Correction : **devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°2 sur les leçons suivantes :**
Ensemble des nombres réels et sous-ensembles et la droite dans plan

Exercice01 : Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

1) |2x-1|= 1   2) $|x-3|=|4x-1|$

3) $|3x-1|<2$ 4) $|x+3|\geq 1$

5) $\begin{cases}-7<x\\ x-2\geq 0\end{cases}$ 6) $\begin{cases}-7\langle x\langle 10\\ -3\leq x\leq 0\end{cases}$ **7)** $|5x+3|=-15$

Solution :1) $|2x-1|=1$ ssi $2x-1=1$ ou $2x-1=-1$

Ssi $2x=2$ ou $2x=0$ ssi $x=1$ ou $x=0$ donc $S=\{0;1\}$

2) $|x-3|=|4x-1|$ ssi $x-3=4x-1$ ou $x-3=-(4x-1)$

Ssi $-3x=2$ ou $x-3=-4x+1$ ssi $x=-\frac{2}{3}$ ou $5x=4$

Ssi $x=-\frac{2}{3}$ ou $x=\frac{4}{5}$ donc : $S=\left\{-\frac{2}{3};\frac{4}{5}\right\}$

3) $|3x-1|<2$ ssi $-2<3x-1<2$

Ssi $-2+1\leq 3x-1+1\leq 2+1$ ssi $-1\leq 3x\leq 3$

ssi $-1\times\frac{1}{3}\leq 3x\times\frac{1}{3}\leq 3\times\frac{1}{3}$ ssi $-\frac{1}{3}\leq x\leq 1$

donc : $S=\left]-\frac{1}{3};1\right[$

4) $|x+3|\geq 1$ ssi $x+3\geq 1$ ou $x+3\leq -1$

Ssi $x\geq -2$ ou $x\leq -4$ ssi $x\in[-2;+\infty[$ ou $x\in]-\infty;-4]$

Donc : $S=]-\infty;-4]\cup[-2;+\infty[$

5) $\begin{cases}-7<x\\ x-2\geq 0\end{cases}$

$-7<x$ ssi $x\in]-7,+\infty[$

$x-2\geq 0$ ssi $x\geq 2$ ssi $x\in[2,+\infty[$

Donc : $S=]-7,+\infty[\cap[2,+\infty[=[2,+\infty[$

6) $\begin{cases}-7\langle x\langle 10\\ -3\leq x\leq 0\end{cases}$

$-7\langle x\langle 10$ ssi $x\in]-7;10[$

$-3\leq x\leq 0$ ssi $x\in[-3;0]$

Donc : $S=]-7,10[\cap[-3;0]=[-3;0]$

7) $|5x+3|=-15$ n'a pas de solutions car la valeur absolue est toujours positive donc : $S=\varnothing$

Exercice02 : On pose : $a=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b=\frac{4+\sqrt{2}}{7}$

1)Montrer que : $b-a=\frac{8-5\sqrt{2}}{14}$

2)Comparer a et b

Solution :1) $b-a=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$b-a=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{8+2\sqrt{2}-7\sqrt{2}}{14}$

$b-a=\dfrac{8-5\sqrt{2}}{14}$

2)on a : $b-a=\dfrac{8-5\sqrt{2}}{14}$

Or on a : $8>5\sqrt{2}$ car $(8)^2=64$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$

Donc : $8-5\sqrt{2}\in\mathbb{R}^{+*}$ donc : $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{14}\in\mathbb{R}^{+*}$

Par suite : $b>a$

Exercice03 : a un nombre réel

Comparer : $4a-1$ **et** $4a^2$

Solution :on a $4a^2-(4a-1)=4a^2-4a+1=(2a-1)^2\geq 0$

Donc : $4a^2\geq 4a-1$ si $a\in\mathbb{R}$

Exercice04 :

Soit x un élément de l'intervalle $]-1,+\infty[$

Comparer : 12 **et** $-5x+1$ on utilisant les propriétés de l'ordre

Solution : on a $x\in]-1;+\infty[$ donc : $x\succ -1$

Donc : $-5x\prec -5\times(-1)$ donc : $-5x\prec 5$

Donc : ① $-5x+1\prec 6$ et on sait que : $6\prec 12$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $-5x+1\prec 12$

Exercice05 : factorisez les expressions suivantes :

$A=16x^2-8x+1 \quad B=8x^3-1 \quad C=x^5+x^3-x^2-1$

$D=x^4-49 \quad E=x^3+8+2\left(x^2-4\right)-(x+2)$

Solution : $A=16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times 4x\times 1+1^2=(4x-1)^2$

Pour $B=8x^3-1$ on Remarque que :

$B=8x^3-1=(2x)^3-1^3$ identité remarquable du type:

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$B=(2x-1)\left((2x)^2+2x\times 1+1^2\right)=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$C=x^3\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^3-1^3\right)$

$C=\left(x^2+1\right)(x-1)\left(x^2-x\times 1+1^2\right)=\left(x^2+1\right)(x-1)\left(x^2-x+1\right)$

$D=x^4-49=x^4-\left(\sqrt{7}\right)^4=\left(x^2\right)^2-\left(\sqrt{7}^2\right)^2$

$D=\left(x^2-\sqrt{7}^2\right)\left(x^2+\sqrt{7}^2\right)=\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)\left(x^2+7\right)$

$E=x^3+8+2\left(x^2-4\right)-(x+2)$

$E=x^3+2^3+2\left(x^2-2^2\right)-(x+2)$

$E=(x+2)\left(x^2-2x+2^2\right)+2(x-2)(x+2)-(x+2)\times 1$

$E=(x+2)\left(\left(x^2-2x+2^2\right)+2(x-2)-1\right)$

$E=(x+2)\left(x^2-2x+4+2x-4-1\right)$

$E=(x+2)\left(x^2-1\right)$

Exercice06 : On pose $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1)donner le signe de : B

2) Calculer B^2

3) Donner une écriture simplifiée de B

Solution : $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1)On Remarque que : $6-2\sqrt{5}<6+2\sqrt{5}$

Donc : $\sqrt{6-2\sqrt{5}} < \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Donc : $\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}} \in \mathbb{R}^{*-}$ cad $B<0$

2) $B^2 = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Donc : $B^2 = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 - 2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Donc : $B^2 = 6-2\sqrt{5} - 2\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)} + 6+2\sqrt{5}$

$B^2 = 12 - 2\sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 12 - 2\sqrt{6^2-20} = 12 - 2\sqrt{16}$

Donc : $B^2 = 12 - 2\times 4 = 4$

3) $B^2 = 4$ ssi $B = \sqrt{4}$ ou $B = -\sqrt{4}$

Donc : $B = 2$ ou $B = -2$ or $B<0$ donc : $B = -2$

<u>Exercice07 :</u> Effectuer et Calculer et simplifier **<u>:</u>**

$A = \left(3+\sqrt{11}\right)^2 - \left(3-\sqrt{11}\right)^2 \quad B = \left(4\sqrt{3}-7\right)^{2015} \times \left(4\sqrt{3}+7\right)^{2015}$

$C = \dfrac{3\times 10^{-5} \times 7,2\times 10^{7}}{2\times 15^3} \quad D = \dfrac{(-2)^3 \times \left(4^2\right)^{-1} \times 8}{1024\times(-16)^{-4}}$

$F = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007)$

<u>Solution :</u>

$A = \left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{11} + \left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{11} + \left(\sqrt{11}\right)^2\right)$

$A = 3 + 2\sqrt{33} + 11 - \left(3 - 2\sqrt{33} + 11\right) = 3 + 2\sqrt{33} + 11 - 3 + 2\sqrt{33} - 11 = 4\sqrt{33}$

$B = \left(\left(4\sqrt{3}-7\right)\left(4\sqrt{3}+7\right)\right)^{2015} = \left(\left(4\sqrt{3}\right)^2 - (7)^2\right)^{2015} = (48-49)^{2015} = (-1)^{2015} = -1$

$C = \dfrac{3\times 10^{-5}\times 7,2\times 10^{7}}{2\times 15^3} = \dfrac{3\times 10^{-5}\times 3^2\times 2^3 \times 10^{-1}\times 10^{7}}{2\times (3\times 5)^3}$

$C = \dfrac{3\times 3^2 \times 2^3 \times 10}{2\times 3^3\times 5^3} = \dfrac{3\times 3^2\times 2^3\times 2\times 5}{2\times 3^3 \times 5^3} = \dfrac{2^3}{5^2} = \dfrac{8}{25}$

$D = \dfrac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times 8}{1024\times(-16)^{-4}} = \dfrac{-2^3\times 4^{2\times(-1)}\times 2^3}{1024\times\left(-2^3\right)^{-4}} = \dfrac{-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times 2^3}{2^{10}\times\left(-2^3\right)^{-4}}$

$D = -2^3 \times \left(2^2\right)^{-2} \times 2^3 \times 2^{-10} \times (-2)^{3\times 4} = -2^{3-4+3-10+12} = -2^4 = -16$

$F = (200520052006)^2 - (200520052005\times 200520052007)$

On pose : $x = 200520052006$ donc :

$200520052007 = x+1$ et $200520052005 = x-1$

Donc : $F = x^2 - (x-1)(x+1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$

<u>Exercice08 :</u>1)montrer que : $\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}} = \sqrt{6+\sqrt{5}}$

2)montrer que : $\sqrt{9-\sqrt{79}} + \sqrt{9+\sqrt{79}} = \sqrt{18+\sqrt{8}}$

<u>Solution :</u>1)on pose : $B = \sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}$

On va Calculer : B^2;

$B^2 = \left(\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}} + \left(\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}\right)^2$

$B^2 = \dfrac{6+\sqrt{31}}{2} + 2\sqrt{\left(\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}\right)\left(\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}\right)} + \dfrac{6-\sqrt{31}}{2}$

$B^2 = 6 + 2\sqrt{\dfrac{36-1}{4}} = 6 + 2\sqrt{\dfrac{5}{4}} = 6 + \sqrt{5}$

Donc : $B^2=6+\sqrt{5}$ donc : $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$ ou $B=-\sqrt{6+\sqrt{5}}$

Or $B>0$ donc : $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

D'où: $\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$??

On pose : $B=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}$ calculons B^2?

$B^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}\right)^2+2\sqrt{9-\sqrt{79}}\sqrt{9+\sqrt{79}}+\left(\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2$

$B^2=9-\sqrt{79}+2\sqrt{\left(9-\sqrt{79}\right)\left(9+\sqrt{79}\right)}+9+\sqrt{79}$

$B^2=18+2\sqrt{81-79}=18+\sqrt{8}$

Donc: $B^2=18+\sqrt{8}$ donc : $B=\sqrt{18+\sqrt{8}}$ ou $B=-\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Or $B>0$ donc : $B=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Par suite: $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Exercice09 : a et b deux nombres réels tel que :

$a\geq -2$ et $b\leq -1$ et $a-b=6$

1)simplifier : $A=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+1)^2}$

2)montrer que : $a\leq 5$ et $b\geq -8$

3) Calculer la valeur de : $B=|a+b-4|+|a+b+10|$

Solution :1) $a\geq -2$ ssi $a+2\geq 0$ et $b\leq -1$ ssi $b+1\leq 0$

On a : $A=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+1)^2}=|a+2|+|b+1|$

$A=a+2-(b+1)=a-b+1=6+1=7$

2)montrons que : $a\leq 5$

On sait que: $b\leq -1$ et $a-b=6$

Donc: $a-6=b$ et $b\leq -1$

Donc : $a-6\leq -1$ donc $a\leq 5$

Montrons que : $b\geq -8$

On sait que: $a\geq -2$ et $a-b=6$ donc: $b+6\geq -2$

donc: $b\geq -2-6$ donc: $b\geq -8$

3)on a: $-2\leq a\leq 5$ et $-8\leq b\leq -1$ donc : $-10\leq a+b\leq 4$

Donc : $-14\leq a+b-4\leq 0$ et $0\leq a+b+10\leq 14$

Donc : $|a+b-4|=-(a+b-4)=-a-b+4$

Et on a donc : $|a+b+10|=a+b+10$

Donc : $B=|a+b-4|+|a+b+10|=-a-b+4+a+b+10$

Donc : $B=14$

Exercice10:soit $a\geq 1$ on pose : $A=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

1)montrer que : $a(A+1)(A-1)=1$

2)a)montrer que : $2\leq A+1\leq 3$

b)en déduire que : $1+\frac{1}{3a}\leq A\leq 1+\frac{1}{2a}$

3)montrer que : $1,1$ est une valeur approchée de

$\sqrt{1,2}$ a $\frac{1}{30}$ prés

Solution :1) $a\geq 1$ et $A=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

montrons que : $a(A+1)(A-1)=1$?

on a : $(A+1)(A-1)=A^2-1=\left(\sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)^2-1$

$(A+1)(A-1)=1+\frac{1}{a}-1=\frac{1}{a}$ donc : $(A+1)(A-1)=\frac{1}{a}$

Donc : $a(A+1)(A-1)=1$

2) montrons que : $2\leq A+1\leq 3$?

on a : $a\geq 1>0$ donc : $\frac{1}{a}\geq 0$ donc : $\frac{1}{a}+1\geq 1$

donc : $A\geq 1$ donc : $A+1\geq 2\ (1)$

on a : $a\geq 1$donc : $\frac{1}{a}\leq 1$ donc : $1+\frac{1}{a}\leq 2$

donc : $A\leq\sqrt{2}$ donc : $A+1\leq\sqrt{2}+1\leq 3\ (2)$

de (1) et (2) en déduit que : $2\leq A+1\leq 3$

et on a : $a(A+1)(A-1)=1$ donc : $A-1=\frac{1}{a(A+1)}$

d'autre part on a : $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{A+1}\leq\frac{1}{2}$ donc : $\frac{1}{3a}\leq\frac{1}{a(A+1)}\leq\frac{1}{2a}$

donc : $\frac{1}{3a}\leq A-1\leq\frac{1}{2a}$ donc : $\frac{1}{3a}+1\leq A\leq\frac{1}{2a}+1$

3)on a $1,2=1+0,2=1+\frac{1}{5}$ donc $A=\sqrt{1,2}=\sqrt{1+\frac{1}{5}}$

Donc : $a=5$

$\frac{1}{15}+1\leq\sqrt{1,2}\leq\frac{1}{10}+1$ssi $\frac{16}{15}\leq\sqrt{1,2}\leq\frac{11}{10}$

Ssi $\frac{32}{30}\leq\sqrt{1,2}\leq\frac{33}{30}$ et on a $\frac{33}{30}-\frac{32}{30}=\frac{1}{30}$ $\left(\frac{33}{30}=1,1\right)$

$1,1$ est une valeur approchée de $\sqrt{1,2}$ a $\frac{1}{30}$ prés

Exercice11: Soient x et y deux réels tels que :

$x<y<3$

1)Montrer que : $x+y-6\prec 0$

2) Comparer $a=x^2-6x+1$ et $b=y^2-6y+1$

Solution :1) on a $x<y<3$ donc $x<3$ et $y<3$

Donc **:** $x+y<6$ donc : $x+y-6<0$

2) $a-b=(x^2-6x+1)-(y^2-6y+1)$

$a-b=x^2-6x+1-y^2+6y-1=x^2-y^2-6x+6y$

$a-b=(x-y)(x+y)-6(x-y)=(x-y)(x+y-6)$

On a : $x<y$ donc $x-y\in\mathbb{R}^-$

Et on a : $x+y-6\in\mathbb{R}^-$

Donc : $(x-y)(x+y-6)\in\mathbb{R}^+$

Donc : $a-b\in\mathbb{R}^+$ et par suite $a\geq b$

Exercice12: soit $x\in\mathbb{R}^{*+}$

1)Comparer : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

2)En déduire une comparaison de : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

Réponse :1) On a $x+2\geq x$ car $(x+2)-x\geq 0$

Donc $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$

On ajoutant $\sqrt{x+1}$ au deux membres on trouve : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (le conjugué)

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

Donc : $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$

Et on aussi : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

Et puisque : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

On a donc : $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

D'où $\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \leq \sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

<u>Exercice13 :</u> Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D_1):6x+3y+2=0$ et $(D_2):3x-2y-1=0$

1)Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes et déterminer le point d'intersection H (x ; y)

2) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

3) Etudier la position relative des droites (AB) et (D_1)

4)Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ)

Qui passe par le point $C(5,3)$ et parallèle a (D_2)

Solution :1) $6\times(-2)-3\times3=-12-9=-21\neq 0$ Donc : (D_1) et (D_2) se coupent et Le point d'intersection vérifie le système : $\begin{cases}6x+3y+2=0\\3x-2y-1=0\end{cases}$

On va résoudre le système $\begin{cases}6x+3y=-2\\3x-2y=1\end{cases}$ (1)

On utilise la méthode des déterminants par exemple pour résoudre ce système : $\Delta=\begin{vmatrix}6 & 3\\3 & -2\end{vmatrix}=-21\neq 0$

Donc : $x=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{1}{21}$ **et** $y=\frac{\begin{vmatrix}6 & -2\\3 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12}{-21}=-\frac{4}{7}$

Donc : le point d'intersection est $H\left(-\frac{1}{21};-\frac{4}{7}\right)$

2)la droite (AB) a une équation de la forme :
(AB) : $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur est : $\overrightarrow{AB}(2,-4)$ $\overrightarrow{AB}(-b,a)$

Donc : $a=-4$ et $-b=2$ donc $b=-2$
L'équation devient : $-4x-2y+c=0$

On a : $A\in(AB)$ donc : $-4-4+c=0$ cad $c=8$

Donc : (AB) $-4x-2y+8=0$

Donc : $-2(2x+y-4)=0$

Donc (AB): $2x+y-4=0$

3) $(D_1):6x+3y+2=0$ et (AB): $2x+y-4=0$

On a : $(6)\times(1)-3\times 2=6-6=0$

Donc : (D_1)et (AB)sont parallèles

4) (Δ)est parallèles(D_2) donc le vecteur directeur de (D_2)Est un vecteur directeur de (Δ)

Donc : $\vec{u}(2,3)$est un vecteur (Δ) qui passe par$C(5,3)$

Donc : : $(\Delta)\begin{cases} x=5+2t \\ y=3+3t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Exercice14 :

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$et Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D):3x-5y+6=0$ et $(D'):x-y=0$

1)Donner une représentation paramétrique des droites (D)Et (D')

2) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) Qui passe par le point $B(1;0)$et parallèle a (EC) avec $E(3;3)$ et $C(4;0)$

3)déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (Δ)et (D)et les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D')

4)Montrer que J est le milieu de $[IB]$

Solution :1)a)un vecteur directeur de $(D):3x-5y+6=0$

Est $\vec{u}(-b;a)$donc : $\vec{u}(5,3)$

Déterminons un point de (D) ?

Si $x=0$ alors : $(D):3\times 0-5y+6=0$ donc $y=\frac{6}{5}$

Donc : une représentation paramétrique des Droites (D)est $(D)\begin{cases} x=0+5t \\ y=\frac{6}{5}+3t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$

b)un vecteur directeur de $(D'):x-y=0$

Est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}'(1,1)$

Déterminons un point de (D') ?

Si $x=0$ alors : $(D'):0-y=0$ donc $y=0$

Donc : une représentation paramétrique des
Droites (D') est $(D')\begin{cases} x=0+1k \\ y=0+1k \end{cases}(k\in\mathbb{R})$

2) (Δ) passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC)

Donc : $\overrightarrow{EC}$ un vecteur directeur de (Δ) : $\overrightarrow{EC}(1;-3)$

Et on sait que : $\vec{u}(-b;a)$:Donc : $a=-1$ et $b=-3$
Donc : $-3x-y+c=0$
Et on sait que (Δ) passe par $B(1;0)$ on trouve $c=3$

Donc : (Δ) $-3x-y+3=0$

3)a) déterminons les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) ?

On va résoudre le système $\begin{cases} 3x-5y=-6 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$ (1)

On fait la somme des deux équations membre a membre on trouve : $-6y=-9 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve :
$-3x-\frac{3}{2}+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Donc le point d'intersection I de (Δ) et (D) est $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

b) Déterminons les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D') ?

On va résoudre le système $\begin{cases} x-y=0 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$ (1)

$x-y=0 \Leftrightarrow x=y$
Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve :
$-3x-x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

Donc le point d'intersection J de (Δ) et (D') est $J\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

4)montrons que J est le milieu de $[IB]$
Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$?
On a : $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{JB}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$

Donc : J est le milieu de $[IB]$

Exercice15 : soient A ; B ; C trois points du plan et
E et F deux points tel que :
$\overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

1)Montrer que les points C ; E ; F sont alignés

2)déterminer les coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repère $\left(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

3) montrer par une autre méthode que les points C ; E ; F sont alignés

Solution :1) on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)\ (1)$

D'autre part on a : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{4}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)\ (2)$

De (1) et (2) en déduit que : $\overrightarrow{CE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CF}$

Donc : les points C ; E ; F sont alignés

2)on considérant le repère : $\left(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ on a $C(0;0)$

On a $\overrightarrow{CA}=1\overrightarrow{CA}+0\overrightarrow{CB}$ donc $A(1;0)$

On a $\overrightarrow{CB}=01\overrightarrow{CA}+1\overrightarrow{CB}$ donc $B(0;1)$

On a : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

$\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ par suite : $F\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

$\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ par suite : $E\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

3) montrons par une autre méthode que les points C ; E ; F sont alignés ?

Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires

$$\det\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CF}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{4}\end{vmatrix}=-\frac{2}{12}+\frac{2}{12}=0$$

Donc : $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires par suite les points C ; E ; F sont alignés

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien