences BIOF

# Correction Série N°6 : l'ensemble des nombres réels et sous-ensembles

**Exercice1 :** (*) Dans chacun des cas, indiquer le plus petit ensemble de nombres auquel le nombre appartient.

1) $\frac{125}{5}$ 2) $\frac{7}{5}$ 3) $\frac{21}{12}$ 4) $\frac{-35}{7}$ 5) $\frac{14}{21}$

**Corrigé :** 1) $\frac{125}{5}=25\in\mathbb{N}$ 2) $\frac{7}{5}=1,4\in D$ 3) $\frac{21}{12}=\frac{7}{4}=1,75\in D$ 4) $\frac{-35}{7}=-5\in\mathbb{Z}$ 5) $\frac{14}{21}=\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$

**Exercice2 :** Définissez les nombres suivants : un entier naturel, un entier relatif, un nombre rationnel, un nombre décimal, un nombre irrationnel.

Application : Indiquer par oui ou par non si le nombre considéré appartient ou non à l'ensemble correspondant

| | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{5}$ | $\sqrt{2}$ | $0,272$ | $\frac{22}{7}$ | $\frac{14}{2}$ | $-6,5$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | | | | | | | | |
| $\mathbb{Z}$ | | | | | | | | |
| $\mathbb{D}$ | | | | | | | | |
| $\mathbb{Q}$ | | | | | | | | |
| $\mathbb{R}$ | | | | | | | | |

**Exercice3 :** (**) 1) Tout nombre rationnel admet un développement décimal périodique à partir d'un certain rang. Par exemple : $\frac{13193}{49950}=0,26412412412\ldots$

Mettre en évidence cette propriété avec les nombres rationnels suivants : $\frac{23}{22}$ , $\frac{45}{11}$

2) Réciproquement, tout développement décimal illimité périodique Correspond à l'écriture d'un rationnel.

a) Compléter : $y=0,00723723723...$

$\Rightarrow 1000y=7,23723723723...\Rightarrow 1000y=7,23+y \Rightarrow \ldots y=\ldots.$

$\Rightarrow$ L'écriture fractionnaire de $y$ *est* $y=\frac{....}{....}=\frac{723}{99900}$

b ) Compléter : $y=0,175175175\ldots$

$\Rightarrow 1000y=175.175175175\ldots\Rightarrow 1000y=175+y$

$\Rightarrow$ .....$\Rightarrow$ ……$\Rightarrow$ L'écriture fractionnaire de $y$ *est*

$y=\frac{...}{....}$

c ) En déduire l'écriture fractionnaire de

$y=0,141414\ldots\ldots$

**Corrigé :1)** $\frac{23}{22}=1,0454545454545...$

$\frac{45}{11}=4,\mathbf{09}090909090909\ldots$

2 ) a) $y=0,00723723723...$

$\Rightarrow 1000y = 7{,}23723723723... \Rightarrow 1000y = 7{,}23 + y$

$\Rightarrow 999y = 7{,}23 \quad \Rightarrow \; y = \frac{7{,}23}{999} = \frac{723}{99900}$

b ) $y = 0{,}175175175\ldots$

$\Rightarrow 1000y = 175.175175175\ldots \Rightarrow 1000y = 175 + y$

$\Rightarrow 999y = 175 \; \Rightarrow y = \frac{175}{999}$

c) l'écriture fractionnaire de $y = 0{,}141414\ldots\ldots$

$\Rightarrow 100y = 14.141414\ldots \quad \Rightarrow 100y = 14 + y$

$\Rightarrow 99y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{99}$

**Exercice4 :** 1) Calculer : $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ puis $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

2) En moins d'une minute donner une fraction égale à la somme

$S=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$.

**Corrigé :** 1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ et …….. $\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=\frac{1}{90}$

2) $S=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$

$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{5}{10}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

**Exercice5 :** (***) Soit : $x \in \mathbb{R}^+$ tel que : $x\sqrt{\sqrt{x}}-32=0$

Montrer que : $\sqrt{\sqrt{x}} \in \mathbb{N}$.

**Corrigé :** Supposons que : $x \in \mathbb{R}^+$ tel que : $x\sqrt{\sqrt{x}}-32=0$

Montrons que $\sqrt{\sqrt{x}} \in \mathbb{N}$

On a : $x\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt{x^2}\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt{x^2\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{x^4}\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{x^4\times x}}=\sqrt{\sqrt{x^5}}=\sqrt{\sqrt{x}^5}=\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)^5$

On a aussi : $x\sqrt{\sqrt{x}}-32=0$ c'est-à-dire : $x\sqrt{\sqrt{x}}=32$

Donc : $\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)^5=32=2^5$ c'est-à-dire : $\sqrt{\sqrt{x}}=2$

Donc : $\sqrt{\sqrt{x}} \in \mathbb{N}$

**Exercice6 :** Effectuer et Calculer et simplifier **:**

$A=\left(3+\sqrt{11}\right)^2-\left(3-\sqrt{11}\right)^2 \quad B=\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2015}\times\left(4\sqrt{3}+7\right)^{2015}$

$C=\frac{3\times10^{-5}\times7{,}2\times10^{7}}{2\times15^{3}} \quad D=\frac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

**Corrigé :** $A=\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2\right)$

$A=3+2\sqrt{33}+11-\left(3-2\sqrt{33}+11\right)=3+2\sqrt{33}+11-3+2\sqrt{33}-11=4\sqrt{33}$

$B=\left(\left(4\sqrt{3}-7\right)\left(4\sqrt{3}+7\right)\right)^{2015}=\left(\left(4\sqrt{3}\right)^2-(7)^2\right)^{2015}=(48-49)^{2015}=(-1)^{2015}=-1$

$$C=\frac{3\times10^{-5}\times7,2\times10^{7}}{2\times15^{3}}=\frac{3\times10^{-5}\times3^{2}\times2^{3}\times10^{-1}\times10^{7}}{2\times(3\times5)^{3}}$$

$$C=\frac{3\times3^{2}\times2^{3}\times10}{2\times3^{3}\times5^{3}}=\frac{3\times3^{2}\times2^{3}\times2\times5}{2\times3^{3}\times5^{3}}=\frac{2^{3}}{5^{2}}=\frac{8}{25}$$

$$D=\frac{(-2)^{3}\times(4^{2})^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}=\frac{-2^{3}\times4^{2\times(-1)}\times2^{3}}{1024\times(-2^{3})^{-4}}=\frac{-2^{3}\times(2^{2})^{-2}\times2^{3}}{2^{10}\times(-2^{3})^{-4}}$$

$$D=-2^{3}\times(2^{2})^{-2}\times2^{3}\times2^{-10}\times(-2)^{3\times4}=-2^{3-4+3-10+12}=-2^{4}=-16$$

$$F=(200520052006)^{2}-(200520052005\times200520052007)$$

On pose : $x=200520052006$ donc :

$200520052007=x+1$ et $200520052005=x-1$

Donc : $F=x^{2}-(x-1)(x+1)=x^{2}-x^{2}+1=1$

**Exercice7 :** 03(*) (**) (***) Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$ ; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$A=4x^{3}-20x^{2}+25x$ ; $B=x^{2}+12x+36$ ; $C=100x^{3}-3x$ ; $D=(4x^{2}-100)(x-2)+(-6x+30)(x-1)$

$E=2x^{2}-2\sqrt{6}x+3$ ; $F=(7x-1)(3x-5)+25x-9x^{3}$ ; $G=(14x-21)(3x-1)+(15-10x)(x-11)$

$H=9x^{9}-6x^{5}+x$ ; $P=64x^{3}-1+x(4x-1)$ ; $Q=125x^{3}-1-2(25x^{2}-1)-3(-5x+1)$

$R=x^{6}+x^{4}-2x^{2}-2$ ; $L=x^{4}-36$

**Corrigé :** $A=4x^{3}-20x^{2}+25x=4x\times x^{2}-20x\times x+25x$ donc $x$ facteur commun

Donc : $A=x(4x^{2}-20x+25)$

$$A=x\left((2x)^{2}-2\times2x\times5+5^{2}\right)=x(2x-5)^{2}$$

$B=x^{2}+12x+36$ est du type : $a^{2}+2ab+b^{2}$

$$B=x^{2}+2\times x\times6+6^{2}=(x+6)^{2}$$

$C=100x^{3}-3x=x(100x^{2}-3)=x\left((10x)^{2}-\sqrt{3}^{2}\right)$ est du type : $a^{2}-b^{2}$

$$C=x(10x-\sqrt{3})(10x+\sqrt{3})$$

$$D=(4x^{2}-100)(x-2)+(-6x+30)(x-1)$$

$$D=\left((2x)^{2}-10^{2}\right)(x-2)-3(2x-10)(x-1)$$

$D=(2x+10)(2x-10)(x-2)-3(2x-10)(x-1)$ On a : $2x-10$ facteur commun

Donc : $D=(2x-10)\left[(2x+10)(x-2)-3(x-1)\right]=(2x-10)(2x^{2}-4x+10x-20-3x+3)$

$$D=(2x-10)(2x^{2}+3x-17)$$

$E=2x^{2}-2\sqrt{6}x+3$ est du type : $a^{2}-2ab+b^{2}$

$$E=(\sqrt{2}x)^{2}-2\times\sqrt{2}x\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^{2}=(\sqrt{2}x-\sqrt{3})^{2}$$

$$F=(7x-1)(3x-5)+25x-9x^{3}$$

$F=(7x-1)(3x-5)-x(9x^{2}-25)=(7x-1)(3x-5)-x\left((3x)^{2}-5^{2}\right)$ mais $(3x)^{2}-5^{2}$ est du type : $a^{2}-b^{2}$

Donc : $F=(7x-1)(3x-5)-x(3x-5)(3x+5)$ On a : $3x-5$ facteur commun

Donc : $F=(3x-5)\left[(7x-1)-x(3x+5)\right]=(3x-5)(7x-1-3x^{2}-5x)=(3x-5)(-3x^{2}+2x-1)$

$G=(14x-21)(3x-1)+(15-10x)(x-11)$

$G=7(2x-3)(3x-1)-5(2x-3)(x-11)$ On a : $2x-3$ facteur commun

Donc : $G=(2x-3)\left[7(3x-1)-5(x-11)\right]=(2x-3)(21x-7-5x+55)=(2x-3)(16x+48)$

$H=9x^9-6x^5+x=x\left(9x^8-6x^4+1\right)$

$H=x\left(\left(3x^4\right)^2-2\times3x^4\times1+1^2\right)$ est du type : $a^2-2ab+b^2$

Donc : $H=x\left(3x^4-1\right)^2$

$P=64x^3-1+x(4x-1)=(4x)^3-1^3+x(4x-1)$ On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

Donc : $P=(4x-1)\left((4x)^2+4x+1^2\right)+x(4x-1)$

Donc : $P=(4x-1)\left(16x^2+4x+1+x\right)=(4x-1)\left(16x^2+5x+1\right)$

$Q=125x^3+1-2\left(25x^2-1\right)+3(-5x-1)$

$Q=(5x)^3+1^3-2\left((5x)^2-1^2\right)-3(5x+1)$ et on a : $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab-b^2\right)$ et

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Donc : $Q=(5x+1)\left((5x)^2+5x+1^2\right)-2(5x+1)(5x-1)-3(5x+1)$ On a : $5x+1$ facteur commun

Donc : $Q=(5x+1)\left[\left(25x^2+5x+1\right)-2(5x-1)-3\right]$

Donc : $Q=(5x+1)\left(25x^2+5x+1-10x+2-3\right)$

Donc : $Q=(5x+1)\left(25x^2-5x\right)=5x(5x+1)(x-1)$

$R=x^6+x^4-2x^2-2$

$R=\left(x^6+x^4\right)-2\left(x^2+1\right)$

$R=x^4\left(x^2+1\right)-2\left(x^2+1\right)$

$R=x^4\left(x^2+1\right)-2\left(x^2+1\right)$ On a : $x^2+1$ facteur commun

$R=\left(x^2+1\right)\left(x^4-2\right)$ on peut aussi continuer la factorisation

$R=\left(x^2+1\right)\left(\left(x^2\right)^2-\sqrt{2}^2\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2-\sqrt{\sqrt{2}}^2\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right)$

$R=\left(x^2+1\right)\left(x-\sqrt{\sqrt{2}}\right)\left(x+\sqrt{\sqrt{2}}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right)$

$L=x^4-36=x^4-\left(\sqrt{6}\right)^4=\left(x^2\right)^2-\left(\sqrt{6}^2\right)^2$

$L=\left(x^2-\sqrt{6}^2\right)\left(x^2+\sqrt{6}^2\right)=\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)\left(x^2+6\right)$

**Exercice8 :** (**) On pose : $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ et $B=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

1) Montrer que : $A\times B=2$

2) On pose : $X=A+B$ et $Y=A-B$ Calculer : $X^2$ et $Y^2$

3) En déduire une écriture simple de $X$ et $Y$

4) En déduire une écriture simple de $A$ et $B$

**Corrigé :** $A\times B=\sqrt{4+2\sqrt{3}}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)}$

$A\times B=\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16-12}=\sqrt{4}=2$

2) On a : $X=A+B$ et $Y=A-B$

Donc : $X^2=\left(A+B\right)^2=A^2+B^2+2A\times B=A^2+B^2+2\times 2$

Donc ; $X^2=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}+2\times 2=12$

Et : $Y^2=\left(A-B\right)^2=A^2+B^2-2A\times B=A^2+B^2-2\times 2$

Donc : $Y^2=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-4=4$

3) Déduction d'une écriture simple de $X$ et $Y$ :

On a : $X^2=12$ donc : $X=\sqrt{12}$ ou $X=-\sqrt{12}$

Or on sait que : $X=A+B$ donc $X$ est la somme de deux nombres positifs donc c'est un nombre positif

Donc : $X=\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$

On a aussi : $Y^2=4$ et on Remarque que : $A>B$ donc : $Y$ est positif par suite : $Y=\sqrt{4}=2$

4) Déduire une écriture simple de $A$ et $B$ :

On a : $\begin{cases} X=2\sqrt{3} \\ Y=2 \end{cases}$ équivaut à : $\begin{cases} A+B=2\sqrt{3} \\ A-B=2 \end{cases}$

En faisant la somme membre à membre les deux équations : On trouve : $2A=2+2\sqrt{3}$

Donc : $A=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}=1+\sqrt{3}$

Et on a : $A+B=2\sqrt{3}$ donc: $B=2\sqrt{3}-A$ Equivaut à : $B=2\sqrt{3}-1-\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$

**Exercice9 :** (***) $n\in\mathbb{N}^*$

1) Déterminer les nombres $a$ et $b$ tels que : $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$

2) En déduire la valeur du nombre : $A=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\dfrac{1}{4\times 5}+\dots+\dfrac{1}{2020\times 2021}$

**Corrigé :** $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$

Équivaux a : $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}$

Équivaux a : $a(n+1)+bn=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Pour : n=1 on a : $2a+b=1$

Pour : n=2 on a : $3a+2b=1$

On va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2a+b=1 & (1) \\ 3a+2b=1 & (2) \end{cases}$

Par exemple Par la Méthode de substitution :On exprime $b$ en fonction de $a$ dans la première équation et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} b=1-2a \\ 3a+2b=1 \end{cases}$ On remplace ensuite $b$ par $1-2a$ dans la seconde équation, ce qui donne le système : $\begin{cases} b=1-2a \\ 3a+2(1-2a)=1 \end{cases}$ Qui équivaut à $\begin{cases} b=1-2a \\ -a+2=1 \end{cases}$

Soit encore à $\begin{cases} b = 1-2a \\ a = 1 \end{cases}$ et on remplace $a$ par 1 dans la première équation on trouve $\begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$

Par suite : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) D'après la question précédente on a : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $n=1$: $\frac{1}{1\times 2} = 1 - \frac{1}{2}$

$n=2$: $\frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$n=3$: $\frac{1}{3\times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

Ainsi de suite…

$n=2020$: $\frac{1}{2020\times 2021} = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}$

Donc : $A = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + ... + \frac{1}{2020\times 2021}$ $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + .... \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}$

En simplifiant avec les nombres opposés on trouve : $A = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2021-1}{2021} = \frac{2020}{2021}$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*