Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°11 : Arithmétique dans IN

Exercice*1* : 1) Déterminer le chiffre x pour que le nombre $53x2$ Soit divisible par 9.
2) Déterminer le chiffre y pour que le nombre $534y$ soit divisible à la fois par 2 et 9

Corrigé : 1) Le nombre $53x2$ est divisible par 9 si la somme de ces chiffres est divisible par 9
C'est-à-dire : $5+3+x+2=10+x$ *est divisible par* 9
Et $x \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ alors : $x=8$
2)Le nombre $532y$ est divisible par 9 et par 2 à la fois si la somme de ces chiffres est divisible
Par 9 et y est un nombre pair
C'est-à-dire : $5+3+4+y=12+y$ *est divisible par* 9 et $y\in\{0;2;4;6;8\}$ alors : $y=6$

Exercice*2* :
Soit a un entier naturel. On dit que a est un nombre parfait, si a est égal à la somme de ses diviseurs sauf a.
Exemple : les diviseurs de 6 sont : 1 ;2 ;3 ;6 et on a :1+2+3=6. Donc 6 est un nombre parfait.
1) Déterminer le seul nombre parfait compris entre 25 et 30.
2) a) Montrer que 496 et 8128 sont des nombres parfaits.
b) Vérifier que les nombres 496 et 8128 s'écrivent sous la forme $2^{p-1}(2^p-1)$ avec p un nombre premier

Corrigé : 1) le seul nombre parfait compris entre 25 et 30est 28=1+2+4+7+14
2) a) Montrons que 496 et 8128 sont des nombres parfaits.
496=1+2+4+8+16+31+62+124+248
8128=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064
b)

496	2
248	2
124	2
62	2
31	31
1	

8128	2
4064	2
2032	2
1016	2
508	2
254	2
127	

$$496=2^4\times31=2^{5-1}\times\left(2^4-1\right)$$

$$8128=2^6\times127=2^{7-1}\times\left(2^7-1\right)$$

Exercice3 : On pose que : $a=2160$ *et* $b=4860$
1) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a *et* b .
2) En déduire $PGCD(a;b)$ *et* $PPCM(a;b)$.
3) Simplifier $\sqrt{a}$ *et* $\sqrt{b}$.
4) Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres suivants $a^3\times b^2$ et $a^2\times b^3$
5) Montrer que $\sqrt{a\times b}$ est un entier naturel.
6) Écrire le nombre $\frac{a}{b}$ sous forme de fraction irréductibles.

Corrigé : 1) Décomposition de $a=2160$ *et* $b=4860$

2160	2
1080	2
540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
01	

$\boxed{2160=2^4\times3^3\times5}$

4860	2
2430	2
1215	3
405	3
135	3
45	3
15	3
5	5
01	

$\boxed{4860=2^2\times3^5\times5}$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b) = 2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PPCM(a;b) = 2^4 \times 3^6 \times 5 = 58320$

3) Simplification de : $\sqrt{a}$ ***et*** $\sqrt{b}$.

$\sqrt{a} = \sqrt{2^4 \times 3^3 \times 5} = 4 \times 3 \times \sqrt{15} = 12\sqrt{15}$

$\sqrt{b} = \sqrt{2^2 \times 3^6} = 2 \times 3^3 = 54$

4) Déterminons la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres suivants $a^3 \times b^2$ et $a^2 \times b^3$

$a^3 \times b^2 = \left(2^4 \times 3^3 \times 5\right)^3 \times \left(2^2 \times 3^5 \times 5\right)^2 = 2^{16} \times 3^{19} \times 5^5$

$a^2 \times b^3 = \left(2^4 \times 3^3 \times 5\right)^2 \times \left(2^2 \times 3^5 \times 5\right)^3 = 2^{14} \times 3^{21} \times 5^5$

5) Montrons que $\sqrt{a \times b}$ est un entier naturel.

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{2^4 \times 3^3 \times 5 \times 2^2 \times 3^5 \times 5} = \sqrt{2^6 \times 3^8 \times 5^2} = 2^3 \times 3^4 \times 5 = 3240$

6) Écriture du nombre $\frac{a}{b}$ sous forme de fraction irréductibles.

Methode1 : $\frac{a}{b} = \frac{2^4 \times 3^3 \times 5}{2^2 \times 3^5 \times 5} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

Methode2 : $\frac{a}{b} = \frac{2160}{4860} = \frac{2160 \div 108}{4860 \div 108} = \frac{4}{9}$

Exercice 4 : Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$

1) $8n+4$ 2) $14n+9$ 3) $A = n^2 + 5n + 3$ 4) $n^2 + 4n + 8$ 5) $C = n^3 - n + 20$

6) $D = (2n+1)^2 + 2n + 1$ 7) $E = 3n^2 + n$ 8) $F = n^2 + 11n + 30$ 9) $G = n^2 + 3n + 1$

10) $n^2 + 3n + 2$

Corrigé :1) $8n+4 = 2(4n+2) = 2 \times k$ avec $k = 4n+2 \in \mathbb{N}$ **PROF: ATMANI NAJIB**

Donc $8n+4$ est un nombre pair

2) $14n+9 = 2(7n+4)+1 = 2 \times k + 1$ avec $k = 7n+4 \in \mathbb{N}$

Donc $14n+9$ est un nombre impair

3) $A = n^2 + 5n + 3$

Méthode 1 : Etude des cas :

Comme n est un entier naturel alors n soit un nombre pair ou bien un nombre impair.

1 cas : Si n est un nombre pair alors il existe un entier naturel k tel que : n=2k

$A = n^2 + 5n + 3 = (2k)^2 + 5(2k) + 3 = 4k^2 + 5(2k) + 2 + 1 = 2\left(2k^2 + 5k + 1\right) + 1 = 2k' + 1$

avec $k' = 2k^2 + 5k + 1 \in \mathbb{N}$

Donc A est un nombre impair.

2 cas :Si n est un nombre impair alors il existe un entier naturel k tel que : n=2k+1

$A = n^2 + 5n + 3 = (2k+1)^2 + 5(2k+1) + 3 = 4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 + 3$

$A = 4k^2 + 14k + 9 = 2\left(2k^2 + 7k + 4\right) + 1 = 2k' + 1$ Avec : $k' = 2k^2 + 7k + 4 \in \mathbb{N}$

Donc A est un nombre impair.

Conclusion : Dans tous les cas on a : A est un nombre impair

Méthode 2 :

$A = n^2 + 5n + 3 = (n+2)(n+3) - 3$

Or $(n+2)(n+3)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc c'est un nombre pair et 3 impair

Alors : A est impair

Remarque : Pair + Pair = Pair **et** Pair + Impair = impair **et** Impair + Impair = Pair
Pair × Pair = Pair **et** Impair × Impair= Impair

4) $B = n^2 + 4n + 8$

Etude des cas :

Comme n est un entier naturel alors n soit un nombre pair ou bien un nombre impair.

1 cas : Si n est un nombre pair alors il existe un entier naturel k tel que : n=2k

$B = n^2 + 4n + 8 = (2k)^2 + 4(2k) + 4 = 4k^2 + 4(2k) + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2) = 2k'$

avec $k' = 2k^2 + 4k + 2 \in \mathbb{N}$

Donc B est un nombre pair.

2 cas : Si n est un nombre impair alors il existe un entier naturel k tel que : n=2k+1

$b = n^2 + 4n + 8 = (2k+1)^2 + 4(2k+1) + 8 = 4k^2 + 4k + 1 + 8k + 4 + 8$

$A = 4k^2 + 12k + 13 = 2(2k^2 + 6k + 6) + 1 = 2k' + 1$ Avec : $k' = 2k^2 + 6k + 6 \in \mathbb{N}$

Donc B est un nombre impair.

Conclusion : Si n est un nombre pair alors B est un nombre pair
Si n est un nombre impair alors B est un nombre impair.

5) $C = n^3 - n + 20 = n(n^2 - 1) + 20 = n(n^2 - 1^2) + 20 = n(n-1)(n+1) + 20$

Donc C : est un nombre paire car : $\boldsymbol{n(n+1)}$ ***est pair*** (produit de deux nombres successifs)
Donc :$\boldsymbol{(n-1)n(n+1)}$ ***est pair*** et de plus on a : 20 et paire .

6) $D = (2n+1)^2 + 2n + 1 = (2n+1)(2n+1+1) = (2n+1)(2n+2) = 2(2n+1)(n+1) = 2k$

Avec : $k = (2n+1)(n+1) \in \mathbb{N}$

Donc : D est un nombre pair

7) $E = 3n^2 + n$

$E = 2n^2 + n^2 + n = 2n^2 + n(n+1)$

PROF: ATMANI NAJIB

Or $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc c'est un nombre pair donc :

$E = 2n^2 + n^2 + n = 2n^2 + n(n+1) = 2n^2 + 2k = 2(n^2 + k) = 2k'$ Avec $k' = n^2 + k \in \mathbb{N}$

Donc : E est un nombre pair

8) $F = n^2 + 11n + 30 = (n+5)(n+6) = (n+5)((n+5)+1)$

Or $(n+5)((n+5)+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc c'est un nombre pair

Alors : F est pair

9) $G = n^2 + 3n + 1 = n^2 + n + 2n + 1 = n(n+1) + 2n + 1$

Or $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc c'est un nombre pair

$G = n^2 + 3n + 1 = 2k + 2n + 1 = 2(k+n) + 1 = 2k' + 1$

Donc : G est un nombre impair

10) $n^2 + 3n + 2 = (n^2 + 3n + 1) + 1$

Or $n^2 + 3n + 1$ est impair donc $n^2 + 3n + 2$ est pair

Exercice5: 1) Déterminer les nombres premiers parmi les nombres suivants :
210 ; 111 ; 333 ;543 ;741 ;2005 ;97 ;117 ;51.
2) On dit que deux entiers sont premiers entre eux si leurs $PGCD$ est 1
Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que les nombres $2n+1$ et $2n$ sont premiers entre eux.

Corrigé :
1) Les nombres premiers dans la liste sont :97 et 51
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que les nombres $\mathbf{2n+1}$ et $\mathbf{2n}$ sont premiers entre eux
Soit $PGCD(2n+1;2n)=d$ donc ils existent k et k' deux entiers naturels tels que :
$2n=kd$ **et** $2n+1=k'd$ d'où : $kd+1=k'd$
Donc : $(k'-k)d=1$ et $k'>k$ car $2n+1>2n$
Comme le nombre 1 est le seul diviseur de 1 dans ℕ alors : $d=1$ et $k'-k=1$
Donc : $PGCD(2n+1;2n)=1$ d'où : $2n+1$ et $2n$ sont premiers entre eux.

Exercice6 : Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a=7^{n+2}-7^n$; $b=3\times 7^{n+1}+5\times 7^n$
1) Montrer que : a est un multiple de 3 et que b un multiple de 13
2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b
3) En déduire $PGCD(a;b)$ **et** $PPCM(a;b)$.

Corrigé : 1) $a=7^{n+2}-7^n=7^n\times 7^2-7^n\times 1=7^n\times\left(7^2-1\right)$
$a=48\times 7^n=3\times 16\times 7^n=3\times k$ Avec $k=16\times 7^n \in \mathbb{N}$
Donc a est un multiple de 3
On a : $b=3\times 7^{n+1}+5\times 7^n=3\times 7^n\times 7^1+5\times 7^n=7^n\left(3\times 7+5\right)=26\times 7^n=13\times 2\times 7^n=13\times k$
Avec : $k=2\times 7^n \in \mathbb{N}$
Donc b un multiple de 13

PROF: ATMANI NAJIB

2) Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b
On a trouvé que : $a=3\times 16\times 7^n=2^4\times 3\times 7^n$
Et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a
On a trouvé : $b=2\times 7^n\times 13$
Donc : $b=2\times 7^n\times 13$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de b
3) Déduction du : $PGCD(a;b)$ **et** $PPCM(a;b)$.
On a : $a=2^4\times 3\times 7^n$ et $b=2\times 7^n\times 13$
On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b
Donc : $PGCD(a;b)=2\times 3\times 7^n=6\times 7^n$
On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b
Donc : $PPCM(a;b)=2^4\times 3\times 7^n\times 13=624\times 7^n$

Exercice 7: $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$;
1) Montrer que si a est un nombre pair et b un multiple de 3 alors $3a+2b$ est un multiple du 6
2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 4.
b) Existe-t-il un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n(n+1)(n+2)(n+3)=2022$

Corrigé :1) Montrons que si $\boldsymbol{a}$ est un nombre pair et $\boldsymbol{b}$ un multiple de 3 alors $\mathbf{3}\boldsymbol{a}+\mathbf{2}\boldsymbol{b}$ est un multiple du 6
$\boldsymbol{a}$ est un nombre paire donc il existe $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}$ tel que :$\boldsymbol{a}=\mathbf{2}\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{b}$ un multiple de 3 donc il existe $\boldsymbol{k}'\in\mathbb{N}$ tel que : $\boldsymbol{b}=\mathbf{3}\boldsymbol{k}'$
Alors $\mathbf{3}\boldsymbol{a}+\mathbf{2}\boldsymbol{b}=\mathbf{3}\times\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{2}\times\mathbf{3}\boldsymbol{k}'=\mathbf{6}\boldsymbol{k}+\mathbf{6}\boldsymbol{k}'=\mathbf{6}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')=\mathbf{6}\boldsymbol{k}''$ Avec : $\boldsymbol{k}''=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'$

Donc : $3a+2b$ est un multiple du 6

2) a) Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 4

On a : $n(n+1)$ est un nombre pair car produit de deux entiers successifs de même pour $(n+2)(n+3)$

Donc : $(k,k')\in\mathbb{N}^2$; $n(n+1)=2k$ et $(n+2)(n+3)=2k'$

Alors : $n(n+1)(n+2)(n+3)=4kk'$

Donc : le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 4

b) Existe-t-il un entier naturel n tel que $n(n+1)(n+2)(n+3)=2022$?

Supposons qu'il existe un entier n tel que : $n(n+1)(n+2)(n+3)=2022$

Alors 2022 est un multiple de 4 ce qui est faux donc il n'existe pas un entier naturel n tel que :

$n(n+1)(n+2)(n+3)=2022$

Exercice8 : 1) a) Développer et réduire $(n+1)^2-n^2$ où n un entier naturel.

b) En déduire que tout entier naturel impair est la différence des carrés deux entiers naturels Successives.

2) Appliquer le résultat précédent aux nombres 39 et 31.

Corrigé : 1)a) $(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$

b- D'après la question précédente on a : pour tout $n\in\mathbb{N}$ $(n+1)^2-n^2=2n+1$

Et comme les entiers naturels impairs s'écrivent sous la forme : $2n+1$ avec $n\in\mathbb{N}$

Alors : tout entier naturel impair est la différence des carrés deux entiers naturels successives.

2) Appliquons le résultat précédent aux nombres 39 et 31 .

On a : $39=2\times19+1$ alors : $39=(19+1)^2-19^2=20^2-19^2$

On a : $31=2\times15+1$ alors : $31=(15+1)^2-15^2=16^2-15^2$

Exercice9 : On pose $a=2n+4$ et $b=6n+11$; tel que $n\in\mathbb{N}$.

1) Étudier la parité des nombres a et b.

2) En déduire une simplification pour le nombre : $C=(2n+4)(-1)^a+(6n+11)(-1)^b$

3) Montrer que le nombre $a^2+(b+1)^2$ est un multiple de 40.

Corrigé : 1) Étudions la parité des nombres a et b

On a : $a=2n+4=2(n+2)$ alors a est nombre pair.

$b=6n+11=2(n+5)+1=2k+1$

Donc b est un nombre impair.

2) Simplification pour le nombre : $C=(2n+4)(-1)^a+(6n+11)(-1)^b$

On a : a est nombre pair donc : $(-1)^a=1$

Et b est un nombre impair donc : $(-1)^b=-1$

Donc : $C=(2n+4)(-1)^a+(6n+11)(-1)^b=2n+4-(6n+11)=-4n-5$.

3) Montrons que le nombre $a^2+(b+1)^2$ est un multiple de 40

$a^2+(b+1)^2=(2n+4)^2+(6n+11+1)^2=(2n+4)^2+(6n+12)^2$

$=4(n+2)^2+36\times(n+2)^2=40(n+2)^2$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $a^2+(b+1)^2$ est un multiple de 40

Exercice10 : Soit n est un nombre entier naturel impair

1)a) Montrer que n^2-1 est divisible par 8

b) En déduire que :16 divise n^4-1

2) n est entier naturel tel que $n\geq4$ et $n-4$ est un multiple de 5.

Montrer que le nombre n^2-1 est un multiple de 5.

Corrigé : 1) n est un entier naturel impair.

a) Montrons que n^2-1 est divisible par 8

n est un entier naturel impaire donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que : $n=2k+1$

Donc : $n^2-1=(n-1)(n+1)=2k(2k+2)=4k(k+1)$

Comme $k(k+1)$ est un nombre pair alors il existe $k'\in\mathbb{N}$ tel que : $k(k+1)=2k'$

Alors : $n^2-1=4\times2k'=8k'$

D'où n^2-1 est un multiple de 8

b) En déduire que 16 divise n^4-1

On a : $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)$

$n^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1) = 2k''$
Et on a $n^2 - 1 = 8k'$ car c'est un multiple de 8
Donc : $n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = 8k' \times 2k'' = 16k'k''$
D'où : 16 divise $n^4 - 1$
2) n est entier naturel tel que $n \geq 4$ et $n - 4$ est un multiple de 5.
Montrons que le nombre $n^2 - 1$ est un multiple de 5
$n^2 - 1 = n^2 - 16 + 15 = (n - 4)(n + 4) + 15$
On a : $n - 4 = 5k$; $k \in \mathbb{N}$ donc : $(n - 4)(n + 4) + 15 = 5k(n + 4) + 15 = 5(k(n + 4) + 3)$
Alors : le nombre $n^2 - 1$ est un multiple de 5.

Exercice11 : Soit $n \geq 2$ un entier naturel :
1) Montrer que : $n^4 + 64 = (n^2 + 8)^2 - (4n)^2$
2) Déduire que le nombre $n^4 + 64$ n'est pas un nombre premier pour tout $n \geq 2$ entier naturel

Corrigé : 1) On a: $n^4 + 64 = n^4 + 16n^2 + 64 - 16n^2 = (n^2 + 8)^2 - 16n^2 = (n^2 + 8)^2 - (4n)^2$
2) On a : $n^4 + 64 = (n^2 + 8)^2 - (4n)^2 = (n^2 + 8 - 4n)(n^2 + 8 + 4n) = (n^2 - 2\times 2n + 2^2 + 4)(n^2 + 4n + 8)$
Donc : $n^4 + 64 = \left((n-2)^2 + 4\right)(n^2 + 4n + 8)$ **PROF: ATMANI NAJIB**
Donc : le nombre $n^4 + 64$ n'est pas un nombre premier pour tout $n \geq 2$ entier naturel car il admet au moins
Deux diviseurs qui sont : $(n-2)^2 + 4 > 1$ et $n^2 + 4n + 8 > 1$ pour tout $n \geq 2$ entier naturel

Exercice12 : Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur.
Il a reçu la consigne suivante :
« Découpe dans ces plaques des carrés tous identiques, dont les longueurs des côtés sont un nombre entier de cm, et de façon à ne pas avoir de perte. »
1) Peut-il choisir de découper des plaques de 10 cm de côté ? Justifier votre réponse.
2) Peut-il choisir de découper des plaques de 11 cm de côté ? Justifier votre réponse.
3)On lui impose désormais de découper des carrés les plus grands possibles.
3) a) Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?
3) b) Combien y aura-t-il de carrés par plaques ?

Corrigé : 1) Peut-il choisir de découper des plaques de 10 cm de côté ? Justifier votre réponse.
Le nombre 10 n'est pas un diviseur commun de 110 et de 88 puisqu'il ne divise pas 88, donc ce n'est pas possible.
2)Peut-il choisir de découper des plaques de 11 cm de côté ? Justifier votre réponse.
Le nombre 11 divise 110 = 11 × 10 et divise 88 = 11×8. Donc ce cas est possible.
3) On lui impose désormais de découper des carrés les plus grands possibles.
3)a) Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?
La longueur L d'un côté doit être un diviseur commun de 110 et de 88, or on cherche le plus grand donc L est le PGCD de 110 et de 88.
$110 = 2^1 \times 5^1 \times 11^1$ et $88 = 2^3 \times 11^1$
Donc : $PGCD(110;88) = 2^1 \times 11^1 = 22$
Le dernier reste non nul est 22 donc PGCD (110 ; 88) = 22. La longueur du côté d'un carré sera de 22 cm.
3) b) Combien y aura-t-il de carrés par plaques ?
Il y aura donc 110/22 = 5 plaques en longueur et 88/22 = 4 en largeur soit au total : 5 × 4 = 20 plaques.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien