Tronc commun Sciences BIOF

La correction Série N°13 : Arithmétique dans IN et applications

Exercice01 : Un carreleur doit poser le carrelage dans une pièce rectangulaire mesurant 6, 48 m de large sur 13, 50 m de long.
Il souhaite poser des carreaux de carrelage carré et ne faire aucune découpe.
1)Peut-il poser des carreaux de 27 cm de côté ? Justifier votre réponse.
2) Peut-il poser des carreaux de 50 cm de côté ? Justifier votre réponse.
3)Tâche complexe :
On lui demande désormais de poser des carreaux carré les plus grands possibles.
Le paquet de 20 carreaux carré de cette taille coûte 65dh.
Combien va coûter le carrelage pour cette pièce.

Corrigé :1) Passons en centimètres. La pièce mesure 648 cm sur 1 350 cm
648 = 27 × 24 et 1 350 = 27 × 50
On peut donc poser des carreaux de 27 cm
3. 50 n'est pas un diviseur de 648
On ne peut donc pas poser des carreaux de 50 cm sans découpe.
3)Tâche complexe
On veut les carreaux les plus grands possibles, on va donc chercher le PGCD (1350 ; 648) par l'algorithme d'Euclide.
1 350 = 648 × 2 + 54
648 = 54 × 12 + 0
Donc : PGCD (1350 ; 648) = 54
De plus 1 350 = 54 × 25 et 648 = 54 × 12
Il va donc pouvoir poser des carreaux de 54 cm avec 25 colonnes de 12 lignes. **PROF: ATMANI NAJIB**
Il faudra donc 25 × 12 = 300 carreaux.
Or les paquets contiennent 20 carreaux et 300 ÷ 20 = 15. Il faut 15 paquets à 65ele paquets soit
65 × 15 =975 dh. Le carrelage va lui coûter 975dh

Exercice02 :Á la fin d'une fête de village, tous les enfants présents se partagent équitablement les 397 ballons qui ont servi à la décoration. Il reste alors 37 ballons.
L'année suivante, les mêmes enfants se partagent les 598 ballons utilisés. Il en reste alors 13.
Combien d'enfants, au maximum, étaient présents ?

Corrigé : Á la fin d'une fête de village, tous les enfants présents se partagent équitablement les 397 ballons qui ont servi à la décoration. Il reste alors 37 ballons. De ce fait le nombre n d'enfants est un diviseur de 397−37 = 360.
• L'année suivante, les mêmes enfants se partagent les 598 ballons utilisés. De ce fait le nombre n d'enfants est un diviseur de 598−13 = 585.
• Le nombre n d'enfants est donc un diviseur commun de 360 et 585, or on cherche le plus grand, soit le PGCD de 360 et 585.(360 = 45×8 et 585 = 45×13)
Le PGCD de 360 et 585 est donc 45 ce qui nous donne le nombre d'enfants.

Exercice03 : Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur.
Il a reçu la consigne suivante :
« Découpe dans ces plaques des carrés tous identiques, dont les longueurs des côtés sont un nombre entier de cm, et de façon à ne pas avoir de perte. »
1) Peut-il choisir de découper des plaques de 10 cm de côté ? Justifier votre réponse.
2) Peut-il choisir de découper des plaques de 11 cm de côté ? Justifier votre réponse.
3) On lui impose désormais de découper des carrés les plus grands possibles.
3) a)Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?
3) b) Combien y aura-t-il de carrés par plaques ?

Corrigé : 1) Peut-il choisir de découper des plaques de 10 cm de côté ? Justifier votre réponse.

Le nombre 10 n'est pas un diviseur commun de 110 et de 88 puisqu'il ne divise pas 88, donc ce n'est pas possible.
2) Peut-il choisir de découper des plaques de 11 cm de côté ? Justifier votre réponse.
Le nombre 11 divise 110 = 11 × 10 et divise 88 = 11×8. Donc ce cas est possible.
3) On lui impose désormais de découper des carrés les plus grands possibles.
3)a) Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?
La longueur L d'un côté doit être un diviseur commun de 110 et de 88, or on cherche le plus grand donc L est le PGCD de 110 et de 88.

$110 = 2^1 \times 5^1 \times 11^1$ et $88 = 2^3 \times 11^1$

Donc : $PGCD(110;88) = 2^1 \times 11^1 = 22$

Le dernier reste non nul est 22 donc PGCD (110 ; 88) = 22. La longueur du côté d'un carré sera de 22 cm.
1) b) Combien y aura-t-il de carrés par plaques ?
Il y aura donc 110/22 = 5 plaques en longueur et 88/22 = 4 en largeur soit au total : 5 × 4 = 20 plaques.

Exercice04 : Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 œufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat.
Il souhaite vendre des assortiments d'œufs et de poissons de façon que :
• tous les paquets aient la même composition ;
• après mise en paquet, il ne reste ni œufs, ni poissons.
1) Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier.
2) Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ? Dans ce cas, quelle sera la composition de chaque paquet ?

Corrigé : Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 œufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat.
1) Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier.
Le nombre de paquets doit être un diviseur commun de 2 622 et 2 530, or on a : **PROF: ATMANI NAJIB**

$\frac{2622}{19} = 138 \in \mathbb{N}$

$\frac{2530}{19} \approx 133,2 \notin \mathbb{N}$

L'entier 19 n'est donc pas un diviseur commun de 2 622 et 2 530.
Ce qui veut dire que l'on ne pas répartir les 2 530 poissons dans 19 paquets, il en reste 3 car :
2 530 = 19 × 133 + 3
2) Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ?
Quelle sera la composition de chaque paquet ?
• Le nombre de paquets qu'il peut réaliser est un diviseur commun à 2 622 et à 2 530. Puisque l'on cherche le plus grand, c'est donc leur PGCD.
• Calculons ce PGCD : $2622 = 2^1 \times 3^1 \times 19^1 \times 23^1$ **et** $2530 = 2^1 \times 5^1 \times 11^1 \times 23^1$

$PGCD(2622;2530) = 2^1 \times 23^1 = 46$

• On a par ailleurs

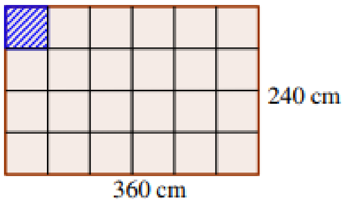
$\frac{2622}{46} = 57$ **et** $\frac{2530}{46} = 55$

Dans chacun des 46 paquets il y aura 57 œufs et 55 poissons

Exercice05: Deux amis discutent :
• AUREL : Belle pêche ! Combien de poissons et de coquillages vas-tu pouvoir vendre au marché ?
• ANTOINE : En tout, je vais pouvoir vendre au marché 30 poissons et 500 coquillages.
Antoine est un pêcheur professionnel. Il veut vendre des paniers contenant des coquillages et des poissons. Il souhaite concevoir le plus grand nombre possible de paniers identiques. Enfin, il voudrait qu'il ne lui reste aucun coquillage et aucun poisson dans son congélateur.
1) Peut-il concevoir 15 paniers ?
2) Combien de paniers au maximum Antoine pourra-t-il concevoir ? Justifier.
3)Quelle sera la composition de chaque panier ? Justifier.

Corrigé : 1) Peut-il concevoir 15 paniers ?
Le nombre de panier doit être un diviseur commun de 30 et 500. Or 15 divise bien 30 mais il ne divise pas 500. En effet :500 = 15×33+5 et 30 = 15×2

Il ne peut donc pas concevoir 15 paniers car il lui resterait 5 coquillages.
2) Combien de paniers au maximum Antoine pourra-t-il concevoir ? Justifier.
Le nombre de panier doit être un diviseur commun de 30 et 500 or on cherche le plus grand, soit le PGCD de 300 et 30
Le PGCD de 30 et 500 est donc 10, il pourra faire 10 paniers.
3) Quelle sera la composition de chaque panier ? Justifier.
Chaque panier comportera 5 poissons et 30 coquillages.
Exercice06 :1) a. Effectuer la décomposition en facteurs premiers des entiers 2 622 et 2 530.
b) En déduire le plus grand diviseur commun de 2 622 et 2 530.
c) Rendre irréductible la fraction $\frac{2622}{2530}$
2)Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 œufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat.
Il souhaite vendre des assortiments d'œufs et de poissons de façon que :
• tous les paquets aient la même composition ;
• après mise en paquet, il ne reste ni œufs, ni poissons.
a. Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier.
b. Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ? Dans ce cas, quelle sera la composition de chaque paquet ?
Exercice07 : Un panneau mural de forme rectangulaire a pour dimensions 240 cm et 360 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille, posés bord à bord sans jointure.
1) On a réalisé le recouvrement suivant. Donnez les dimensions des carreaux carrés ainsi que le nombre de carreaux utilisés.



PROF: ATMANI NAJIB
2) Peut-on utiliser des carreaux de : 10 cm de côté ? 14 cm de côté ? 15 cm de côté ?
3) On choisit des carreaux de 15 cm de côté. On pose une rangée de carreaux bleus sur le pourtour et des carreaux blancs ailleurs.
Combien de carreaux bleus va-t-on utiliser ?
Exercice08 :1) Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).
2) Calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441.
3) Rendre alors irréductible la fraction $\frac{756}{441}$
Corrigé : 1) Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).
$756 = 2\times378= 2\times2\times189= 2\times2\times3\times63= 2\times2\times3\times9\times7$
$756 = 2^2 \times3^3 \times7$
$441 = 3\times147= 3\times3\times49$
$441 = 3^2 \times7^2$
2) Calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441.
On va effectuer le produit des facteurs premiers communs à 441 et 756 :
$756 = 2^2 \times 3\times3 \times3\times 7$
$441 = 3\times3\times7 \times7$
$\Rightarrow 756 = 63 \times28$ et $441 = 63 \times7$
$\Rightarrow$ PGCD (441 ; 756) = 63
3) Rendre alors irréductible la fraction $\frac{756}{441}$
On divise numérateur et numérateur de la fraction pour la rendre irréductible : $\frac{756}{441} = \frac{756\div63}{441\div63} = \frac{28}{7}$

Exercice09 : Ali et Samir ont acheté pour leur mariage 3 003 dragées au chocolat et 3 731 dragées aux amandes.
1)Samir propose de répartir ces dragées de façon identique dans 20 corbeilles. Chaque corbeille doit avoir la même composition. Combien lui reste-t-il de dragées non utilisées ?
2) Ali et Samir changent d'avis et décident de proposer des petits ballotins dont la composition est identique. Ils souhaitent qu'il ne leur reste pas de dragées.
2) a) Ali propose d'en faire 90. Ceci convient-il ? Justifier.
2) b) Ils se s'accordent pour faire un maximum de ballotins. Combien en feront-ils et quelle sera leur composition ?
Corrigé : Ali et Samir ont acheté pour leur mariage 3 003 dragées au chocolat et 3 731 dragées aux amandes.
1) Samir propose de répartir ces dragées de façon identique dans 20 corbeilles. Chaque corbeille doit avoir la même composition. Combien lui reste-t-il de dragées non utilisées ?
Par division euclidienne de 3 003 et de 3 731 par 20 on obtient :
3 003 = 20×150+3 et 3 731 = 20×186+11
Chacune des 20 corbeilles sera donc composée de 150 dragées au chocolat et 186 aux amandes.
Il lui restera alors 3 dragées au chocolat et 11 aux amandes.
2)Ali et Samir décident de proposer des ballotins dont la composition est identique sans avoir de reste de dragées.
2) a) Ali propose d'en faire 90. Ceci convient-il ? Justifier.
On ne peut pas faire 90 ballotins sans avoir de reste avec des compositions identiques. En effet, il faudrait pour cela que 90 soit un diviseur commun de 3 003 et de 3 731 ce qui n'est pas le cas :
3 003 = 90×33+33 et 3 731 = 90×41+41
2) b) Ils se s'accordent pour faire un maximum de ballotins. Combien en feront-ils et quelle sera leur composition ?
Le nombre de ballotin cherché, N, est un diviseur commun de 3 003 et de 3 731. Or on cherche le nombre maximum de ballotins et de ce fait N est le PGCD de 3 003 et de 3 731.
Décomposons les entiers en facteurs premiers et effectuons le produit des facteurs communs :
(3731 = 7 × 13 ×41 et 3003 = 3× 7 ×11× 13
⇒3731 = 91 ×41 et 3003 = 91 ×33
Le PGCD de 3 003 et de 3 731 est 91 et le nombre maximal de ballotins est de 91.
Puisque :3 003 = 91×33 et 3 731 = 91×41
La composition de chacun des 91 ballotins sera de 33 dragées au chocolat et 41 aux amandes.
Exercice10 : On considère les nombres : $a=14700$ et $b=16500$ **PROF: ATMANI NAJIB**
1) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b
2) En déduire $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$.
3) Déterminer le nombre de diviseurs des nombres de a
4) Simplifier : $\frac{a}{b}$ et $\sqrt{a\times b}$
5) Montrer que $3\times a$ est un carré parfait.
Corrigé : 1) La décomposons des nombres a et b
$a=2^2\times3^1\times5^2\times7^2$ et $b=2^2\times3^1\times5^3\times11^1$
2) Calculons le : $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$.
On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b
Donc : $PGCD(a;b)=2^2\times3^1\times5^2=300$
On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b
$PPCM(a;b)=2^2\times3^1\times5^3\times7^2\times11=808500$
3) Déterminons le nombre de diviseurs des nombres a

On a : $a=2^2\times3^1\times5^2\times7^2$ donc : le nombre de diviseurs des nombres a est :
$(2+1)\times(1+1)\times(2+1)\times(2+1)=3\times2\times3\times3=54$

4) Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\frac{a}{b}$

Méthode1 : $\frac{a}{b}=\frac{2^2\times3^1\times5^2\times7^2}{2^2\times3^1\times5^3\times11^1}=\frac{7^2}{5\times11}=\frac{49}{55}$

Méthode : $\frac{a}{b}=\frac{14700}{16500}=\frac{14700\div300}{16500\div300}=\frac{49}{55}$

Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\sqrt{a\times b}$

$\sqrt{a\times b}=\sqrt{2^2\times3^1\times5^2\times7^2\times2^2\times3^1\times5^3\times11^1}=\sqrt{2^4\times3^2\times5^4\times7^2\times5^1\times11^1}=2^2\times3\times5^2\times7\sqrt{5^1\times11^1}=2100\sqrt{55}$

5)Montrons que le nombre $3\times a$ est un carré parfait.

$3\times a=3\times2^2\times3^1\times5^2\times7^2=2^2\times3^2\times5^2\times7^2=\left(2^1\times3^1\times5^1\times7^1\right)^2=(210)^2$

Donc : le nombre $3\times a$ est un carré parfait.

Exercice11 : On désigne par $\overline{xy}$ un entier naturel tel que x est le chiffre des unités et y est le chiffre des dizaines.

Montrer que : l'entier naturel $\overline{xy}+\overline{yx}$ est divisible par 11

Corrigé : $\overline{xy}+\overline{yx}=x\times10+y+y\times10+x=11x+11y=11(x+y)=11k$ Avec **:** $k=x+y\in\mathbb{N}$

Donc : l'entier naturel $\overline{xy}+\overline{yx}$ est divisible par 11

Exercice12 : Soit $n\in\mathbb{N}$; Montrer que les nombres $n+1$ et $n+2$ sont premiers entre eux.

Corrigé : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrons que les nombres $n+1$ et $n+2$ sont premiers entre eux.

Soit $PGCD(n+1;n+2)=d$ donc ils existent k et k' deux entiers naturels tels que :

$n+1=kd$ **et** $n+2=k'd$ donc : $(n+1)+1=k'd$ d'où : $kd+1=k'd$

Donc : $(k'-k)d=1$ et $k'>k$ car $n+2>n+1$

Comme le nombre 1 est le seul diviseur de 1 dans $\mathbb{N}$ alors : $d=1$ et $k'-k=1$

Donc : $PGCD(n+1;n+2)=1$ d'où : $n+1$ et $n+2$ sont premiers entre eux.

Exercice13 : 1) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $n^2+4n+9=(n+3)(n+1)+6$

2) Déterminer toutes les valeurs $\boldsymbol{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ tel que : Le nombre $n+3$ divise le nombre $\left(n^2+4n+9\right)$

Corrigé :1) $(n+3)(n+1)+6=n^2+n+3n+3+6=n^2+4n+9$

2)si $n+3$ divise le nombre $\left(n^2+4n+9\right)$ alors il existe $(k\in\mathbb{N})$ tel que: $n^2+4n+9=k(n+3)$

Donc : $k(n+3)=(n+3)(n+1)+6$ **PROF: ATMANI NAJIB**

Donc : $k(n+3)-(n+3)(n+1)=6$

Donc : $(n+3)(k-n-1)=6$

Donc : $n+3$ divise 6

Donc : $n+3=1$ ou $n+3=2$ ou $n+3=3$ ou $n+3=6$

Donc : $n=-2\notin\mathbb{N}$ ou $n=-1\notin\mathbb{N}$ ou $n=0\in\mathbb{N}$ ou $n=3\in\mathbb{N}$

On vérifie bien que si : $n=0\in\mathbb{N}$ ou $n=3\in\mathbb{N}$ alors $n+3$ divise le nombre $\left(n^2+4n+9\right)$ en effet :

3 Divise le nombre 9 et 6 divise le nombre 30

Donc : les valeurs $\boldsymbol{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ tel que : Le nombre $n+3$ divise le nombre $\left(n^2+4n+9\right)$ sont : $n=0$ ou $n=3$