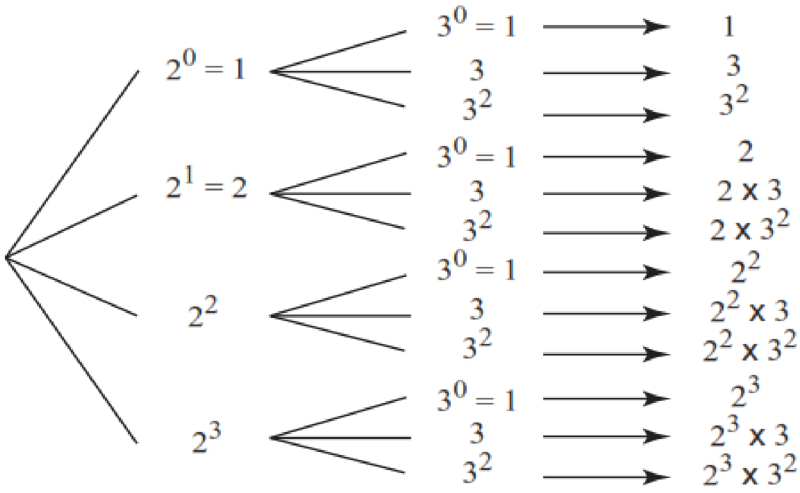
Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°7 : Arithmétique dans IN

Exercice1 : (*) Déterminer les diviseurs de 72

Corrigé : La décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel permet d'obtenir tous ses diviseurs de manière Systématique : $72 = 2^3.3^2$

On peut s'aider d'un arbre pour lister ces diviseurs :



Donc : les diviseurs sont : 1 ; 3 ; 9 ; 2 ; 6 ; 18 ; 4 ; 12 ; 36 ; 8 ; 24 ; 72

Exercice2 : (*) Déterminer le nombre de diviseurs de 175

Corrigé : Methode1 : On utilise les critères de divisibilités :

On a : $\sqrt{175} = 13,228...$

On prend seulement sa partie entière : 13

Nous déterminons les nombres inferieurs ou égales à 13 qui sont des diviseurs de 175

Qui sont : **1 ; 5 ; 7** après on divise 175 par 1 on trouve 175 et on divise 175 par 5 on trouve 35 et on divise 175 par 7 on trouve **25**

Nous obtenons ainsi les diviseurs suivants de 175 : 1 ; 5 ; 7 ; 25 ; 35 ; 175 il y'a donc 6 diviseurs de 175

Methode2 : *nous utilisons la Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres : 175*

En effet on a : $175 = 5 \times 5 \times 7 = 5^2 \times 7^1$

On applique la règle suivante :

« Le nombre de diviseurs est égal à : (1ere exposant +1) ×(2ere exposant +1) ×…»

Donc : le nombre de diviseurs de 175 est :(2 +1) ×(1 +1) = 3 × 2=6

Exercice3 : Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse.

0 ; 11 ; 33 ; 43 ; 87 ; 135 ; 97 ; 32787 ; 601

Corrigé :1) 0 n'est pas premier car tous les nombres divise 0 **PROF: ATMANI NAJIB**

11 est premier car admet exactement deux diviseurs

33 n'est pas premier car 3 divise 33

43 est premier car admet exactement deux diviseurs

87 n'est pas premier car 3 divise 87 ($87 = 29 \times 3$)

135 n'est pas premier car 5 divise 135

Question : Est-ce que 97 est premier ?

On utilise la règle suivante : « Pour montrer qu'un nombre est premier il suffit de vérifier qu'il n'est pas divisible par aucun nombre premier p inferieur à sa racine carré »

Donc on cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 97$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 et aucun ne divise 97

Donc 97 est premier

32787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 27 qui est multiple de 3 donc 3 divise 32787

3) Est ce que 601 est premier ? On utilise la règle :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 601$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 et aucun ne divise 601.

Donc 601 est premier.

Exercice4 : (**) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \succ 2$

Montrer que si n est premiers alors $n+1$ n'est pas premiers

Corrigé : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \succ 2$

On a n est premiers alors n est impair donc $n+1$ est pair

Par suite : $n+1$ n'est pas premiers

Exercice5: (*)1) Décomposer les deux nombres 84 et 60 en produit de facteurs premiers.

2) Déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{84}{60}$

3) Simplifier des racines carrées suivant : $A = \sqrt{2100}$ et $B = \sqrt{63} \times \sqrt{105}$

Corrigé : 1) Décomposons les deux nombres 84 et 60 en produit de facteurs premiers on trouve :

$84=2^2\times3\times7$ et $60=2^2\times3\times5$

2) En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers on trouve :

$\frac{84}{60} = \frac{2\times2\times3\times7}{2\times2\times3\times5} = \frac{7}{5} \longleftarrow$ Fraction irréductible

3) $\sqrt{2100} = \sqrt{2\times2\times3\times5\times5\times7}$

$= \sqrt{2^2\times3\times5^2\times7}$

$= \sqrt{\left(2^2\times5^2\right)\times3\times7}$

$= \sqrt{(2\times5)^2}\times\sqrt{3\times7}$

$= 2\times5\times\sqrt{21}$

$= 10\sqrt{21}$

On décompose chacun des nombres 63 et 105 on trouve :

$63 = 3 \times 21 = 3 \times 3 \times 7 = 3^2 \times 7$ et $105 = 3 \times 35 = 3 \times 5 \times 7$

D'où $B = \sqrt{63 \times 105} = \sqrt{3^2 \times 7 \times 3 \times 5 \times 7} = 3 \times 7\sqrt{3 \times 5} = 21\sqrt{15}$.

Exercice6 : (**) On pose : $n = 777600$

1) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier n

2) Déterminer le plus petit entier naturel non nul qu'il faut multiplier par n pour trouver un carré parfait

Rappel : On dit qu'un entier naturel n est un carré parfait, s'il existe m dans $\mathbb{N}$ tel que : $n = m^2$.

Corrigé : 1) $777600 = 2^7 \times 3^5 \times 5^2$

2) Pour que n soit un carré d'un entier il faut que tous les exposants des nombres premiers dans sa décomposition soit pair

$2^7\times3^5\times5^2\times2\times3 = 2^8\times3^6\times5^2 = \left(2^4\times3^3\times5^1\right)^2 = (2160)^2$ **PROF: ATMANI NAJIB**

Donc : on doit multiplier n par : $2\times3=6$

Exercice7: (*) On **pose :** $a=33075$ et $b=7875$

1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : a et b et en déduire :

$7875\wedge33075$; $7875\vee33075$

2) En déduire une simplification des nombres : $\frac{a}{b}$ et $\sqrt{a}$

Corrigé : 1) Technique (1)

On a donc : $33075 = 3^3 \times 5^2 \times 7^2$ et $7875 = 3^2 \times 5^3 \times 7$

Par suite par application des règles de calculs de $PGCD$ et $PPCM$

On trouve :

$$7875 \wedge 33075 = PGCD(7875;33075) = 3^2 \times 5^2 \times 7 = 1575$$

$$7875 \vee 33075 = PPCM(7875;33075) = 3^3 \times 5^3 \times 7^2 = 165375$$

2) $\frac{a}{b} = \frac{3^3 \times 5^2 \times 7^2}{3^2 \times 5^3 \times 7} = \frac{3 \times 7}{5} = \frac{21}{5}$ et

$\sqrt{a} = \sqrt{3^3 \times 5^2 \times 7^2} = 3 \times 5 \times 7 \times \sqrt{3} = 105\sqrt{3}$

Car : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{a^2} = a$

Technique (1)	
33075	**3**
11025	**3**
3675	**3**
1225	**5**
245	**5**
49	**7**
7	**7**
1	

7875	**3**
2625	**3**
875	**5**
175	**5**
35	**5**
7	**7**
1	

Exercice8 :1) Calculer le PGCD des nombres 135 et 210

2) Dans une salle de bain, on veut recouvrir le mur situé au–dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible

a) Déterminer la longueur, en cm, du côté d'un carreau, sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur

b) Combien faudra–t–il alors de carreaux ?

Corrigé : 1) 135 = 3 × 45= 3^2 × 15 = 3^3 × 5^1 et 210 = 3 × 7× 10=2 × 3 × 5× 7.

PGCD (411, 681) =3 × 5=15 (on ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant).

2) a) si on veut recouvrir le mur situé au–dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible :

On cherche le PGCD de 135 et 210 car la mesure de la longueur du côté du carré en cm doit être un diviseur à la fois de 135 et 210.

Or : PGCD (411, 681) =15 cm

Donc :la longueur, en cm, du côté d'un carreau est 15 cm

b) il faudra alors : $135 \div 15 = 9$ carreaux en largeur et $210 \div 15 = 14$ carreaux en largeur

Il faudra alors : $14 \times 6 = 126$ carreaux

Exercice9 : (***) D'un aéroport un avion part tous les 9 jours vers un autre pays et du même aéroport un autre avion part tous les 15 jours vers un autre pays

Si les deux avions partent les mêmes jours pour la 1ere fois après combien de jours ils partiront dans les mêmes jours pour la deuxième fois ?

Corrigé : Les départs du premier avion à partir du premier jour sont des multiples de 9 : qui sont 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ;…

Les départs du deuxième avion à partir du premier jour sont des multiples de 15 :

Qui sont ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ;…

Le PPCM (9 ; 15) est le nombre de jours après lesquels les

Deux avions partent dans les mêmes jours pour la deuxième fois et puisque : PPCM (9 ; 15) =45

Donc le nombre de jours est 45 **PROF: ATMANI NAJIB**

Autre méthode de calcul du PPCM (9 ; 15)

On décompose chacun des nombres 9 et 15.

On trouve : 9 = 3^2 et 15 = 3 × 5

On applique la règle pour calculer le PPCM

Donc : PPCM (9 ; 15) = 3^2 × 5 =9 × 5=45

Exercice10 : (***) Soit a un entier naturel :

1) Montrez que $a(a+2)+1$ s'écrit sous la forme x^2 où x est un nombre entier

(Dans ce cas on l'appelle "carré parfait »).

2) Soit n un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$:

Montrez que le nombre : $(n^3+3n^2+n)(n^3+3n^2+n+2)+1$ est un carré parfait.

3)a) Développez : $(n^2+3n+1)^2$

b) Déduire que le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré Parfait.

Corrigé : 1) $a(a+2)+1 = a^2+2a+1 = (a+1)^2$

Par suite : $a(a+2)+1$ est un carré parfait

2) on a : $(n^3+3n^2+n)(n^3+3n^2+n+2)+1 = (n^3+3n^2+n)((n^3+3n^2+n)+2)+1 = a(a+2)+1$

Avec : $a = n^3+3n^2+n$

Donc d'après 1) on a : $(n^3+3n^2+n)(n^3+3n^2+n+2)+1 = (n^3+3n^2+n+1)^2$

Donc : le nombre : $(n^3+3n^2+n)(n^3+3n^2+n+2)+1$ est un carré parfait.

3)a) développement de : $(n^2+3n+1)^2$

$(n^2+3n+1)^2 = ((n^2+3n)+1)^2 = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1^2$

PROF: ATMANI NAJIB

$(n^2+3n+1)^2 = n^4+6n^3+9n^2+2n^2+6n+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1$

3)b) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+n)(n^2+2n+3n+6)+1$

$= (n^2+n)(n^2+5n+6)+1 = n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n+1$

Donc : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1$

Par suite : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n+1)^2$

Donc : le nombre : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré parfait.

Exercice11 : (***) Soient m et n deux nombres entiers naturels, tel que : $m \geq n$

1) Monter que $m+n$ et $m-n$ ont la même parité.

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $m^2 - n^2 = 28$

Corrigé : 1) on a : $(m+n)+(m-n) = 2m$ c'est-à-dire la somme est paire donc automatiquement $m+n$ et $m-n$ ont la même parité. Car si non la somme sera impaire

2) $m^2 - n^2 = 28$ Équivaut à : $(m-n)(m+n) = 28$ (1)

Mais les diviseurs de 28 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28

Et puisque : $m-n \leq m+n$ et $m+n$ et $m-n$ ont la même parité.

Alors on a : $\begin{cases} m-n=2 \\ m+n=14 \end{cases}$ Donc on a : $\begin{cases} m=8 \\ n=6 \end{cases}$

Exercice12 : (***) On considère deux entiers naturels a et b avec $a \prec b$ tels que $a \times b = 4320$ et $a \wedge b = 12$

1) Calculer $a \vee b$ 2) Calculer a et b

Corrigé : 1) on sait que $(a \wedge b) \times (a \vee b) = a \times b$ et on a : $a \wedge b = 12$

Donc : $12 \times (a \vee b) = 4320$ cad $a \vee b = \frac{4320}{12} = 360$

2) Calculons a et b *:*

Décomposons en produit de facteurs premiers les nombres 12 et 360

$12 = 2^2 \times 3$ Et $360 = 6 \times 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Nous avons donc : $a \wedge b = 2^2 \times 3$ et $a \vee b = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $a \prec b$

Par conséquent : $a = 2^2 \times 3^2 = 36$ et $b = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien