Tronc commun Sciences BIOF

Correction de la Série N°6 : Arithmétique dans IN

Diviseurs et multiples et la parité

Exercice1 : (*) Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 375 et 2070

Corrigé : Les diviseurs de 375 sont 1, 3, 5, 15, 25, 75,125 et 375

Les diviseurs de 2070 sont :1,2,3,5,6,9,15,18,23,30,45,46,69,90,115,138,230,414,690,345,1035,2070

L'ensemble des diviseurs communs à 375 et 2070 sont donc 1,3,5,15,138,414,690,2070

Exercice2 : (*) Déterminer le chiffre x pour que le nombre : $532x$ Soit divisible par 9

Corrigé : on a $0 \le x \le 9$

Le nombre : $532x$ est divisible par 9 signifie que : $5+3+2+x$ est un multiple de 9

Signifie que : $10+x$ est un multiple de 9

Donc : en donnant à x les valeurs entre 0 et 9 on trouve que : $x=8$ par suite le nombre est : 5328

Exercice3 : (*) Déterminer tous les nombres entiers naturels a et b tels que : $a \times b = 90$ et écrire tous les diviseurs de 90

Corrigé : $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que ; $a \times b = 90$ donc :

a	1	2	3	5	6	9	10	15	18	30	45	90
b	90	45	30	18	15	10	9	6	5	3	2	1

Par suite les diviseurs de 90 sont : $D_{90} = \{1;2;3;5;6;9;10;15;18;30;45;90\}$

Exercice4 : (**) Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que ; a est un multiple de 13 et $a \times b = 273$ et $27 \le a \le 50$

Déterminer a et b

Corrigé : les multiples de 13 s'écrivent sous la forme : $13k$ avec : $k \in \mathbb{N}$ on a donc : $27 \le 13k \le 50$

Ce qui signifie que : $27/13 \le k \le 50/13$ donc : $2,07 \le k \le 3.84$

Avec : $k \in \mathbb{N}$ Donc : $k=3$ Par suite : $a = 13 \times 3 = 39$

Et on a : $a \times b = 273$ équivaut à $39 \times b = 273$ C'est -à -dire : $b = \frac{273}{39} = 7$

Exercice5 : (*) On pose : $x = 3 \times 5 \times 7 \times 12$ et $y = 2 \times 5 \times 3 \times 5$

Sans calculer x et y monter que : 1)75 divise y 2)105 divise x

Corrigé :1) on a $y = 2 \times 5 \times 3 \times 5$ donc $y = 2 \times 75$ par suite : 75 divise y

2) On a $x = 3 \times 5 \times 7 \times 12$ donc $x = 105 \times 12$ par suite : 105 divise x

Exercice6 : (**) Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que si n divise a et n divise b alors n divise $2a+3b$

Corrigé : n divise a signifie que : $a = n \times k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Et n divise b signifie que : $b = n \times k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$

Donc : $2a+3b = 2 \times n \times k + 3 \times n \times k'$

C'est-à-dire : $2a+3b = n(2k+3k') = n \times k''$ avec $k'' = 2k+3k' \in \mathbb{N}$

Par conséquent : n divise $2a+3b$

Exercice7: (**) $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$; Montrer que si a est pair et b impair alors la somme est un nombre impair.

Corrigé : On a a est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $a = 2k$

b Impair alors il existe $k' \in \mathbb{N}$: $b = 2k'+1$

Donc : $a+b = 2k+2k'+1 = 2(k+k')+1 = 2k''+1$ avec: $k'' = k+k' \in \mathbb{N}$

Par suite : $a+b$ est un nombre impair

Exercice8: (**) $a \in \mathbb{N}$: Montrer que si a est impair alors a^2 est un nombre impair

Corrigé : a est impair donc : $a = 2k+1$avec $k \in \mathbb{N}$

$a^2 = (2k+1) = (2k)^2 + 2\times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Donc : $a^2 = 2(k^2 + 2k) + 1 = 2k'' + 1$ avec $k^2 + 2k = k'' \in \mathbb{N}$ **PROF: ATMANI NAJIB**

Par suite : a^2 est un nombre impair

Exercice9: (***) $a \in \mathbb{N}$

Montrer que si a^2 est impair alors a est un nombre impair

Corrigé : On suppose que a est pair alors a^2 est un nombre pair or a^2 est impair donc : contradiction

Donc : a est un nombre impair

Exercice10 : (*) $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$

Compléter les pointillés avec pair ou impair

Nombres	a	b	$a+b$	$a-b$	$a\times b$
Parité des nombres	pair	pair	….	….	….
	impair	pair	…	….	….
	impair	impair	….	….	….

Corrigé :

Nombres	a	b	$a+b$	$a-b$	$a\times b$
Parité des nombres	pair	pair	pair	pair	pair
	impair	pair	impair	impair	pair
	impair	impair	pair	pair	impair

Exercice11 : (**) 1) Montrer que le produit de Deux nombres consécutifs est un nombre pair

2) montrer que : si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n^2 + n$ est un nombre pair et en déduire que les nombres : n et n^2 ont la même parité

Corrigé :1) Soit $n \in \mathbb{N}$(un entier naturel quelconque)

$n\times(n+1)$ Est le produit de deux nombres consécutifs

Exemple : 2×3 ou 3×4 ou $100\times 101 \ldots$

On va monter que : $n\times(n+1)$ est un nombre pair

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

En effet :

1ére cas : si n est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k$ par suite :

$n\times(n+1) = 2k\times(2k+1) = 2\left[k\times(2k+1)\right] = 2k'$ avec $k' = k\times(2k+1) \in \mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

2ére cas : si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k+1$

Par suite : $n\times(n+1) = (2k+1)\times(2k+1+1)$

Donc : $n\times(n+1) = (2k+1)\times(2k+2) = 2(2k+1)\times(k+1)$

Donc : $n\times(n+1) = 2k'$ avec $k' = (2k+1)\times(k+1) \in \mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

2) $n^2 + n = n\times(n+1)$ donc c'est un nombre pair

Par suite : n^2 et n ont la même parité Car si non $n^2 + n$ sera un nombre impair

Exercice12 : (**) Soit $n \in \mathbb{N}$ (un entier naturel quelconque)

1) Vérifier que : $n^2 + 3n + 3 = (n+1)(n+2) + 1$

2) En déduire la parité du nombre : $n^2 + 3n + 3$

Corrigé :1) $(n+1)(n+2)+1=n^2+2n+n+2+1=n^2+3n+3$

2) On a : $n^2+3n+3=(n+1)(n+2)+1$;

Et $(n+1)(n+2)$ est le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs

Donc : $(n+1)(n+2)$ est un nombre pair c'est-à-dire : $(n+1)(n+2)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2+3n+3=2k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$

Par suite : n^2+3n+3 est un nombre impair

Exercice13 : (*) et (**) Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$

1) 123^3+278^3 2) $\left(2025^5+2026^5\right)^3$ 3) $2n+2024$ 4) $10n+2025$

5) $n^2+13n+2021$ 6) $n^2+2024n$

Corrigé :1) 123^3+278^3 : 278^3 Est paire car le cube d'un nombre pair

123^3 Est impair car le cube d'un nombre impair

123^3+278^3 C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair

2) 2026^5 est paire car le produit de nombres pairs

2025^5 Est impair car le produit de nombres impairs

Donc : 2025^5+2026^5 c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair

Et par suite : $\left(2025^5+2026^5\right)^3$ est impair car le produit de nombres impairs

3) $2n+2024=2(n+1012)=2\times k$ avec $k=n+1012\in\mathbb{N}$

Donc $2n+2024$ est un nombre pair **PROF: ATMANI NAJIB**

4) $10n+2025=2(5n+1012)+1=2\times k+1$ avec $k=5n+1012\in\mathbb{N}$

Donc $10n+2025$ est un nombre impair

5) $n^2+13n+2021=n^2+n+12n+2020+1=n(n+1)+2(6n+1010)+1$

$n(n+1)$ Est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Donc il existe un entier naturel k tel que : $n=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2+13n+2021=2k+2(6n+1010)+1=2(k+6n+1010)+1=2k'+1$ avec $k'=k+6n+1010$

Par suite : $n^2+13n+2021$ est un nombre impair

6) Etude de la parité $n^2+2024n$

1ére cas : 1cas : si n pair

$n^2=n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $2024n=2\times1012n=2\times k$ est pair

On a : $n^2+2024n$ c'est la somme de deux Nombres pairs

Donc : n^2+8n est pair

2ére cas : 1cas : si n impair

$n^2=n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $2024n=2\times1012n=2\times k$ est pair

On a : $n^2+2024n$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair Donc : $n^2+2024n$ est impair

Exercice14 : (**) $n\in\mathbb{N}$ On pose : $x=2n+7$ et $y=4n+2$

1) Montrer que : x est impair et que y est pair

2) Montrer que : $x+y$ est un multiple de 3

Corrigé :1) $x=2n+7=2n+6+1=2(n+3)+1=2k+1$

Avec : $k=n+3\in\mathbb{N}$ donc : x est impair

$y=4n+2=2(2n+1)=2k$ Avec : $k=2n+1$ donc : y est pair

2) $x+y=2n+7+4n+2=6n+9=3(2n+3)=3k$

Avec : $k=2n+3\in\mathbb{N}$ donc : $x+y$ est un multiple de 3

Exercice15 : (**) 1) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Montrer que la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Corrigé :1) soit $n\in\mathbb{N}$ donc : $n+(n+1)+(n+2)$ est la somme de trois entiers naturels consécutifs

On a : $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)=3k$ avec : $k=n+1\in\mathbb{N}$

Donc : la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Un nombre impair s'écrit sous la forme : $2k+1$ avec : $k\in\mathbb{N}$

On a donc : $(2k+1)+\left[(2k+1)+2\right]=4k+4=4(k+1)=4k'$ Avec : $k'=k+1\in\mathbb{N}$

Par suite la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Exercice16 : (**) Soient : $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$ et on pose : $A=(a+6b)^2-a^2$

Montrer que : A est un entier naturel divisible par 8

Corrigé :1) $A=(a+6b)^2-a^2=(a+6b+a)(a+6b-a)=6b(2a+6b)=12b(a+3b)$

Puisque : $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$ alors : $12b(a+3b)\in\mathbb{N}$ et par suite : $A\in\mathbb{N}$

Et on a : $A=12b(a+3b)=12k$ avec :

Exercice17 : (***) Soit $n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrer que : n^2+3n+4 et n^2-3n+4 sont des nombres pairs

2) Montrer que : le nombre n^4-n^2+16 est un multiple de 4

Corrigé :1) a) On a : $n^2+3n+4=n^2+n+2n+4=n(n+1)+2(n+2)$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair

$2(n+2)=2k$ Avec $k=n+2\in\mathbb{N}$ est aussi pair

Par suite le nombre $n^2+3n+4=n(n+1)+2(n+2)$ est pair car c'est la somme deux nombres pairs

b) on a : $n^2-3n+4=n^2+n-4n+4=n(n+1)-2(2n-2)$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair

$2(2n-2)=2k$ Avec $k=2n-2\in\mathbb{N}$ est aussi pair

Par suite le nombre $n^2+3n+4=n(n+1)-2(n-2)$ est pair car c'est la différence deux nombres pairs

2) ***1ere méthode*** : On a : n^2+3n+4 et n^2-3n+4 sont des nombres pairs

Donc : $n^2+3n+4=2k$ et $n^2-3n+4=2k'$ avec : $k\in\mathbb{N}$ et $k'\in\mathbb{N}$ **PROF: ATMANI NAJIB**

Par suite : $(n^2+3n+4)(n^2-3n+4)=(2k)(2k')=4kk'$

Équivaut à : $((n^2+4)+3n)((n^2+4)-3n)=4kk'$ Équivaut à : $(n^2+4)^2-9n^2=4kk'$

Équivaut à : $n^4+8n^2+16-9n^2=4kk'$ Équivaut à : $n^4-n^2+16=4kk'$

Équivaut à dire que : n^4-n^2+16 est un multiple de 4

2ere méthode : On a : $n^4-n^2+16=n^2(n^2-1)+16=n^2(n^2-1^2)+16$

Donc : $n^4-n^2+16=n^2(n-1)(n+1)+16=(n-1)n\times n\times(n+1)+16$

Or : on a : $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair

Et aussi : $(n-1)\times n$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair

$n^4-n^2+16=2k\times 2k'+16=4kk'+16=4(kk'+4)=4k''$ Avec : $k''=kk'+4$

Par suite : n^4-n^2+16 est un multiple de 4 $k=b(a+3b)$

Par suite : A est un entier naturel divisible par 12

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien