Tronc commun Sciences BIOF
Correction de la série N°3 : Arithmétique dans IN

Exercice1 : (*) Deux entiers naturels m et n sont dits amicaux, si la somme des diviseurs de m (Autres que m) est égale à n et simultanément la Somme des diviseurs de n (autres que n) est égale à m.

1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : 220 et 284.
2) Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.
3) En déduire le : PGCD et le PPMC des nombres 220 et 284.
4) a) En déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{220}{284}$

b) Déduire la somme suivante : $\frac{5}{220}+\frac{7}{284}$

c) Simplifier la racine carrée suivant : $\sqrt{220\times 284}$ et l'écrire sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers

Correction : 1) $220=2^2\times 5\times 11$ et $284=2^2\times 71$.

2)Les diviseurs de 220 sont : 1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110 ;220.
Les diviseurs de 284 sont 1;2;4;71;142;284
Calculons la somme des diviseurs de 220 sauf 220 :$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$
Et Calculons la somme des diviseurs de 284 Sauf le 284 est : $1+2+4+71+142=220$
Conclusion : 220 et 284 sont deux entiers amicaux
3)a) Déduction du : PGCD 220 et 284.
Methode1 : le PGCD des nombres 220 et 284 est le plus grand diviseur commun des deux nombres 220 et 284.
Les diviseurs communs des deux nombres 220 et 284 sont : 1 ; 2 ; 4 et le plus grand est : 4
Donc : $PGCD(284;220)=4$

Methode2 : On a : $220=2^2\times 5\times 11$ et $284=2^2\times 71$.
On applique la règle suivante pour calculer le PGCD (220 ;284) :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : $PGCD(284;220)=2^2=4$

b) Déduction du : PPMC des nombres 220 et 284.
Methode1 : le PPMC est le produit de tous les facteurs premiers présents dans l'une ou dans l'autre de ces deux décompositions et élever à leur plus grande puissance :
Donc : $PPCM(284;220)=2^2\times 5^1\times 11^1\times 71^1=15620$

Methode2 : On a : $PGCD(612;1530)\times PPCM(612;1530)=612\times 1530$

Donc : $PPCM(284;220)=\frac{284\times 220}{PGCD(284;220)}=15620$

4) a) Déduction de la forme irréductible de la fraction : $\frac{220}{284}$

Méthode 1 : $\frac{220}{284}=\frac{2^2\times 5\times 11}{2^2\times 71}=\frac{5\times 11}{71}=\frac{55}{71}$

Méthode 2 : On divise le numérateur et le dénominateur par le PGCD (220 ;284) donc : $\frac{220}{284}=\frac{220\div 4}{284\div 4}=\frac{55}{71}$

4) a) $\frac{5}{220}+\frac{7}{284}$: Il faut mettre les fractions au même dénominateur :

Le $PPCM(284;220)=15620$ est par définition le plus petit multiple commun de ces nombres :

$15620\div 220=71$ et $15620\div 284=55$

$$\frac{5}{220}+\frac{7}{284}=\frac{5\times 71}{220\times 71}+\frac{7\times 55}{284\times 55}=\frac{355}{15620}+\frac{385}{15620}=\frac{355+385}{15620}=\frac{740}{15620}=\frac{740}{15620}$$

$740 = 2^2 \times 5 \times 37$ et $15620 = 2^2 \times 5^1 \times 11^1 \times 71^1$

Donc : $\frac{5}{220} + \frac{7}{284} = \frac{740}{15620} = \frac{2^2 \times 5 \times 37}{2^2 \times 5^1 \times 11^1 \times 71^1} = \frac{37}{11^1 \times 71^1} = \frac{37}{781}$

Remarque : le $PGCD(37;781) = 1$

c) Simplification de la racine carrée suivant : $\sqrt{220 \times 284}$

$\sqrt{220 \times 284} = \sqrt{2^2 \times 5 \times 11 \times 2^2 \times 71} = 2 \times \sqrt{5 \times 11 \times 71} \times 2 = 4\sqrt{5 \times 11 \times 71} = 4\sqrt{3905}$

Exercice2 : (**) Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$

a) $2021^3 + 2022^3 + 2023^3$ b) $20n^2 + 10n + 3$ c) $n^2 + 2019n + 2020$ d) $n^2 + 6n$

Correction : Un nombre pair s'écrit sous la forme 2k, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme 2k+1, avec k entier.

1) a) $2021^3 + 2022^3 + 2023^3$: 2022^3 est paire car le produit de nombres pairs.

2023^3 car le produit de nombres Impairs et 2021^3 car le produit de nombres Impairs

Donc : $2021^3 + 2022^3 + 2023^3$ est un nombre pair.

b) $20n^2 + 10n + 3 = 20n^2 + 10n + 2 + 1 = 2(10n^2 + 5n + 1) + 1 = 2k + 1$

avec $k = 10n^2 + 5n + 1 \in \mathbb{N}$

Donc : $20n^2 + 10n + 3$ est un nombre impair.

c) $n^2 + 2019n + 2020 = n^2 + n + 2018n + 2020 = n(n+1) + 2(1009n + 1010)$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Donc : $n^2 + 2019n + 2020 = 2k + 2(1009n + 1010)$

Donc : $n^2 + 2019n + 2020 = 2(k + 1009n + 1010) = 2k'$ avec $k' = k + 1009n + 1010$

Par suite : $n^2 + 2019n + 2020$ est un nombre pair.

e) Etude de la parité de $n^2 + 6n$:

1ére cas : si n pair.

$n^2 = n \times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $6n = 2 \times (3n) = 2 \times k$ est pair

On a : $n^2 + 6n$ c'est la somme de deux nombres pairs donc : $n^2 + 6n$ est pair.

2ére cas : si n impair.

$n^2 = n \times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $6n = 2 \times (3n) = 2 \times k$ est pair

On a : $n^2 + 6n$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : $n^2 + 6n$ est impair.

Exercice3 : (**) 1) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3
2) Montrer que la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Correction : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ donc : $n + (n+1) + (n+2)$ est la somme de trois entiers naturels consécutifs

On a : $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1) = 3k$ avec : $k = n + 1 \in \mathbb{N}$

Donc : la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Un nombre impair s'écrit sous la forme : $2k+1$ Avec $k \in \mathbb{N}$:

On a donc : $(2k+1) + [(2k+1) + 2] = 4k + 4 = 4(k+1) = 4k'$ Avec : $k' = k + 1 \in \mathbb{N}$

Par suite la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Exercice4 : (**) (***) Soit $n \in \mathbb{N}$

1) Développer : $(n+1)^2 - n^2$

2) Déduire que tout nombre impair peut s'écrire par La différence des carrés de deux nombres entiers Consécutifs. (C'est-à-dire : si *n* impair, il existe Deux nombres consécutifs *a*, *b* et $n = b^2 - a^2$)

3) Appliquer l'affirmation précédente et écrire les nombres 31 ; 2019 ; 2021 sous forme de deux carrés consécutifs

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ montrer que le nombre $n^2 + n + 7$ Est impair.

5) Appliquer l'affirmation précédente sur le nombre n^2+n+7

Correction : 1) On a : $(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$

2) On a $(n+1)^2-n^2=2n+1$ et le nombre $2n+1$ est impair pour tout $n\in\mathbb{N}$ et n et $n+1$ sont deux nombres consécutifs.

Donc : tout nombre impair s'écrit comme différence de deux carrés consécutifs.

3) Application : $30=2\times15+1$ est impair et ($2n+1=(n+1)^2-n^2$)

Donc : $30=(15+1)^2-15^2=16^2-15^2$

De même : $2019=2\times1009+1$ est impair $2019=(1009+1)^2-1009^2=1010^2-1009^2$

De même : $2021=2\times1010+1$ est impair $2021=(1010+1)^2-1010^2=1011^2-1010^2$

4) On a : $n^2+n+7=n^2+n+6+1=n(n+1)+2\times3+1$

On a : $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$n^2+n+7=2k+2\times3+1=2(k+3)+1=2k'+1$ avec : $k'=k+3\in\mathbb{N}$

Donc n^2+n+7 est un nombre impair.

5) On a : $n^2+n+7=2k+2\times3+1$ avec $n(n+1)=2k$ c'est-à-dire : $\frac{n(n+1)}{2}=k$

Donc : $n^2+n+7=2(k+3)+1$

Et d'après 2) on a : $n^2+n+7=(k+3+1)^2-(k+3)^2$

Donc : $n^2+n+7=(k+4)^2-(k+3)^2$ avec : $k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice5 : (**) Soit $n\in\mathbb{N}$ Montrer que : $7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539$ est divisible par 1078

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}$

$7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539=7^{3n}\times7^2\times11^{3n}\times11^1\times5^{3n}+539$

$7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539=539\times7^{3n}\times11^{3n}\times5^{3n}+539$

$7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539=539\left(7^{3n}\times11^{3n}\times5^{3n}+1\right)$

Or : $7^{3n}\times11^{3n}\times5^{3n}$ est un nombre impair car le produit de nombres impairs

Donc : $7^{3n}\times11^{3n}\times5^{3n}+1$ est pair

Donc : $7^{3n}\times11^{3n}\times5^{3n}+1=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539=539\times2k=1078k$

Par suite : $7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539$ est divisible par 1078

Exercice6 : (***) Soit n un entier naturel :

1) Ecrire le nombre : n^4+4 sous la forme de différence de deux carrés parfaits

2) Déduire que le nombre n^4+4 n'est pas un nombre premier pour tout n entier naturel

Correction : 1) On a : $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-(2n)^2$

2) On a : $n^4+4=\left(n^2+2\right)^2-(2n)^2=\left(n^2+2-2n\right)\left(n^2+2+2n\right)$

Donc : le nombre n^4+4 n'est pas un nombre premier pour tout n entier naturel car il admet au moins

Deux diviseurs qui sont : n^2+2n+2 et n^2-2n+2 pour tout n entier naturel

Exercice7 : (***) Un collectionneur possède 432 timbres Marocains et 384 timbres étrangers.

Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres Marocains et étrangers.

a) Quel nombre maximal de lots peut-il réaliser ?

b) Quel est le nombre total de timbres par lot ?

Correction : 1) a)$432 = 2^4 \times 3^3$ et $384 = 2^7 \times 3$

PGCD (432, 384) $= 2^4 \times 3 = 48$ (on ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant).

Si on souhaite réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres Marocains et étrangers alors le nombre maximal de lots est le plus grand diviseur de 432 et 384

Alors on cherche le PGCD de 432 et 384 car ce nombre doit être un diviseur à la fois de 432 et 384

Or : PGCD (432, 384) = 48

Donc : le nombre maximal de lots à réaliser est 48 lots

b) Le nombre total de timbres Marocains par lot est : $432 \div 48 = 9$

Le nombre total de timbres étrangers par lot est : $384 \div 48 = 8$

Exercice8 : (***) On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe ?

La longueur du côté doit être comprise entre 3 et 4 m.

Correction : la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe est un multiple commun de 24 et 15 et la longueur du côté doit être comprise entre 3 et 4 m.

$24 = 2^3 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$

PPCM (24, 15) $= 2^3 \times 3 \times 5 = 120$ cm

(On prend tous les facteurs premiers qui apparaissent et on les affecte le plus grand exposant).

Mais La longueur du côté doit être comprise entre 3 et 4 m.

On doit prendre un multiple de 120 cm entre 300 et 400 cm et Puisque $120 \times 3 = 360\text{cm}$

Donc : La longueur du côté doit être : **360** cm

Exercice9 : (***) Soit : $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 6$ On pose : $F = \frac{n+9}{n-6}$

1) Déterminer dans les cas suivants la forme irréductible de fraction F

$n = 9$; $n = 25$; $n = 46$

2) Quelles sont les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles la fraction $F = \frac{n+9}{n-6}$ Représente un entier naturel ?

Correction : 1) si $n = 9$ alors : $F = \frac{9+9}{9-6} = \frac{18}{3} = 6$

Si $n = 25$ alors : $F = \frac{25+9}{25-6} = \frac{34}{19}$ et c'est la forme irréductible de fraction F Car : 34 et 19 sont premiers entre eux

Si $n = 46$ alors : $F = \frac{46+9}{46-6} = \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$ et c'est la forme irréductible de fraction F

Car : 11 et 8 sont premiers entre eux

2)On constate que $n + 9 = (n-6) + 15$ donc : $F = \frac{n+9}{n-6} = \frac{(n-6)+15}{n-6} = \frac{n-6}{n-6} + \frac{15}{n-6} = 1 + \frac{15}{n-6}$

La fraction $F = \frac{n+9}{n-6}$ Représente un entier naturel si $n-6$ divise 15,

Les diviseurs de 15 sont 1 ; 3 ; 5 ; 15

Il faut que $n - 6 \in \{1;3;5;15\}$ ce qui entraine que $n \in \{7;9;11;21\}$

Inversement on vérifie que si $n \in \{7;9;11;21\}$ alors La fraction F Représente un entier naturel

Conclusion : la fraction F représente un entier naturel pour les valeurs de l'entier n : $7;9;11;21$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien