

Exercice1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $x - 5 = -x\sqrt{5} + \sqrt{75}$ 2) $-5(2x + 5) = -10x + 2$

3) $5(2x - 3) = 12x - 2(x + 4) - 7$

4) $(5x - 1)^2 - (5x - 1)(x + 1) = 0$

5) $x^2 - 121 = 0$ 6) $\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1} = 0$

7) $\frac{(x-4)(x+2)}{x^2-4} = 0$ 8) $|5x - 11| = |3 + 2x|$

9) $x^3 - 7x = 0$

10) $x^3 + 27 + 2(x^2 - 9) - 3x - 9 = 0$

11) $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-1} = \frac{2x-2}{\sqrt{2x-2}}$

Corrigé : 1) $x - 5 = -x\sqrt{5} + \sqrt{75}$

Équivaut à : $x + x\sqrt{5} = 5 + \sqrt{5} \times 25$

Équivaut à $x(1 + \sqrt{5}) = 5 + 5\sqrt{5}$

Équivaut à : $x = \frac{5 + 5\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{5(1 + \sqrt{5})}{1 + \sqrt{5}} = 5$

Et par suite : $S = \{5\}$

2) $-5(2x + 5) = -10x + 2$ équivaut à

$-10x - 25 = -10x + 2$ équivaut à

$-10x + 10x = 25 + 2$ équivaut à $0x = 27$

Équivaut à $0 = 27$ ceci est impossible

Donc l'ensemble des Solutions est : $S = \emptyset$

3) $5(2x - 3) = 12x - 2(x + 4) - 7$

Équivaut à $10x - 15 = 12x - 2x - 8 - 7$

Équivaut à $10x - 15 = 10x - 2x - 15$

Équivaut à $0 = 0$ donc tous les réels sont solutions et par suite : $S = \mathbb{R}$

4) $(5x - 1)^2 - (5x - 1)(x - 1) = 0$

Ce qui est équivalent à : $(5x - 1)((5x - 1) - (x - 1)) = 0$

Ce qui est équivalent à : $(5x - 1)(5x - 1 - x + 1) = 0$

Ce qui est équivalent à : $(5x - 1)(4x) = 0$

Ce qui est équivalent à : $5x - 1 = 0$ ou $4x = 0$

Ce qui est équivalent à : $x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{0}{4} = 0$

Donc l'ensemble des Solutions est : $S = \{0; 1/5\}$

5) $x^2 - 121 = 0$ équivaut à : $x^2 - 11^2 = 0$

C'est une identité remarquable de la forme :

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$

Équivalent à : $(x - 11)(x + 11) = 0$

Équivalent à : $x - 11 = 0$ ou $x + 11 = 0$

Équivalent à : $x = 11$ ou $x = -11$

D'où : $S = \{-11; 11\}$

6) $\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1} = 0$ Cette équation est définie

si $x + 1 \neq 0$ ou $x - 1 \neq 0$.

si $x \neq -1$ ou $x \neq 1$.

Les valeurs interdites de cette équation sont -1 et 1.

Le domaine de l'équation est : $D_E = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Le dénominateur commun est : $(x + 1)(x - 1)$

$\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1} = 0$ Équivalent à $\frac{1(x-1) - 3(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 0$

Équivalent à $\frac{x - 1 - 3x - 3}{(x+1)(x-1)} = 0$

C'est-à-dire : $\frac{-2x - 4}{(x+1)(x-1)} = 0$

Donc : $-2x - 4 = 0$ équivaut à : $x = \frac{4}{-2} = -2$

-2 appartient à l'ensemble de définition de l'équation

d'où : $S = \{-2\}$

7) $\frac{(x-4)(x+2)}{x^2-4} = 0$ Cette équation existe si

$x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 - 4 = 0$ Équivalent à : $x^2 - 2^2 = 0$

Équivalent à : $(x + 2)(x - 2) = 0$

Équivalent à $x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$

Équivalent à : $x = -2$ ou $x = 2$

Les valeurs interdites de cette équation sont -2 et 2.

L'équation est donc définie sur : $D_E = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

$\frac{(x-4)(x+2)}{x^2-4} = 0$ Équivalent à $(x - 4)(x + 2) = 0$

Équivalent à $x - 4 = 0$ ou $x + 2 = 0$

Équivalent à $x = 4 \in D_E$ ou $x = -2 \notin D_E$

Donc : $S = \{4\}$

8) $|5x - 11| = |3 + 2x|$

Équivalent à : $5x - 11 = 3 + 2x$ ou $5x - 11 = -(3 + 2x)$

Équivalent à : $3x = 14$ ou $7x = 8$

Équivalent à $x = \frac{14}{3}$ ou $x = \frac{8}{7}$

Donc l'ensemble de toutes les Solutions est :

$$S = \left\{ \frac{14}{3}; \frac{8}{7} \right\}$$

9) $x^3 - 7x = 0$ Équivalent à : $x(x^2 - 7) = 0$

Équivalent à : $x = 0$ ou $x^2 - 7 = 0$

Équivalent à : $x = 0$ ou $x^2 = 7$

Équivalent à : $x = 0$ ou $x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

D'où : $S = \{-\sqrt{7}; 0; \sqrt{7}\}$

10) $x^3 + 27 + 2(x^2 - 9) - 3x - 9 = 0$

Équivalent à : $x^3 + 3^3 + 2(x^2 - 3^2) - 3(x + 3) = 0$

Équivalent à :

$(x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 2(x + 3)(x - 3) - 3(x + 3) = 0$

car : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Équivalent à : $(x + 3)[(x^2 - 3x + 9) + 2(x - 3) - 3] = 0$

Équivalent à : $(x + 3)(x^2 - 3x + 9 + 2x - 6 - 3) = 0$

C'est-à-dire : $(x + 3)(x^2 - x) = 0$

Équivalent à : $x(x + 3)(x - 1) = 0$

Équivalent à : $x = 0$ ou $x + 3 = 0$ ou $x - 1 = 0$

Équivalent à : $x = 0$ ou $x = -3$ ou $x = 1$

D'où : $S = \{-3; 0; 1\}$

11) $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-1} = \frac{2x-2}{\sqrt{2x-2}}$

Cette équation n'existe pas si :

$x - 1 = 0$ et si $\sqrt{2x - 2} = 0$

$x - 1 = 0$ Équivalent à : $x = 1$

$\sqrt{2x - 2} = 0$ Équivalent à : $x = \frac{2}{2} = 1$

Les valeurs interdites de cette équation sont :

1 et $\sqrt{2}$.

L'équation est donc définie sur $D_E = \mathbb{R} \setminus \{1; \sqrt{2}\}$.

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{x-1} = \frac{2x-2}{\sqrt{2x-2}}$$

Équivalent à : $(\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x-2}) = (2x-2)(x-1)$

Équivalent à : $2x^2 - 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}x + 2 = 2x^2 - 2x - 2x + 2$

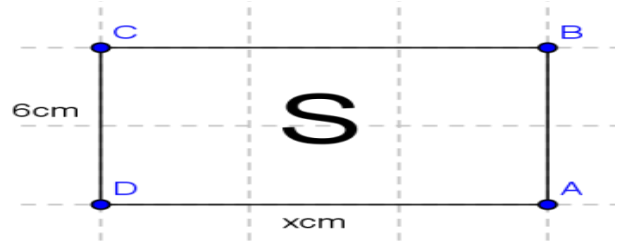
Équivalent à : $-3\sqrt{2}x + 4x = 0$

Équivalent à : $(-3\sqrt{2} + 4)x = 0$

Équivalent à : $x = 0 \in D_E$ d'où : $S = \{0\}$

Exercice2 : Quelle est la longueur d'un rectangle sachant que sa largeur est 6cm et sa surface vaut le double de son périmètre ?

Corrigé :



Soit S La surface du rectangle $ABCD$

Et P Le périmètre du rectangle $ABCD$

Soit x La longueur du rectangle

On a donc : $S = 6x$ et $P = 2(6 + x) = 12 + 2x$

$S = 2P$ Signifie $6x = 2(12 + 2x)$

Signifie $6x = 24 + 4x$ c'est-à-dire : $2x = 24$

Signifie $x = \frac{24}{2} = 12cm$

Exercice3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

suivantes : 1) $-2x + 6 > 0$ 2) $5x - 15 \leq 0$

3) $-6x + 7 > x - 7$

4) $(1-x)(2x+4) > 0$ 5) $\frac{5x-2}{1+3x} \geq 0$

6) $\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-4} \geq 0$

Corrigé : 1) $-2x + 6 > 0$

$-2x + 12 = 0$ Équivalent à : $x = 6$

Et $-2 = a$ on a : $a < 0$ (coefficient de x négatif)

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x+6$	+	0	-

Donc : $S =]-\infty; 3[$

2) $5x - 15 \leq 0$

$5x - 15 = 0$ Équivalent à : $x = 3$

$5 = a$ et $a > 0$ (coefficient de x positif)

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15$	-	0	+

Donc : $S =]-\infty; 3[$

3) $-6x + 7 > x - 7$ équivalent à : $-7x > -14$

Équivalent à : $x < \frac{-14}{-7}$ donc : $x < 2$

L'ensemble de solution est alors : $S =]-\infty; 2[$

4) $(1-x)(2x+4) > 0$

$(1-x)(2x+4) = 0$

Équivalent à : $2x + 4 = 0$ ou $1 - x = 0$

Équivalent à : $x = -2$ ou $x = 1$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$(2x+4)(1-x)$	-	0	+	-

Donc : $S =]-2; 1[$

5) (Signe d'un quotient méthode)

- Donner l'ensemble de définition.
- Rechercher les valeurs de x annulant chacun des facteurs et Dresser un tableau de signes :

Le quotient de deux nombres de même signe est positif (+). et le quotient de deux nombres de signes différents est négatif.

$$\frac{5x-2}{1+3x} \geq 0$$

• Cette inéquation existe si $1+3x \neq 0$

$$1+3x=0 \text{ Équivalent à : } x = -\frac{1}{3}$$

La valeur interdite de cette inéquation est $-\frac{1}{3}$.

L'inéquation est donc définie sur : $D_I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

$$\bullet 5x-2=0 \text{ Équivalent à : } x = \frac{2}{5}$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$5x-2$	-	-	0	+
$1+3x$	-	0	+	+
$\frac{5x-2}{1+3x}$	+	-	0	+

Attention à ne pas oublier la double barre pour la valeur interdite donc : $S =]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup \left[\frac{2}{5}; +\infty\right[$

$$6) \frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-4} \geq 0 \text{ Signifie que } \frac{(2x+1)(1-x)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation : Cette inéquation est définie si et seulement si $x^2-4 \neq 0$

Qui signifie que : $x \neq 2$ ou $x \neq -2$

Donc: le domaine de définition de l'inéquation est :

$$D_I = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

b) Résolvons l'inéquation:

$$1-x=0 \text{ Signifie que: } x=1$$

$$2x+1=0 \text{ Signifie que: } x = -\frac{1}{2}$$

Donc le tableau des Signes est :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$2x+1$	-	-	0	+	+	+
$1-x$	+	+	+	0	-	-
$x-2$	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+
$\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-4}$	-	+	0	-	0	-

$$\text{Par suite: } S = \left]-2; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; 2[$$

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

$$a) 2x^2 - x - 6 = 0$$

$$b) 2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$$

$$c) x^2 + 3x + 10 = 0$$

Solution : a) Calculons le discriminant de l'équation

$$2x^2 - x - 6 = 0 : a = 2, b = -1 \text{ et } c = -6$$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions

$$\text{distinctes : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2 \text{ donc : } S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$$

Et le trinôme $2x^2 - x - 6$ à une forme factorisée :

$$2x^2 - x - 6 = a \left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x - 2)$$

$$\text{C'est-à-dire : } 2x^2 - x - 6 = 2 \left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 2) = (2x + 3)(x - 2)$$

b) Calculons le discriminant de l'équation

$$2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0 : a = 2, b = -3 \text{ et } c = \frac{9}{8}$$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0.$$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution

$$(dite double): x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{\frac{3}{4}\right\} \text{ et le trinôme } 2x^2 - 3x + \frac{9}{8} \text{ à une}$$

$$\text{forme factorisée : } 2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 2 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2$$

c) Calculons le discriminant de l'équation

$$x^2 + 3x + 10 = 0 : a = 1, b = 3 \text{ et } c = 10$$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31.$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle. C'est-à-dire : $S = \emptyset$

Et on ne peut pas factoriser $x^2 + 3x + 10$

Exercice5 : Avec 60 dh j'ai acheté un nombre de jouets identique. (Ont donc le même prix)
Si chaque jouet avait coûté 1dh de moins ; j'aurais pu en acheter 3 de plus .

Combien en ai-je acheté ?

Solution : Soit n le nombre de jouets achetés

Et soit p le prix d'un jouet en dh

Nous avons donc : $60 = np$ et $60 = (n-1)(p+3)$

Nous déduisons donc l'équation : $n^2 + 3n - 180 = 0$

Calcul du discriminant: $\Delta = 729 > 0$ Les solutions sont :

$$n_1 = \frac{-3 + \sqrt{729}}{2 \times 1} = 12 \text{ et } n_2 = \frac{-3 - \sqrt{729}}{2 \times 1} = -15$$

Nous rejetons $n_2 = -15$ car le prix est positif

Donc : j'ai acheté 12 jouets.

Exercice6 : Soit le trinôme

$$(E) : P(x) = -3x^2 + \sqrt{3}x + 3$$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer.

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha + \beta$; $\alpha \times \beta$;

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} ; \alpha^2 + \beta^2 ; \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} ; \alpha^3 + \beta^3$$

Solution : 1) $a = -3$: et $b = \sqrt{3}$ et $c = 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \sqrt{3}^2 - 4 \times (-3) \times 3 = 3 + 36 = 39$$

Comme $\Delta > 0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

$$2) \text{ On a : } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ et } \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\text{Donc } \alpha + \beta = \frac{-\sqrt{3}}{-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \alpha \times \beta = \frac{3}{-3} = -1$$

$$\text{Et } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{On a : } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\text{Donc } (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{Donc } \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2(-1) = \frac{3}{9} + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

$$\text{On a : } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{7}{3}}{-1} = -\frac{7}{3}$$

$$\text{On sait que : } (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$\text{Donc : } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$$

$$\text{C'est-à-dire : } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\text{Donc : } \alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3(-1)\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{9}$$

Exercice7 : Résoudre les inéquations suivantes

$$a) 4x^2 - 8x + 3 \leq 0$$

$$b) x^2 - 3x - 10 < 0 \quad c) 2x^2 - 4x + 6 \geq 0$$

Solution : a) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$ $a = 4$

Étudions le signe du trinôme :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions

$$\text{distinctes : } x_1 = \frac{8+4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$1/2$	$3/2$	$+\infty$	
$3x^2-4x+6$	+	0	-	0	+

$$\text{Par suite : } S = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

$$b) x^2 - 3x - 10 < 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 49 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$x^2-3x-10$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Par suite : } S =]-2, 5[$$

$$c) 2x^2 - 4x + 6 \geq 0 \quad a = 2$$

Calculons le discriminant : $a = 2$, $b = -4$ et $c = 6$ donc :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 48 = -32 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 - 4x + 6$	+	+

$$\text{Par suite : } S = \mathbb{R}$$

Exercice8 : A) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $2x^2 - 3x - 2 = 0$

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

$$a) 2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0 \quad b) 2x^2 - 3|x| - 2 = 0 \quad c)$$

$$2x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \quad d) 2x^3 - 3x^2 = 2x$$

B) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x^2 + x - 6 = 0 \text{ et } x^2 - x - 2 = 0$$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante :

$$(E) : x^2 - |x - 2| - 4 = 0$$

Solution : A) 1) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

Calculons le discriminant de l'équation

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 : a = 2, b = -3 \text{ et } c = -2$$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions

$$\text{distinctes : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 2 \text{ Donc : } S = \left\{ -\frac{1}{2}; 2 \right\}$$

$$2) 2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0 \text{ avec } x \geq 0$$

$$2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0 \text{ Signifie : } 2(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} - 2 = 0$$

Car $\sqrt{x}^2 = x$ et faisons un changement de variable

En posant : $X = \sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $2X^2 - 3X - 2 = 0$

$$\text{Donc : d'après A) 1) on a : } X = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = 2$$

$$\text{Signifie que : } \sqrt{x} = -\frac{1}{2} \text{ ou } \sqrt{x} = 2$$

Mais l'équation : $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{x} = 2 \text{ Signifie : } (\sqrt{x})^2 = 2^2$$

C'est-à-dire : $x = 4$ et par suite : $S = \{4\}$.

$$2) b) 2x^2 - 3|x| - 2 = 0$$

$$\text{Signifie que : } 2|x|^2 - 3|x| - 2 = 0 \text{ car } |x|^2 = x^2$$

Faisons un changement de variable en posant : $X = |x|$

nous obtenons l'équation : $2X^2 - 3X - 2 = 0$

$$\text{Donc : d'après A) 1) on a : } X = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = 2$$

$$\text{Qui est équivalent à : } |x| = -\frac{1}{2} \text{ ou } |x| = 2$$

Mais l'équation : $|x| = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions

Dans $\mathbb{R}$

$$|x| = 2 \text{ Signifie que : } x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$\text{Par suite } S = \{-2; 2\}$$

$$2) c) 2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$$

$$\text{Signifie que : } 2(x^2)^2 - 3x^2 - 2 = 0$$

Faisons un changement de variable

On pose : $X = x^2$ nous obtenons donc :

$$\text{L'équation : } 2X^2 - 3X - 2 = 0$$

$$\text{Donc : d'après A) 1) on a : } X = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = 2$$

$$\text{Par suite : } x^2 = -\frac{1}{2} \text{ ou } x^2 = 2$$

Mais l'équation : $x^2 = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions

Dans $\mathbb{R}$

$$x^2 = 2 \text{ Signifie : } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

$$\text{Par suite : } S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

$$d) 2x^3 - 3x^2 = 2x \text{ équivalent a : } 2x^3 - 3x^2 - 2x = 0$$

$$\text{Signifie que : } x(2x^2 - 3x - 2) = 0$$

$$\text{Signifie que : } x = 0 \text{ ou } 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\text{Signifie que : } x = 0 \text{ ou } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ ou } x_2 = 2$$

$$\text{Par suite : } S = \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 2 \right\}.$$

B) 1) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

$$x^2 + x - 6 = 0 \text{ et } x^2 - x - 2 = 0$$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$:

$$a = 1, b = 1 \text{ et } c = -6$$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions

$$\text{distinctes : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 2 \text{ Donc : } S = \{-3; 2\}$$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$:

$$a = 1, b = -1 \text{ et } c = -2$$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions

$$\text{distinctes : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 2 \text{ Donc : } S = \{-1; 2\}$$

2) Dédution des solutions de l'équation suivante : (E)

$$: x^2 - |x - 2| - 4 = 0$$

Etudions le signe de : $x - 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	$-$	0	$+$

Si $x \geq 2$ alors $x - 2 \geq 0$ donc : $|x - 2| = x - 2$

$$\text{Donc : l'équation devient : } x^2 - (x - 2) - 4 = 0$$

$$\text{Signifie : } x^2 - x + 2 - 4 = 0$$

$$\text{C'est-à-dire : } x^2 - x - 2 = 0$$

$$\text{Or : d'après B) 1) } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 2$$

$$\text{Mais : } x_1 = -1 \notin [2; +\infty[\text{ donc : } S_1 = \{2\}$$

Si $x < 2$ alors $x - 2 \leq 0$

$$\text{Donc : } |x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$$

$$\text{Donc : l'équation devient : } x^2 + (x - 2) - 4 = 0$$

C'est à dire : $x^2 + x - 2 - 4 = 0$

Signifie : $x^2 + x - 6 = 0$ Or: d'après B) 1)

$x_1 = -3$ et $x_2 = 2$ Mais : $x_2 = 2 \notin]-\infty; 2[$

donc : $S_2 = \{-3\}$

Par suite : $S = S_1 \cup S_2 = \{-3; 2\}$.

Exercice9 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 1 \\ 4x^2 + 3y^2 = 15 \end{cases}$$

Solution: On pose : $X = x^2$ et $Y = y^2$

Le système devient :
$$\begin{cases} 2X - 5Y = 1 \\ 4X + 3Y = 15 \end{cases}$$

On résolve ce système et on trouve: $X = 3$ et $Y = 1$

Donc : $x^2 = 3$ et $y^2 = 1$

Donc : $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ et $y = \sqrt{1}$ ou $y = -\sqrt{1}$

Donc : $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ et $y = 1$ ou $y = -1$

Par suite : $S = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1), (-\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1)\}$

Exercice10 : 1) résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

suisant :
$$\begin{cases} -7x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$$

2) En déduire les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{-7}{x} - \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases}$$

Solution: 1) Le déterminant du système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -35 + 12 = -23 \neq 0$$

$$\text{Donc : } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{14}{23} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2}{23}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \left(-\frac{14}{23}, \frac{2}{23} \right) \right\}$$

2) Pour que le système existe il faut que : $x \neq 0$ et $y \neq 0$

$$\begin{cases} -7\frac{1}{x} - 3\frac{1}{y} = 4 \\ 4\frac{1}{x} + 5\frac{1}{y} = -2 \end{cases} \quad \text{On pose : } X = \frac{1}{x} \text{ et } Y = \frac{1}{y}$$

Le système devient :
$$\begin{cases} -7X - 3Y = 4 \\ 4X + 5Y = -2 \end{cases}$$

D'après 1) on a : $X = -\frac{14}{23}$ et $Y = -\frac{2}{23}$

$$\text{Donc : } \frac{1}{x} = -\frac{14}{23} \text{ et } \frac{1}{y} = -\frac{2}{23} \text{ Donc : } x = -\frac{23}{14} \text{ et } y = \frac{23}{2}$$

$$\text{Par suite : } S = \left\{ \left(-\frac{23}{14}, \frac{23}{2} \right) \right\}$$

Exercice11 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} (x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 5y + 4) = -3 \\ 2(x^2 - 3x + 1) - 3(y^2 - 5y + 4) = 4 \end{cases}$$

Solution: On pose : $X = x^2 - 3x + 1$ et $Y = y^2 - 5y + 4$

Le système devient :
$$\begin{cases} X + Y = -3 \\ 2X - 3Y = 4 \end{cases}$$

On résolve ce système et on trouve :

$$X = -1 \text{ et } Y = -2$$

$$\text{Donc : } x^2 - 3x + 1 = -1 \text{ et } y^2 - 5y + 4 = -2$$

$$\text{Donc : } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ et } y^2 - 5y + 6 = 0$$

On résolve l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (2) = 1 > 0$$

$$\text{Donc : } x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) - 1}{2} = 1$$

On résolve l'équation $y^2 - 5y + 6 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$$

$$\text{Donc : } y_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3 \text{ et } y_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$$

Par suite on a : $S = \{(1, 3), (1, 2), (2, 3), (2, 2)\}$

Exercice 12: Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \times y = 4 \end{cases}$$

Solution : Méthode1:
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \times y = 4 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x = 5 - y \\ (5 - y) \times y = 4 \end{cases}$$

On considère : $(5 - y) \times y = 4$ ssi $-y^2 + 5y = 4$

C'est-à-dire : $y^2 - 5y + 4 = 0$

Calculons le discriminant : $a = 1$, $b = -5$ et $c = 4$

$$\text{Donc } \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions

$$\text{distinctes : } y_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2a} = \frac{5 - 3}{2 \times 1} = 1 \text{ et } y_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2a} = 4$$

Si $y = 1$ et puisque $x = 5 - y$ alors $x = 5 - 1 = 4$

Si $y = 4$ et puisque $x = 5 - y$ alors $x = 5 - 4 = 1$

On en déduit que : $S = \{(4, 1), (1, 4)\}$

Méthode2 : Pour résoudre le système :

$$(I) \begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases} \text{ Où les } s, p \text{ sont des réels donnés}$$

Il suffit de résoudre l'équation : $x^2 - sx + p = 0$

Dans notre exercice : on va résoudre l'équation :

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\text{Donc } \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9.$$

Et on finit de la même façon que la méthode 1.

Exercice 13 : Soit le polynôme :

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$$

1) Montrer que -2 est racine du polynôme $P(x)$

2) Effectuer la division euclidienne de $P(x)$

par $x + 2$ et Montrer que : $P(x) = (x + 2)Q(x)$ et déterminer $Q(x)$

3) Déterminer une factorisation du polynôme $P(x)$ en polynômes de 1er degré

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) < 0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) < 0$

Solution :

$$1) P(-2) = 2 \times (-2)^3 - (-2)^2 - 13 \times (-2) - 6 = -16 - 4 + 26 - 6 = 0$$

Donc : -2 est racine du polynôme $P(x)$

2) Puisque -2 est racine du polynôme $P(x)$ alors

$P(x)$ est divisible par $x - (-2)$

C'est-à-dire $P(x)$ soit divisible par $x + 2$

Effectuons la division euclidienne de :

$P(x)$ par $x + 2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 13x - 6 & x + 2 \\ -2x^3 - 4x^2 & 2x^2 - 5x - 3 \\ \hline -5x^2 - 13x - 6 & \\ 5x^2 + 10x & \\ \hline -3x - 6 & \\ 3x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc : $P(x) = (x + 2)Q(x)$

avec: $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$

3) $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$ On va chercher les racines de $Q(x)$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 3$$

$$\text{Donc: } Q(x) = 2(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Donc: } Q(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

$$\text{C'est-à-dire : } Q(x) = (2x + 1)(x - 3)$$

$$\text{Donc: } P(x) = (x + 2)(2x + 1)(x - 3)$$

$$4) P(x) = 0 \text{ ssi } (x + 2)(2x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\text{Ssi } x + 2 = 0 \text{ ou } 2x + 1 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0$$

$$\text{Ssi } x = -2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 3$$

$$\text{D'où : } S = \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 3\right\}$$

5) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) < 0$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = 3 \text{ sont les racines}$$

D'où le tableau de signe suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$Q(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Donc : } S = \left]-\frac{1}{2}; 3\right[$$

6) $P(x) < 0$

le tableau de signe est le suivant:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$Q(x)$	+	+	0	-	0
$x+2$	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	-

$$\text{Donc : } S =]-\infty; -2[\cup \left]-\frac{1}{2}; 3\right[$$

Exercice 14 : Soit le polynôme suivant (E) :

$$P(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$$

1) Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que

$$P(x) = (x + 1)\left(x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}\right)$$

$$3) \text{ On pose : } Q(x) = x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$$

Soit Δ son discriminant

$$a) \text{ Vérifier que : } \Delta = (\sqrt{2} - 1)^2$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$

4) En déduire les solutions de

$$\text{l'équation } x - (\sqrt{2} + 1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$

Solution : $P(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$

1) Montrons que 1 est racine du polynôme $P(x)$:

$$P(-1) = (-1)^3 - \sqrt{2}(-1)^2 - (-1) + \sqrt{2}$$

$$P(-1) = -1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0$$

Donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrons que $P(x) = (x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2})$

$$(x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}) = x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$$

$$= x^3 - \sqrt{2}x^2 - x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - \sqrt{2}x - x + \sqrt{2}$$

$$= x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$$

$$3) a) \Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2}+1)^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{2}$$

$$\Delta = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \times 1 + (1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$:

$$x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0 \quad \text{On a } \Delta > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1 \quad \text{car } \sqrt{2}-1 > 0$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}+1 - \sqrt{2}-1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{et } x_1 = \frac{\sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } S = \{\sqrt{2}, 1\}$$

4) Recherche des solutions de l'équation :

$$x - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$$

$$x - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0 \quad \text{Peut s'écrire sous la forme :}$$

$$(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$$

$$\text{On pose : } X = \sqrt{x}$$

$$\text{On a donc : } X^2 - (\sqrt{2}+1)X + \sqrt{2} = 0$$

D'après la question précédente les solutions

$$\text{Sont : } X_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad X_2 = 1$$

$$\text{On a donc : } \sqrt{x_1} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{x_2} = 1$$

$$\text{Donc : } (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{2})^2 \quad \text{et} \quad (\sqrt{x_2})^2 = (1)^2$$

C'est à dire : $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$ par suite: $S = \{2, 1\}$

5) Recherche des solutions de l'équation $P(x) = 0$:

$$\text{On a : } P(x) = (x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2})$$

$$P(x) = 0 \quad \text{Signifie que : } x+1=0 \quad \text{ou} \quad x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0$$

$$\text{Signifie que : } x = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = 1$$

$$\text{On a donc : } S = \{-1, 1, \sqrt{2}\}$$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$

$$P(x) \leq 0 \quad \text{Signifie que :}$$

$$(x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}) \leq 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$Q(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{On a donc : } S =]-\infty, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$