Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 : l'ensemble des nombres réels et sous-ensembles

Exercice1 : (*) Indiquer, dans chacun des cas, si le nombre appartient ou pas à chacun des ensembles proposés.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	D	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-3					
$\frac{18}{3}$					
2×10^{-2}					
$\frac{22}{5}$					
$-\frac{28}{4}$					
$\frac{5}{6}$					
$\sqrt{1.44}$					
$-\sqrt{64}$					

Corrigé :

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	D	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-3	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
$\frac{18}{3}$	faux	faux	faux	vrai	vrai
2×10^{-2}	faux	faux	vrai	vrai	vrai
$\frac{22}{5}$	faux	faux	vrai	vrai	vrai
$-\frac{28}{4}$	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
$\frac{5}{6}$	faux	faux	vrai	vrai	vrai
$\frac{5}{\pi}$	faux	faux	faux	faux	vrai
$\sqrt{1.44}$	faux	faux	vrai	vrai	vrai

Exercice2 : (***) Démonstration

1)Rappeler la définition d'un nombre décimal.

2)Démontrer que $\frac{9}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

(On pourra utiliser la décomposition en facteurs premiers et un raisonnement par l'absurde).

PROF: ATMANI NAJIB

Corrigé :1) On a : $D=\left\{a\times 10^{-n}=\frac{a}{10^n}\,/\,a\in\mathbb{Z};n\in\mathbb{N}\right\}$

Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit sous la forme : $\frac{a}{10^n}$ avec $a\in\mathbb{Z};n\in\mathbb{N}$

2) On raisonne par l'absurde : On suppose que : $\frac{9}{7}$ est un nombre décimal donc : $\frac{9}{7}=\frac{a}{10^n}$

Donc : $9\times 10^n=7a$ et on va décomposer en facteurs premiers on trouve :

$2^n\times 3^2\times 5^n=7a$ et puisque la décomposition en facteurs premiers est unique et 7 apparait à droite mais pas à gauche alors il y'a contradiction

Par suite : $\frac{9}{7}$ n'est pas un nombre décimal

Exercice3 : Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses, en justifiant votre réponse à l'aide d'une propriété, d'un calcul ou d'un contre-exemple.

1) Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

2) $\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+1$

3) $\sqrt{\left(1-3\sqrt{10}\right)^2}=1-3\sqrt{10}$

Corrigé :1) fausse

Contre-exemple : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ mais : $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\in\mathbb{Q}$

2) Vraie car :

$$\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}+2}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}=\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}^2-2^2}=\frac{\sqrt{6}+2}{6-4}=\frac{\sqrt{6}+2}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+1$$

3) Faux car $\sqrt{\left(1-3\sqrt{10}\right)^2}\in\mathbb{R}^+$ mais : $1-3\sqrt{10}\in\mathbb{R}^-$ car $1<3\sqrt{10}$

Exercice4 : Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses

1) $\frac{1}{7}$ est un rationnel non décimal. (0,5 pt)

2) π est un réel non rationnel (0,5 pt)

3) 1,2 un décimal non entier. (0,25 pt)

4) −2 est un entier non naturel. (0,25 pt)

5) $\frac{\pi}{2}$ est un irrationnel

Exercice5 : Calculer **et** simplifier : $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}$ $\quad B=\frac{-2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2$ $\quad C=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2$ $\quad D=\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}$

$E=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)$ $\qquad G=\left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)+(b-c)\right]$

Corrigé : $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}=\frac{9}{12}+\frac{20}{12}-\frac{14}{12}=\frac{9+20-14}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

$B=\frac{-2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2=\frac{-8}{12}+\frac{14}{12}-\frac{3}{12}-\frac{24}{12}=\frac{-8+14-3-24}{12}=\frac{-21}{12}=-\frac{7}{4}$

PROF. ATMANI NAJIB

$$C=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{4-15}{6}\right)^2=\left(\frac{-11}{6}\right)^2=\frac{(-11)^2}{6^2}=\frac{121}{36}$$

$$D=\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{16}{3}\times\frac{2}{1}=\frac{32}{3}$$

$$E=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{10}+\frac{10}{10}-\frac{5}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{4+10-5}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{10}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{3\times3}{5\times2}=\frac{3}{5}$$

$$G=\left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)+(b-c)\right]=(a-c-a+b)-(c-a+b-c)$$

$$G=a-c-a+b-c+a-b+c=a-c$$

Exercice6 : (**) Soient $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}^*$ et $c\in\mathbb{R}^*$ tels que : $ab+bc+ca=0$

Calculer : $B=\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}$

Corrigé : $B=\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}=\frac{ab(a+b)}{abc}+\frac{ac(a+c)}{abc}+\frac{bc(b+c)}{abc}$

$$B=\frac{a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2}{abc}$$

$$B=\frac{\left(a^2b+a^2\right)c+\left(ab^2+b^2c\right)+\left(ac^2+bc^2\right)}{abc}$$

$$B=\frac{a(ab+ac)+b(ab+bc)+c(ac+bc)}{abc}$$

Or on a : $ab+bc+ca=0$ donc $ab+ca=-bc$
et $ab+bc=-ca$ et $ac+bc=-ab$

Donc : $B=\frac{a(-bc)+b(-ca)+c(-ab)}{abc}=\frac{-abc-abc-abc}{abc}=\frac{-3abc}{abc}=-3$

Exercice7 : Calculer et simplifier

$$X=\frac{6}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}-\frac{14}{\sqrt{10}+\sqrt{3}}+\frac{20}{\sqrt{3}-\sqrt{13}}$$

Corrigé :

On a : $\frac{6}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}=\frac{6\left(\sqrt{13}+\sqrt{10}\right)}{\left(\sqrt{13}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{10}\right)}=\frac{6\left(\sqrt{13}+\sqrt{10}\right)}{\left(\sqrt{13}\right)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}=\frac{6\left(\sqrt{13}+\sqrt{10}\right)}{13-10}=\frac{6\left(\sqrt{13}+\sqrt{10}\right)}{3}=2\left(\sqrt{13}+\sqrt{10}\right)$

$$\frac{14}{\sqrt{10}+\sqrt{3}}=\frac{14\left(\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)}=\frac{14\left(\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{14\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)}{10-3}=\frac{14\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)}{7}=2\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)$$

$$\frac{20}{\sqrt{3}-\sqrt{13}}=\frac{20\left(\sqrt{3}+\sqrt{13}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{13}\right)}=\frac{20\left(\sqrt{3}+\sqrt{13}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{13}\right)^2}=\frac{20\left(\sqrt{3}+\sqrt{13}\right)}{3-13}=\frac{20\left(\sqrt{3}+\sqrt{13}\right)}{-10}=-2\left(\sqrt{3}+\sqrt{13}\right)$$

Donc : $X=\frac{6}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}-\frac{14}{\sqrt{10}+\sqrt{3}}+\frac{20}{\sqrt{3}-\sqrt{13}}=2\left(\sqrt{13}+\sqrt{10}\right)-2\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)-2\left(\sqrt{3}+\sqrt{13}\right)$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $X = 2\sqrt{13} + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{13} = -4\sqrt{10}$

Exercice8 : (**) Simplifier : $G = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$ et $H = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$

Corrigé : On a : $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)^2}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)} = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1}\right)^2} = 3+2\sqrt{2}$

Donc : $G = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \left|\sqrt{2}+1\right| = \sqrt{2}+1$

Et $H = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \dfrac{1}{G} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{2}-1$

Exercice9 : Ecrire plus simplement : $A = (-2x)^2$ $B = (-2x)^3$ $C = 3x^2y^3 - y(xy)^2$ $D = x^{-1} \times 5x^3$

Corrigé : $A = (-2x)^2 = 4x^2$ $B = (-2x)^3 = -8x^3$ $C = 3x^2y^3 - y(xy)^2 = x^2y^3(3-1) = 2x^2y^3$

$D = x^{-1} \times 5x^3 = 5x^2$.

Exercice10 : PUISSANCES DE DIX

a. Compléter

$10^3 =$	$10^{-1} =$	$10^{-3} =$	
$100 =$	$0,001 =$	$4,3 = 43 \times$	
$2,34 = 234 \times$	$0,149 = 149 \times$	$15000 = 15 \times$	
$7040 = 704 \times$	$3 \times 10^{-4} =$	$1,4 \times 10^2 =$	
$0,012 \times 10^2 =$	$546,3 \times 10^{-2} =$	$2,35 \times 10^{11} =$	$\times 10^9$

Corrigé :

$10^3 = 1000$	$10^{-1} = 1/10 = 0,1$	$10^{-3} = 0,001$
$100 = 10^2$	$0,001 = 10^{-3}$	$4,3 = 43 \times 10^{-1}$
$2,34 = 234 \times 10^{-2}$	$0,149 = 149 \times 10^{-3}$	$15000 = 15 \times 10^3$
$7040 = 704 \times 10$	$3 \times 10^{-4} = 0,0003$	$1,4 \times 10^2 = 140$
$0,012 \times 10^2 = 1,2$	$546,3 \times 10^{-2} = 5,463$	$2,35 \times 10^{11} = 235 \times 10^9$

Exercice11 : *a*, *b* et *c* sont des nombres non nuls. Ecrire les nombres suivants sous la forme $a^p \times b^q \times c^r$:

$A = \dfrac{c}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}$ $B = a^5(bc)^2 \times \dfrac{1}{\left(a^3b\right)^2}$ $C = \dfrac{ab^2}{ca^{-2}}$ $D = \left(a^3b^{-5}\right)^2$

Corrigé : $A = \dfrac{c}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2} = a^{-2} \times b^2 \times c$; $B = a^5(bc)^2 \times \dfrac{1}{\left(a^3b\right)^2} = a^{-1} \times c^2$; $C = \dfrac{ab^2}{ca^{-2}} = a^3 \times b^2 \times c^{-1}$; $D = \left(a^3b^{-5}\right)^2 = a^6 \times b^{-10}$.

Exercice12 : Les constantes universelles : les formules de physique comportent souvent des nombres très particuliers que l'on appelle constantes universelles

(par exemple la célérité de la lumière c = 299 792458 ms^{-1}).

Ecrire les constantes universelles suivantes en notations scientifiques :

$F = 96484,56$

$u = 166,0565 \times 10^{-29}$

$h = 0,6626176 \times 10^{-33}$

$c = 299792458$

g = 980,665 x 10^{-2};

N_A= 6 022,045 $\times 10^{20}$;

$m_e = 910{,}9534 \times 10^{-33}$;

e = 1602,1892 $\times 10^{-22}$

Exercice13: (*) Ecrire les expressions suivantes sous la forme : $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$

1) $3-2\sqrt{2}$ 2) $12-6\sqrt{3}$ 3) $7-4\sqrt{3}$ 4) $45-20\sqrt{5}$

Corrigé :

1) $3-2\sqrt{2}=1-2\times1\sqrt{2}+2=1^2-2\times1\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

2) $12-6\sqrt{3}=9-2\times3\sqrt{3}+3=3^2-2\times3\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(3-\sqrt{3}\right)^2$

3) $7-4\sqrt{3}=4-2\times2\sqrt{3}+3=2^2-2\times2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$

4) $45-20\sqrt{5}=45-2\times2\sqrt{5}\times5=5^2-2\times2\sqrt{5}\times5+\left(2\sqrt{5}\right)^2=\left(5-2\sqrt{5}\right)^2$

Exercice14: (**) On pose : $A=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}$

1) Calculer : A^2

2)En déduire que : $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Corrigé : 1)

$$A^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}\right)^2+2\sqrt{9-\sqrt{79}}\sqrt{9+\sqrt{79}}+\left(\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2$$

$$A^2=9-\sqrt{79}+2\sqrt{\left(9-\sqrt{79}\right)\left(9+\sqrt{79}\right)}+9+\sqrt{79}$$

$$A^2=2\times9+2\sqrt{\left(9^2-\left(\sqrt{79}\right)^2\right)}=18+2\sqrt{(81-79)}=18+2\sqrt{2}=18+\sqrt{8}$$

2) Déduction que $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

$A^2=18+\sqrt{8}$ Signifie que : $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$ ou $A=-\sqrt{18+\sqrt{8}}$ mais on a : $A=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}>0$

Finalement : $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Exercice15 : (*) (**) (***) Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$A=100x^3-25x$; $B=x^2-10x+25$; $C=2x^2-5$; $D=(x^2-1)(x-2)-(x-1)(5x+1)$

$E=4x^2+12x+9$; $F=(5x-1)(2x-3)-4x^2+9$; $G=(15x-5)(3x-5)-(6x-2)(7x-1)$

$H=4x^8-12x^4+9$ $P=27x^3+8$; $K=8x^3+27-3\left(4x^2-9\right)-5(2x+3)$

$L=4a^2+b^2-x^2-4ab$; $M=y^2-y-4x^2+2x$

Corrigé : $A=25x^3-100x=25x\times x^2-25x\times4$ donc $25x$ facteur commun

Donc : $A=25x(x^2-4)=25x(x^2-2^2)=25x(x-2)(x+2)$

$B=x^2-10x+25$ est du type : $a^2-2ab+b^2$

$B=x^2-2\times x\times5+5^2=(x-5)^2$

$C=2x^2-5$ est du type : a^2-b^2

$C=\left(\sqrt{2}x\right)^2-\sqrt{5}^2=\left(\sqrt{2}x-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{5}\right)$

$D=(x^2-1)(x-2)-(x-1)(5x+1)=(x^2-1^2)(x-2)-(x-1)(5x+1)$

$D=(x+1)(x-1)(x-2)-(x-1)(5x+1)$ On a : $x-1$ facteur commun

Donc : $D=(x-1)\left[(x+1)(x-2)-(5x+1)\right]=(x-1)(x^2-2x+x-2-5x-1)=(x-1)(x^2-9x-3)$

$E=4x^2+12x+9$ est du type : $a^2+2ab+b^2$

$E=4x^2+12x+9=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2=(2x+3)^2$

$F=(5x-1)(2x-3)-4x^2+9$

$F=(5x-1)(2x-3)-(4x^2-9)=(5x-1)(2x-3)-\left((2x)^2-3^2\right)$ mais $(2x)^2-3^2$ est du type : a^2-b^2

Donc : $F=(5x-1)(2x-3)-(2x-3)(2x+3)$ On a : $2x-3$ facteur commun

Donc : $F=(2x-3)\left[(5x-1)-(2x+3)\right]=(2x-3)(5x-1-2x-3)=(2x-3)(3x-4)$

$G=(15x-5)(3x-5)-(6x-2)(7x-1)$

$G=(15x-5)(3x-5)-(6x-2)(7x-1)=5(3x-1)(3x-5)-2(3x-1)(7x-1)$

On a : $3x-1$ facteur commun

Donc : $G=(3x-1)\left[5(3x-5)-2(7x-1)\right]=(3x-1)(-15x-25-14x+2)=(3x-1)(-29x-23)$

$H=4x^8-12x^4+9=(2x^4)^2-2\times 2x^4\times 3+3^2$ est du type : $a^2-2ab+b^2$

Donc : $H=(2x^4-3)^2$

$P=27x^3+8=(3x)^3+2^3$ On a : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab-b^2)$

Donc : $P=(3x+2)(9x^2-6x+2^2)=(3x+2)(9x^2-6x+4)$

$K=8x^3-27-3(4x^2-9)-5(2x-3)$

$K=(2x)^3-3^3-3\left((2x)^2-3^2\right)-5(2x-3)$ et on a : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ et

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Donc : $K=(2x-3)\left((2x)^2+6x+3^2\right)-3(2x-3)(2x+3)-5(2x-3)$ On a : $2x-3$ facteur commun

Donc : $K=(2x-3)\left[(4x^2+6x+9)-3(2x+3)-5\right]$

Donc : $K=(2x-3)(4x^2+6x+9-6x-9-5)$

Donc : $K=(2x-3)(4x^2-5)=(2x-3)\left((2x)^2-\sqrt{5}^2\right)=(2x-3)(2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})$

$L=4a^2+b^2-x^2-4ab$

$L=(4a^2-4ab+b^2)-x^2$

$L=\left((2a)^2-2\times 2a\times b+b^2\right)-x^2=(2a-b)^2-x^2=(2a-b-x)(2a-b+x)$

$M=y^2-y-4x^2+2x$

$M=y^2-y-4x^2+2x=y^2-4x^2-(y-2x)$

$M=(y-2x)(y+2x)-(y-2x)\times 1$

Donc : $M=(y-2x)(y+2x-1)$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien