Tronc commun Sciences BIOF
Correction de la Série N°5 : Arithmétique dans IN

Exercice1 : *(*)*1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : 170 ; 68
2) Calculer : *PGCD (68 ; 170); PPCM (68 ; 170)*
3) a) Déterminer tous les diviseurs communs à 170 ; 68
b) Donner la forme irréductible de la fraction : $\frac{68}{170}$

Correction : 1)*170 = 2¹* $\times 5 \times 17$
68 = $2 \times 2 \times 17 = 2^2 \times 17$
2) a) Le PGCD :« Le plus grand diviseur commun des deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PGCD (72 ; 60) $=2^1\times 17 = 34$
b) On applique la règle suivante pour calculer le PPCM :« Le plus petit multiple commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers
Communs et non communs munis du plus grand des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PPCM (68 ; 170) $=2^2 \times 5\times 17= 340$
3) a) Les diviseurs communs à 170 ; 68 sont aussi les diviseurs de leur PGCD.
On a : *PGCD (68 ; 170) =34 donc les diviseurs communs à* 170 ; 68 *sont les diviseurs de 34 qui sont : 1, 2 ,17, 34.*
3) b) Méthode 1 : $\frac{68}{170}=\frac{2^2\times 17}{2^1\times 5\times 17}=\frac{2}{5}$
Méthode 2 : On divise le numérateur et le dénominateur par le PGCD (68 ; 170) donc : $\frac{68}{170}=\frac{68\div 34}{170\div 34}=\frac{2}{5}$

Exercice2 : (**) Soient : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$ et on pose : $N=(n+4m)^2-n^2$
Montrer que : N est un entier naturel multiple de 8
Correction : 1) $N=(n+4m)^2-n^2=(n+4m+n)(n+4m-n)=8m(n+2m)$ Puisque : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$
Alors : $8m(n+2m)\in\mathbb{N}$ et par suite : $N\in\mathbb{N}$
Et on a : $N=8m(n+2m)=8k$ avec : $k=m(n+2m)\in\mathbb{N}$ **PROF: ATMANI NAJIB**
Par suite : N est un entier naturel multiple de 8

Exercice3 : (*) $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$;
1) Montrer que si a est pair et b impair alors la somme est un nombre impair.
2) Montrer que si a est impair alors a^2 est un nombre impair
3) Montrer que si a^2 est impair alors a est un nombre impair
Correction : 1) On a : a est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $a=2k$
b Impair alors il existe $k'\in\mathbb{N}$: $b=2k'+1$
Donc : $a+b=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$ avec : $k''=k+k'\in\mathbb{N}$
Par suite : $a+b$ est un nombre impair
2) a est impair donc : $a=2k+1$avec $k\in\mathbb{N}$
$a^2=(2k+1)=(2k)^2+2\times 2k\times 1+1^2=4k^2+4k+1$
Donc : $a^2=2(2k^2+2k)+1=2k''+1$; $k^2+2k=k''\in\mathbb{N}$
Par suite : a^2 est un nombre impair
3) On suppose que a est pair alors a^2 est un nombre pair or a^2 est impair
Donc : contradiction et par suite : a est un nombre impair (Raisonnement par l'absurde)

Exercice4 : (***)1) Déterminer la parité des nombres suivants : $A=2022^{2021}+2021^{2022}$; $B=100n^2+7$; $C=7n^2+n+1$
Correction : 1) Le nombre $A=2022^{2021}+2021^{2022}$ est impair (somme de deux nombres de différente parité) :

Le nombre 2021^{2022} est impair (produit de nombres impairs) et Le nombre 2022^{2021} est pair (produit de nombres pairs).

$B=100n^2+7=100n^2+6+1=2\left(50n^2+3\right)+1=2k+1$ Avec : $k=50n^2+3$

Donc : $B=2n^2+6n+120$ est impair.

$C=4n^2+2n+4+1=2\left(2n^2+n+2\right)+1=2k+1$ Avec : $k=2n^2+n+2$

$C=7n^2+n+1=n^2+n+6n^2+1=n\left(n+1\right)+2\times 3n^2+1$

On a : $n\left(n+1\right)$ est pair (produit de deux nombres consécutifs) et $2\times 3n^2=2\times k$ est pair.

Donc : $C=7n^2+n+1$ est impair.

Exercice*5 :* (***) Un pâtissier dispose de 411 pommes et de 681 fraises. Afin de préparer des tartelettes, il désire répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques.

1) Calculer le nombre de tartelettes

2) Calculer le nombre de pommes et de fraises dans chaque tartelette

Correction : 1) Si on désire répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques.

On cherche le PGCD de 411et 685 car ce nombre doit être un diviseur à la fois de 411et 685 et un plus grand Diviseur : 411 = 3 × 137 et 137 est premier et 681 = 3 × 227 et 227 est premier

PGCD (411, 681) = 3 (on ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant).

Donc : le nombre de tartelettes est 3.

2) $681\div 3=227$ le nombre de fraises dans chaque tartelette est 227.

$411\div 3=137$ Le nombre de pommes dans chaque tartelette est 137. **PROF: ATMANI NAJIB**

Exercice*6 :* (***) Une briqueterie livre des briques de 16 cm × 8 cm × 5 cm dans des caisses cubiques.

a) Quelle est la dimension de la plus petite caisse cubique qui convient ?

b) Quel est le nombre minimum de briques que l'entreprise peut livrer ?

Correction : la dimension de la plus petite caisse cubique qui convient est le plus petit multiple commun de 8 et 16 et 5 :

$8=2^3$ et $16=2^4$ et $5=5^1$

PPCM (8, 16, 5) = $2^4\times 5$ =80 (On prend tous les facteurs premiers qui apparaissent et on les affecte le plus grand exposant).

Donc : la dimension de la plus petite caisse cubique qui convient : **80**cm

Le nombre de rectangles utilisés ?

Le volume d'une brique est : 16 x 8 x 5= 640 cm^3

Le volume d'une caisse est : 80 x 80 x 80= 512000cm^3

Le nombre minimum de briques que l'entreprise peut livrer est donc : $512000\div 640=800$

Exercice7 : (****) Soit $n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : n^3-n est divisible par 3.

Indication : Etudier les cas : $n=3k$; $n=3k+1$ et $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

2) Déduire que l'équation $n^3-4n-100=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}$.

Indication : Raisonner par l'absurde

Correction : 1) soit $n\in\mathbb{N}$: $n^3-n=n\left(n^2-1\right)=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)$

Il y'a trois façons d'écrire n : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec : $k\in\mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

1ére cas : si $n=3k$: $n^3-n=3k\left(3k-1\right)\left(3k+1\right)=3\left(k\left(3k-1\right)\left(3k+1\right)\right)=3k'$ avec : $k'=k\left(3k-1\right)\left(3k+1\right)\in\mathbb{N}$

Donc : n^3-n est un multiple de 3 dans ce cas

2ére cas : si $n=3k+1$: $n^3-n=\left(3k+1\right)\left(3k+1-1\right)\left(3k+1+1\right)$

$=\left(3k+1\right)\left(3k\right)\left(3k+2\right)=3\left(k\left(3k+1\right)\left(3k+2\right)\right)=3k'$

Avec : $k'=k\left(3k+1\right)\left(3k+2\right)\in\mathbb{N}$

Donc : n^3-n est un multiple de 3 dans ce cas aussi

3ére cas : si $n=3k+2$

$n^3-n=\left(3k+2\right)\left(3k+2-1\right)\left(3k+2+1\right)$ $=\left(3k+2\right)\left(3k+1\right)\left(3k+3\right)=3\left(\left(k+1\right)\left(3k+1\right)\left(3k+2\right)\right)=3k'$

Avec : $k'=(k+1)(3k+1)(3k+2)\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : n^3-n est un multiple de 3 dans ce cas aussi.
Par conséquent : selon le raisonnement par
Disjonction des cas le nombre n^3-n est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Supposons que l'équation : $n^3-4n-100=0$ admet une solution dans $\mathbb{N}$.
On a : n^3-n est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$ Donc : $n^3-n=3k$ avec $k\in\mathbb{N}$

$n^3-4n-100=0$ Équivaut à : $n^3-n-3n-100=0$

Équivaut à : $3k-3n-100=0$

Équivaut à : $3(k-n)=100$ avec $k-n$ un entier car $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}$

Équivaut à : 3 divise 100 donc contradiction.
Par conséquent : l'équation $n^3-4n-1=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}$.

Exercice8 : (****) 1) Déterminer tous les diviseurs de 22

2) En déduire tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation : $(x+2)(y+1)=22$ (1)

3) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation : $x+xy+y=30$ (2)

Correction : 1) On a : $22=2^1\times 11^1$ donc les diviseurs de 22 sont : 1 et 2 et 11 et 22

2) On a : $(x+2)(y+1)=22$ **PROF: ATMANI NAJIB**

Donc : $\begin{cases}x+2=22\\y+1=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x+2=11\\y+1=2\end{cases}$ ou $\begin{cases}x+2=2\\y+1=11\end{cases}$ ou ($\begin{cases}x+2=1\\y+1=22\end{cases}$ impossible car $x\in\mathbb{N}$)

Par suite : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) sont :

$(20;0)$; $(9;1)$ et $(0;10)$

3) $x+xy+y=30$ équivaut à : $x+xy+y+1=31$ Équivaut à : $x(1+y)+(y+1)=31$

Équivaut à : $(y+1)(x+1)=31$ Donc : $(x+1)$ et $(y+1)$ sont deux diviseurs de 31

Par suite : $\begin{cases}x+1=1\\y+1=31\end{cases}$ ou $\begin{cases}x+1=31\\y+1=1\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}x=0\\y=30\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=30\\y=0\end{cases}$

Par conséquent les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (2)

Sont : $(0;30)$ et $(30;0)$.

Exercice9 : (****) Soit n un entier naturel :

1) Ecrire le nombre : n^4+4 sous la forme de différence de deux carrés parfaits
2) Déduire que le nombre n^4+4 n'est pas un nombre premier pour tout n entier naturel

Correction: 1) On a: $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2$

2) On a : $n^4+4=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2-2n)(n^2+2+2n)$

Donc : le nombre n^4+4 n'est pas un nombre premier pour tout n entier naturel car il admet au moins
Deux diviseurs qui sont : n^2+2n+2 et n^2-2n+2 pour tout n entier naturel

Exercice10 : (****) Soit n un entier naturel :

Montrer que si le nombre : $n+1$ est un carré parfait alors le nombre : $14n+50$ est la somme de quatre carrés parfaits.

Correction : 1) Soit n un entier naturel tel que : $n+1$ est un carré parfait donc : $n+1=a^2$ avec $a\in\mathbb{N}$

On a : $14n+50=14n+14+36=14(n+1)+36$

Donc : $14n+50=14a^2+36=9a^2+4a^2+a^2+36$

Donc : $14n+50=(3a)^2+(2a)^2+a^2+6^2$

Donc : $14n+50$ est la somme de quatre carrés parfaits

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien