Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°9 : Arithmétique dans IN

Exercice1 : Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 375 et 2070
Corrigé : Les diviseurs de 375 sont 1, 3, 5, 15, 25, 75,125 et 375
Les diviseurs de 2070 sont :1,2,3,5,6,9,15,18,23,30,45,46,69,90,115,138,230,414,690,345,1035,2070
L'ensemble des diviseurs communs à 375 et 2070 sont donc 1,3,5,15,138,414,690,2070

Exercice2 : Déterminer le nombre de diviseurs de 195
Corrigé : Methode1 : On utilise les critères de divisibilités :
On a : $\sqrt{195} = 13,96...$
On prend seulement sa partie entière : 13
Nous déterminons les nombres inferieurs ou égales à 13 qui sont des diviseurs de 195
Qui sont : **1 ; 3 ; 5; 13** après on divise 195 par 1 on trouve **195** et on divise 195 par 3 on trouve **65** et on divise 195 par 5 on trouve **39** et on divise 195 par 13 on trouve **15**
Nous obtenons ainsi les diviseurs suivants de 195 : 1 ; 3 ; 5; 13 ; 15 ; 35 ; 65 ; 195 il y'a donc 8 diviseurs de 195
Methode2 : *nous utilisons la Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres : 175*
En effet on a : $195 = 3^1 \times 5^1 \times 13^1$
On applique la règle suivante :
« Le nombre de diviseurs est égal à : (1ere exposant +1) ×(2ere exposant +1) ×…»
Donc : le nombre de diviseurs de 195 est : $(1+1)\times(1+1)\times(1+1) = 2\times 2\times 2 = 8$

Exercice3 : Déterminer le chiffre x pour que le nombre : $7532x$ Soit divisible par 3 et pair
Corrigé : On a $0 \le x \le 9$
Le nombre : $7532x$ est pair donc : $x \in \{0;2;4;6;8\}$ **PROF: ATMANI NAJIB**
Le nombre : $7532x$ est divisible par 3 équivaut à : $7+5+3+2+x = 3k$
C'est-à-dire : $17+x$ un multiple de 3
En donnant à x les valeurs $0;2;4;6;8$ on trouve que : $x = 4$ et $x = 6$ (qui vérifient)
Par suite les nombres sont : $75324 ; 75326$

Exercice4:
1) Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).
2) Calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441.
3)Rendre alors irréductible la fraction $\frac{756}{441}$

Corrigé :
1)Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).
756 = 2×378= 2×2×189= 2×2×3×63= 2×2×3×9×7
$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$
441 = 3×147= 3×3×49
$441 = 3^2 \times 7^2$
2)Calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441.
On va effectuer le produit des facteurs premiers communs à 441 et 756 :
$756 = 2^2 \times 3\times 3 \times 3\times 7$
441 = 3×3×7 ×7
⇒ 756 = 63 ×28 et 441 = 63 ×7
⇒ PGCD(441 ; 756) = 63
3) Rendre alors irréductible la fraction $\frac{756}{441}$
On divise numérateur et numérateur de la fraction pour la rendre irréductible :
$$\frac{756}{441} = \frac{756 \div 63}{441 \div 63} = \frac{28}{7}$$

Exercice5 : À la fin d'une fête de village, tous les enfants présents se partagent équitablement les 397 ballons de qui ont servi à la décoration. Il reste alors 37 ballons.
L'année suivante, les mêmes enfants se partagent les 598 ballons utilisés cette année-là.
Il en reste alors 13.
Combien d'enfants, au maximum, étaient présents ?

Corrigé : Notons N le nombre d'enfants cherché.

• S'il reste 37 ballons la première année, les N enfants se sont partagés équitablement 360 ballons Car 397 − 37 = 360.

• S'il reste 13 ballons la première année, les N enfants se sont partagés équitablement 585 ballons Car 598 − 13 = 585.

• Le nombre N de d'enfants est donc un diviseur commun de 360 et 585, or on cherche le nombre maximum d'enfants présents. N est donc le PGCD de 360 et 585.

Calculons ce PGCD, plus grand diviseur commun à 360 et 585.

Décomposons les deux nombres 360 et 585en produit de facteurs premiers on trouve :

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$ et $585 = 3^2 \times 5^1 \times 13^1$

On va effectuer le produit des facteurs premiers communs à 441 et 756

Donc PGCD (585 ; 360) = $3^2 \times 5^1$ = 45.

Le nombre maximum d'enfants présents était de 45.

Exercice6: $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$

Montrer que si a est pair et b impair alors la somme est un nombre impair.

Corrigé : On a a est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $a = 2k$

b Impair alors il existe $k' \in \mathbb{N}$: $b = 2k'+1$ **PROF: ATMANI NAJIB**

Donc : $a+b = 2k+2k'+1 = 2(k+k')+1 = 2k''+1$ avec : $k'' = k+k' \in \mathbb{N}$

Par suite : $a+b$ est un nombre impair

Exercice7 : Montrer que le produit de Deux nombres consécutifs est un nombre pair

Corrigé : Soit $n \in \mathbb{N}$ (un entier naturel quelconque)

$n \times (n+1)$ Est le produit de deux nombres consécutifs

Exemple : 2×3 ou 3×4 ou $100\times101 \dots$

On va monter que : $n\times(n+1)$ est un nombre pair

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :
En effet :

1ére cas : si n est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k$ par suite :

$n\times(n+1) = 2k\times(2k+1) = 2\left[k\times(2k+1)\right] = 2k'$ avec $k' = k\times(2k+1) \in \mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

2ére cas : si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k+1$

Par suite : $n\times(n+1) = (2k+1)\times(2k+1+1)$

Donc : $n\times(n+1) = (2k+1)\times(2k+2) = 2(2k+1)\times(k+1)$

Donc : $n\times(n+1) = 2k'$ avec $k' = (2k+1)\times(k+1) \in \mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

Exercice8 : Soit $n \in \mathbb{N}$ (un entier naturel quelconque)

1) Vérifier que : $n^2+3n+3 = (n+1)(n+2)+1$

2) En déduire la parité du nombre : n^2+3n+3

Corrigé : 1) $(n+1)(n+2)+1 = n^2+2n+n+2+1 = n^2+3n+3$

2) On a : $n^2+3n+3 = (n+1)(n+2)+1$

Et $(n+1)(n+2)$ est le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs

Donc : $(n+1)(n+2)$ est un nombre pair c'est-à-dire : $(n+1)(n+2)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2+3n+3=2k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$

Par suite : n^2+3n+3 est un nombre impair

Exercice 9 : Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

1) $18n+6$ 2) $100n+99$ 3) $2024n+2022m+2020$

4) n^2+7n 5) $n^2+2024n$ 6) n^3-n

Corrigé : 1) 375^2+648^2

1) $18n+6=2(9n+3)=2\times k$ avec $k=9n+3\in\mathbb{N}$

Donc $18n+6$ est un nombre pair

2) $100n+99=2(50n+49)+1=2\times k+1$ avec $k=50n+49\in\mathbb{N}$

Donc $100n+99$ est un nombre impair

3) $2024n+2022m+2020=2(1012n+1011m+1010)=2k$

Avec : $k=1012n+1011m+1010\in\mathbb{N}$

Donc $2024n+2022m+2020$ est un nombre pair

4) $n^2+7n=n^2+n+6n=n(n+1)+6n$

Or $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc c'est un nombre pair donc :

$n^2+7n=2k+6n=2(k+3n)=2k'$ Avec $k'=k+3n\in\mathbb{N}$

Donc n^2+7n est un nombre pair

5) Etude de la parité $n^2+2024n$

1ére cas : 1cas : si n pair

$n^2=n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $2024n=2\times1012n=2\times k$ est pair

On a : $n^2+2024n$ c'est la somme de deux Nombres pairs **PROF: ATMANI NAJIB**

Donc : $n^2+2024n$ est pair

2ére cas : 1cas : si n impair

$n^2=n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $2024n=2\times1012n=2\times k$ est pair

On a : $n^2+2024n$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair

Donc : $n^2+2024n$ est impair

14) n^3-n $n\in\mathbb{N}$

$n^3-n=n(n^2-1)=n(n^2-1^2)=n(n-1)(n+1)$

$n^3-n=(n-1)\times n\times(n+1)$

Est le produit de trois nombres consécutifs donc est un nombre pair

6) $5n^2+n$ $n\in\mathbb{N}$; $5n^2+n=4n^2+n^2+n=4n^2+n(n+1)=2\times2n^2+2k=2\times(2n^2+k)=2\times k'$

Avec : $k'=6n+8$ et $k''=k+k'$

Car $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Donc $5n^2+n$ est un nombre pair

Exercice10 : Montrer que la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Corrigé : Un nombre impair s'écrit sous la forme : $2k+1$ avec : $k\in\mathbb{N}$

On a donc : $(2k+1)+[(2k+1)+2]=4k+4=4(k+1)=4k'$ Avec : $k'=k+1\in\mathbb{N}$

Par suite la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Exercice11 : Soit n est un nombre entier naturel tel que : $n\geq4$ et on pose : $B=n^4-16$

1) Montrer que : $n+2$ et $n-2$ et n^2+4 sont des diviseurs de B

3) Trouver quatre autres diviseurs de B

Corrigé : 1) $B=n^4-16=\left(n^2\right)^2-\left(2^2\right)^2=\left(n^2-2^2\right)\left(n^2+2^2\right)=(n-2)(n+2)\left(n^2+4\right)$

Donc : $n+2$ *et* $n-2$ *et* n^2+4 *sont des diviseurs de* B

2) On a : $B=(n-2)(n+2)\left(n^2+4\right)$

Donc : 1 et B et $(n+2)\left(n^2+4\right)$ et $(n-2)\left(n^2+4\right)$ *sont aussi des diviseurs de* B

Exercice12 : Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse .
0 ; 13 ; 32787 ; 199 ; 31004001 ; 259

Corrigé : 1) 0 n'est pas premier car tous les nombres divise 0
2) 13 est premier car admet exactement deux diviseurs
3) 32787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 27 qui est multiple de 3 donc 3 divise 32787
4) Est ce que 199 est premier ? On utilise la règle:
On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2\le 199$
Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 199.
Donc 199 est premier
31004001 n'est pas premier car la somme des chiffres est 9 un multiple de 3 donc 3 divise 31004001
259 n'est pas premier car $259=7\times 37\in\mathbb{N}$ c'est à dire 7 divise 259

Exercice13 : Soit a un entier naturel :

1) Montrez que $a(a+2)+1$ s'écrit sous la forme x^2 où x est un nombre entier
(Dans ce cas on l'appelle "carré parfait»).

2) Soit n un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$: **PROF: ATMANI NAJIB**

Montrez que le nombre : $\left(n^3+3n^2+n\right)\left(n^3+3n^2+n+2\right)+1$ est un carré parfait.

3)a) Développez : $\left(n^2+3n+1\right)^2$

b) Déduire que le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré Parfait.

Corrigé : 1) $a(a+2)+1=a^2+2a+1=(a+1)^2$

Par suite : $a(a+2)+1$ est un carré parfait

2) on a : $\left(n^3+3n^2+n\right)\left(n^3+3n^2+n+2\right)+1=\left(n^3+3n^2+n\right)\left(\left(n^3+3n^2+n\right)+2\right)+1=a(a+2)+1$

Avec : $a=n^3+3n^2+n$

Donc d'après 1) on a : $\left(n^3+3n^2+n\right)\left(n^3+3n^2+n+2\right)+1=\left(n^3+3n^2+n+1\right)^2$

Donc : le nombre : $\left(n^3+3n^2+n\right)\left(n^3+3n^2+n+2\right)+1$ est un carré parfait.

3)a) développement de : $\left(n^2+3n+1\right)^2$

$\left(n^2+3n+1\right)^2=\left(\left(n^2+3n\right)+1\right)^2=\left(n^2+3n\right)^2+2\left(n^2+3n\right)+1^2$

$\left(n^2+3n+1\right)^2=n^4+6n^3+9n^2+2n^2+6n+1=n^4+6n^3+11n^2+6n+1$

3)b) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=\left(n^2+n\right)\left(n^2+2n+3n+6\right)+1$

$=\left(n^2+n\right)\left(n^2+5n+6\right)+1=n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n+1$

Donc : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n^4+6n^3+11n^2+6n+1$

Par suite : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$

Donc : le nombre : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré parfait.

Exercice14 : Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :
$xy=3x+2y$

Corrigé : $xy=3x+2y$ Équivaut à $xy-3x=2y$

Équivaut à : $x(y-3)=2y-6+6$

Équivaut à : $x(y-3)=2(y-3)+6$

Équivaut à : $x(y-3)-2(y-3)=6$

Équivaut à : $(y-3)(x-2)=2\times3=6\times1$

Donc : $(x-2)$ et $(y-3)$ sont deux diviseurs de 6

Par suite : $\begin{cases}x-2=2\\y-3=3\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=6\\y-3=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=3\\y-3=2\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=1\\y-3=6\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=8\\y=4\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=3\\y=8\end{cases}$

Par conséquent les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (2) sont :

$(2;6)$ et $(8;4)$ et $(5;5)$ et $(3;8)$

Exercice15 : 1. Calculer $PGCD(39;135)$ **PROF: ATMANI NAJIB**

2. Hassan a un champ rectangulaire qu'il veut clôturer. Les dimensions du champ sont, en mètres, 39 sur 135. Il veut planter des poteaux à distance régulière supérieure à 2 m et mesurée par un nombre entier en mètres. De plus, il place un poteau à chaque coin.

a. Quelle est la distance entre deux poteaux ?

b. Combien de poteaux doit-il planter ?

Corrigé : 1) $39=3^1\times13^1$ et $135=3^3\times5^1$ donc : $PGCD(39;135)=3^1=3$

2) a) La distance entre deux poteaux sera le $PGCD(39;135)$ et $PGCD(39;135)=3$

b) 39 :3= 13 et 135 : 3=45 donc le nombre total des poteaux nécessaires est $13\times2+45\times2=26+90=116$
C'EST LE NOMBRE DE POTEAUX QU'IL FAUT.

Exercice16 : D'un aéroport un avion part tous les 9 jours vers un autre pays et du même aéroport un autre avion part tous les 15 jours vers un autre pays
Si les deux avions partent les mêmes jours pour la 1ere fois après combien de jours ils partiront dans les mêmes jours pour la deuxième fois ?

Corrigé : Les départs du premier avion à partir du premier jour sont des multiples de 9 : qui sont 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; …
Les départs du deuxième avion à partir du premier jour sont des multiples de 15 :
Qui sont ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ;…
Le PPCM (9 ; 15) est le nombre de jours après lesquels les
Deux avions partent dans les mêmes jours pour la deuxième fois et puisque : PPCM (9 ; 15) =45
Donc le nombre de jours est 45
Autre méthode de calcul du PPCM (9 ; 15)
On décompose chacun des nombres 9 et 15.
On trouve : $9 = 3^2$ et $15 = 3 \times 5$
On applique la règle pour calculer le PPCM
Donc : PPCM (9 ; 15) = $3^2 \times 5 = 9 \times 5 = 45$

Exercice17 : Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=3^{2n+3}-3^{2n+1}$; $b=3\times3^{n+1}+4\times3^n$

1) Montrer que : a est un multiple de 8 et que b un multiple de 13

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b

3) En déduire $a\wedge b$ et $a\vee b$

Corrigé : 1) $a=3^{2n+3}-3^{2n+1}=3^{2n}\times3^3-3^{2n}\times3^1=3^{2n}\times(3^3-3)$

$a=3^{2n}\times(27-3)=3^{2n}\times24=8\times3\times3^{2n}=8\times k$ Avec $k=3\times3^{2n}\in\mathbb{N}$

Donc a est un multiple de 8

On a : $b=3\times3^{n+1}+4\times3^n=3\times3^n\times3^1+4\times3^n=3^n(3^2+4)=13\times3^n=13\times k$ Avec : $k=3^n\in\mathbb{N}$

Donc b un multiple de 13

2) Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b

On a trouvé que : $a=8\times3^{2n+1}=2^3\times3^{2n+1}$

Et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b=13\times3^n$

Donc : $b=13\times3^n$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de b

3) Déduction de : $a\wedge b$ et $a\vee b$

On a : $a=2^3\times3^{2n+1}$ et $b=13\times3^n$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $a\wedge b=3^n$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $a\vee b=2^3\times3^{2n+1}\times13=104\times3^{2n+1}$

Exercice18 : On dispose d'une feuille de papier. On découpe dans cette feuille le plus grand carré possible. Dans le morceau restant, on découpe encore le plus grand carré possible, et ainsi de suite... On continue à découper le plus grand carré possible jusqu'à ce que le morceau restant soit lui-même un carré.

Quelle est la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont 192 cm sur 84 cm ?

Même question si les dimensions initiales sont deux entiers quelconques

Corrigé : La taille du dernier carré sera PGCD (84 ; 192)=12

De manière générale, si on note x et y les dimensions de la feuille initiale.

La taille du dernier carré sera PGCD(x ; y).

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien