Correction de la série N°2 : Arithmétique dans IN

Exercice01 : (*)
Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 1344 et en déduire le nombre de diviseurs de 1344

Correction : Technique (1) : $1344 = 2^6 \times 3^1 \times 7^1$
Le nombre de diviseurs de 1344 est : $(6+1) \times (1+1) \times (1+1) = 7\times2\times2=28$

Technique (1)

1344	**2**
672	**2**
336	**2**
168	**2**
84	**2**
42	**2**
21	**3**
7	**7**
1	

Exercice02 : (*) Déterminer tous les diviseurs communs à 375 et 2070
Correction : Méthode1 : Les diviseurs de 375 sont :1, 3, 5, 15, 25, 75,125 et 375
Les diviseurs de 2070 sont :1,2,3,5,6,9,15,18,23,30,45,46,69,90,115,138,230,414,690, 345, 1035, 2070
Les diviseurs communs à 375 et 2070 sont donc : 1, 3 ,5, 15.
Méthode2 : les diviseurs communs à 375 et 2070 sont aussi les diviseurs de leur PGCD.
On a : $375 = 3\times 5^3$; $2070 = 2\times 3^2 \times 5 \times 23$
On applique la règle suivante pour calculer le PGCD :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PGCD (375 ; 2070) $=3\times 5=15$
Et les diviseurs de 15 sont : 1, 3 ,5, 15.
Qui sont aussi les diviseurs communs de 375 et 2070

Exercice03 : (**) Déterminer le chiffre x pour que le nombre : $95x2x31x$ Soit divisible par 3 et un nombre impair (Déterminer tous les nombres possibles)
Correction : On a $0 \le x \le 9$ le nombre : $95x2x31x$ est impair donc : $x \in \{1;3;5;7;9\}$
Le nombre : $95x2x31x$ est divisible par 3 ssi : $9+5+x+2+x+3+1+x=3k$ cad un multiple de 3
Donc : $20+3x=3k$
Donc : en donnant a x les valeurs $\{1;3;5;7;9\}$ on trouve que $x=5$ donc le nombre est : 95525315

Exercice04 : (*) 1) Décomposer les deux nombres 612 et 1530 en produit de facteurs premiers.
2) En déduire le : PGCD et le PPMC des nombres 612 et 1530
3) a) Déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{612}{1530}$ b) Déduire la somme suivante : $\frac{7}{612}+\frac{3}{1530}$
4) Simplifier la racine carrée suivant : $\sqrt{612\times1530}$ et l'écrire sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers

Correction :

- On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
- On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

1) $612=2^2\times3^2\times17$ et $1530=2^1\times3^2\times5^1\times17$
2)a) On applique la règle suivante pour calculer le PGCD (612 ;1520) :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : $PGCD(1530;612)=2^1\times3^2\times17=306$
b) Pour calculer le PPMC des nombres 612 et 1530 on a deux méthodes :
Methode1 : Ecrire le produit de tous les facteurs premiers présents dans l'une ou dans l'autre de ces deux décompositions et élever ces facteurs à leur plus grande puissance
Donc : $PPCM(612;1530)=2^2\times3^2\times5^1\times17^1=3060$
Methode2 : On a : $PGCD(612;1530)\times PPCM(612;1530)=612\times1530$
Donc : $PPCM(612;1530)=\frac{612\times1530}{PGCD(612;1530)}=3060$

2)a) Méthode 1 : $\frac{612}{1530}=\frac{2^2\times3^2\times17}{2^1\times3^2\times5^1\times17}=\frac{2}{5}$ Méthode 2 : $\frac{612}{1530}=\frac{612\div306}{1530\div306}=\frac{2}{5}$

Remarque : le $PGCD(2;5)=1$

b) Calcul de : $\frac{7}{612}+\frac{3}{1530}$ Il faut mettre les fractions au même dénominateur :

Le $PPCM(612;1530)=3060$ est par définition le plus petit multiple commun de ces nombres :

$3060\div612=5$ et $3060\div1530=2$

$\frac{7}{612}+\frac{3}{1530}=\frac{7\times5}{612\times5}+\frac{3\times2}{1530\times2}=\frac{35}{3060}+\frac{6}{3060}$ Donc : $\frac{7}{612}+\frac{3}{1530}=\frac{35+6}{3060}=\frac{41}{3060}$

Remarque : le $PGCD(41;3060)=1$ en effet : on peut utiliser Algorithme d'Euclide qui est une autre méthode pour déterminer le PGDC :

3060 = 74 × 41 + 26

41 = 1 × 26 + 15

26 = 1 × 15 + 11

15 = 1 × 11 + 4

11 = 2 × 4 + 3

4 = 1 × 3 + 1

3 = 3 × 1 + 0

Le **PGDC** est le dernier reste non nul : donc $PGCD(41;3060)=1$

4) $\sqrt{612\times1530}=\sqrt{2^1\times3^2\times5\times2^2\times3^2\times17^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{17^2}$

$\sqrt{612\times1530}=\sqrt{2}\times3\times\sqrt{5}\times2\times3\times17=306\times\sqrt{10}$

Exercice05 : (*) Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? justifier votre réponse ?

1 ; 1075 ; 1061 ; 801020103 ; 2017 ;2021

Correction : 1)1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

2)1075 n'est pas premier car 7 divise 1075

3) Est ce que 1061 est premier ? on utilise une technique :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2\le1061$

Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;29 ;31 Car : $31^2=961$ et $37^2=1396$

Et aucun ne divise 1061 Donc 1061 est premier

4) 667 n'est pas premier car 23 divise 667 ($667=23\times29$)

5) 801020103 n'est pas premier car la somme des chiffres est un multiple de 3 donc 3 divise 801020103

5) Est ce que 2019 est premier ? on utilise une technique :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2\le2019$.

Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;29 ;31 ;37 ;41 ;43 Car : $43^2=1849$ et $47^2=2209$

Et aucun ne divise 2017 Donc 2017 est premier

4) 2021 n'est pas premier car 43 divise 2021

Exercice06 : (**) Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}$; $b=3\times10^{n+1}+4\times10^n$

1) Montrer que : a est un multiple de 11 et que b un multiple de 17

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b

3) En déduire $a\wedge b$ et $a\vee b$

Correction : 1) $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}=10^{2n}\times10^3-10^{2n}\times10^1=10^{2n}\times\left(10^3-10\right)$

$a=10^{2n}\times(990)=10^{2n}\times99\times10=3\times33\times10^{2n}\times10k$

$a=3^2\times11\times10^{2n}\times10=3^2\times11\times10^{2n+1}=11\times k$ avec $k=3^2\times10^{2n+1}$

Donc a est un multiple de 11

On a : $b=3\times10^{n+1}+4\times10^n=3\times10^n\times10^1+4\times10^n=10^n(30+4)=10^n\times34=10^n\times2\times17$

$b=17\times2\times10^n=17\times k$ avec : $k=2\times10^n$

Donc b un multiple de 17

2)Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b

On a trouvé que : $a=3^2\times11\times10^{2n+1}$ donc : $a=3^2\times11\times(2\times5)^{2n+1}$

Donc : $a=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times11$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b=17\times2\times10^n$ donc : $b=17\times2\times10^n=17\times2\times(2\times5)^n$

Donc : $b=17\times2\times2^n\times5^n=2^{n+1}\times5^n\times17$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

3) Déduction de : $a\wedge b$ et $a\vee b$

On a : $a=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times11$ et $b=2^{n+1}\times5^n\times17$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $a\wedge b=2^{2n+1}\times5^n$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $a\vee b=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times17\times11=2^{2n+1}\times5^{2n+1}\times693$

Exercice07 : (***) 1) Montrer que le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair

2) Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

a) 2023^2+2022^2 b) $2n^2+7$ c) $2022n+4m+2021$ d) $n^2+2021n+2023$ e) n^2+8n

Correction : Un nombre pair s'écrit sous la forme 2k, avec k entier.

Un nombre impair s'écrit sous la forme 2k+1, avec k entier.

1) Soit $n\in\mathbb{N}$ (un entier naturel quelconque)

$n\times(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs. Exemple : 2×3 ou 3×4 ou 100×101 ...

On va monter que : $n\times(n+1)$ est un nombre pair.

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas en effet :

1ére cas : Si n est pair alors il existe un entier

Naturel k tel que : $n=2k$ par suite : $n\times(n+1)=2k\times(2k+1)=2\left[k\times(2k+1)\right]=2k'$ avec

$k'=k\times(2k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair.

2ére cas : Si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n=2k+1$

Par suite : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+1+1)$

Donc : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+2)=2(2k+1)\times(k+1)$

Donc : $n\times(n+1)=2k'$ avec $k'=(2k+1)\times(k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

Par conséquent : $n\times(n+1)$ est un nombre pair pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) a) 2023^2+2022^2 : 2022^2 est paire car le carré d'un nombre pair.

2023^2 est impair car le carré d'un nombre impair.

2023^2+2022^2 C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair.

b) $2n^2+7=2n^2+6+1=2(n^2+3)+1=2\times k+1$ avec $k=n^2+3\in\mathbb{N}$

Et par suite : $2n^2+7$ est un nombre impair.

c) $2022n+4m+2021=2022n+4m+2020+1=2(1011n+2m+1010)=2k+1$

Avec : $k=1011n+2m+1010\in\mathbb{N}$.

Donc : $2022n+4m+2021$ est un nombre impair.

d)On a : $n^2+2021n+2023=n^2+n+2020n+2022+1=n(n+1)+2(1010n+1011)+1$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2+2021n+2023=2k+2(1010n+1011)+1$

Donc : $n^2+2021n+2023=2(k+1010n+1011)+1=2k'+1$ avec $k'=k+1010n+1011$

Par suite : $n^2+2021n+2023$ est un nombre impair.

e) Etude de la parité de $n^2+2024n$:

1ére cas : <u>si n pair.</u>

$n^2=n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $2024n=2\times(1012n)=2\times k$ est pair

On a : $n^2+2024n$ c'est la somme de deux nombres pairs donc : $n^2+2024n$ est pair.

2ére cas : <u>si n impair.</u>

$n^2=n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $2024n=2\times(1012n)=2\times k$ est pair

On a : $n^2+2024n$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : $n^2+2024n$ est impair.

Exercice08 : (***) Soit n est un nombre entier naturel impair

1)Vérifier que n^2-1 est un multiple de 8 dans cas suivants : $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$

2)Montrer que n^2-1 est un multiple de 4 si n est impair

3)Montrer que n^2-1 est un multiple de 8 si n est impair

4)En déduire que : n^4-1 est un multiple de 16 si n est impair

5) Montrer que si n et m sont impairs alors : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Correction : 1) si $n=1$ alors $1^2-1=0$ est un multiple de 8

Si $n=3$ alors $3^2-1=8$ est un multiple de 8

Si $n=5$ alors $5^2-1=24$ est un multiple de 8

Si $n=7$ alors $7^2-1=48$ est un multiple de 8

2) n est impair donc : $n=2k+1$

Donc : $n^2-1=(2k+1)^2-1=(2k)^2+2\times 2k\times 1+(1)^2-1$

$n^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4(k^2+k)=4\times k'$ Avec $k'=k^2+k$

Donc : n^2-1 est un multiple de 4

3)On a trouvé : $n^2-1=4k(k+1)$

Or $k(k+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair donc : $k(k+1)=2k'$

Donc : $n^2-1=8k'$

Donc : n^2-1 est un multiple de 8

4) $n^4-1=(n^2)^2-1^2=(n^2-1)(n^2+1)$

Et on a trouvé que : $n^2-1=4k'$

Et on a : $n^2+1=4k^2+4k+1+1=4k^2+4k+2=4(k^2+k+1)=4\times k''$

Donc : $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(4k')(4k'')=16k'''$

Donc : n^4-1 est un multiple de 16

5) on a trouvé que : n^2-1 est un multiple de8

Donc : $n^2-1=8k$ donc : $n^2=8k+1$

De même on a : : m^2-1 est un multiple de8

Donc : $m^2-1=8k'$ donc : $m^2=8k'+1$

$n^2+m^2+6=8k+1+8k'+1+6=8k+8k'+8=8(k+k'+1)=8k''$

Donc : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Exercice09 : (***) Soit n un entier naturel :

1) Factoriser le nombre : n^3+1

2) Déduire que le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier.

Correction : 1) On a : $n^3+m^3=(n+m)(n^2-n\times m+m^2)$

Donc : $n^3+1=n^3+1^3=(n+1)(n^2-n+1)$

2) $27000000001=27\times 10^9+1=3^3\times 10^9+1=3^3\times 10^9+1=(3\times 10^3)^3+1=(3\times 10^3+1)\left((3\times 10^3)^2-3\times 10^3+1\right)$

Donc : $27000000001 = 3001\left(3000^2 - 3000 + 1\right) = 3001 \times 8997001$

Donc : le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier car il admet plus que de deux diviseurs qui sont : 3001 et 8997001

Exercice10 : (***) Un pâtissier dispose de moules à gâteaux en forme de plaques de 154 cm de longueur et 132 cm de largeur. Il doit découper, dans ces plaques, des carrés de génoise tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.

a) Quelle est, en cm, la mesure du côté d'un gâteau ?

b) Combien de gâteaux le pâtissier pourra-t-il découper dans une plaque ?

Correction : 1) a) Si on souhaite découper, dans ces plaques, des carrés de génoise tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte. La solution et de prendre le plus grand diviseur commun de 154 et 132

Alors on cherche le PGCD de 154 et 132 car ce nombre doit être un diviseur à la fois de 154 et 132

$154 = 2 \times 7 \times 11$ et $132 = 2^2 \times 3 \times 11$

PGCD (154, 132) $= 2 \times 11 = 22$ (on ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant).

Donc : la mesure du côté d'un gâteau est 22 cm

b) *Methode1 :*Le nombre total de gâteaux :

- Sur la longueur : $154 \div 22 = 7$
- Sur la largeur : $132 \div 22 = 6$

Le nombre total de gâteaux à découper dans une plaque est : $7 \times 6 = 42$ gâteaux

Methode1 : la surface de la plaque est : $154 \times 132 = 20328\,\text{cm}^2$

La surface d'un gâteau est : $22 \times 22 = 484\,\text{cm}^2$

Le nombre total de gâteaux à découper dans une plaque est : $\frac{20328}{484} = 42$ gâteaux

Exercice11 : (***) Quels sont les entiers naturels non nuls x et y qui vérifient la relation : $x^2 = y^2 + 2021$.

Correction : $x^2 = y^2 + 2021$ Équivaut à : $x^2 - y^2 = 2021$

Équivaut à : $(x-y)(x+y) = 2021$.

Équivaut à : $(x-y)(x+y) = 43 \times 47 = 1 \times 2021$ avec 43 et 47 des nombres premiers

Et on a : $x - y \le x + y$

Donc on a : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2021 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y = 43 \\ x + y = 47 \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} x = 1011 \\ y = 1010 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 45 \\ y = 2 \end{cases}$

Exercice12 : (***) Soient n et a deux entiers naturels non nuls. On pose: $S = (a+1) + (a+2) + \dots (a+n)$

1) Montrer que : $1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) Montrer que n divise le nombre $S - \frac{n(n+1)}{2}$

3) Montrer que si n est impair alors S est divisible par n .

Correction :1) Montrons que : $1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

On pose : $A = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$ ①

On a aussi $A = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$ ②

Donc : ① + ② donne : $2A = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n\ fois}$

Donc : $2A = n(n+1)$ par suite : $A = \frac{n(n+1)}{2}$

2) Montrons que n divise le nombre $S - \frac{n(n+1)}{2}$

$$S - \frac{n(n+1)}{2} = (a+1)+(a+2)+....(a+n) - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S - \frac{n(n+1)}{2} = \underbrace{a+a+...a}_{n\ fois} + (1+2+3+...+n) - \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc : $S - \frac{n(n+1)}{2} = na + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = na$

Donc : n divise le nombre $S - \frac{n(n+1)}{2}$

3) Montrons que si n est impair alors S est divisible par n :
Supposons que : n est impair alors : $n = 2k+1$ Avec : $k \in \mathbb{N}$

On a : $S - \frac{n(n+1)}{2} = na$ donc : $S = na + \frac{n(n+1)}{2}$ par suite : $S = (2k+1)a + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2}$

Donc : $S = (2k+1)a + (2k+1)(k+1)$

Donc : $S = (2k+1)(a+k+1) = n(a+k+1) = n \times k'$ Avec : $k' \in \mathbb{N}$

Donc : S est divisible par n

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien