Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°1 : Arithmétique dans IN

Exercice1 : (*) Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : ∈ ; ∉ ; ⊂ ; ⊄

$-4...\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}...\mathbb{N}$; $\sqrt{2}...\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}...\mathbb{N}$; $-\frac{15}{3}...\mathbb{N}$; $12-32...\mathbb{N}$; $\sqrt{25}...\mathbb{N}$; $2,12...\mathbb{N}$; $0...\mathbb{N}^*$; $-\frac{\sqrt{100}}{3}...\mathbb{N}$

$\pi...\mathbb{N}$; $\{1;2;7\}...\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}...\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*...\mathbb{N}$; $\{0\}...\mathbb{N}$; $10...\{1;8;9;11;12\}$; $5.....\varnothing$

Correction : $-4 \notin \mathbb{N}$; $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$; $\frac{8}{2} \in \mathbb{N}$; $-\frac{15}{3} \notin \mathbb{N}$; $12-32 \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{25} \in \mathbb{N}$; $2,12 \notin \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}^*$; $\frac{\sqrt{100}}{2} \in \mathbb{N}$;

$\pi \notin \mathbb{N}$; $\{1;2;7\} \subset \mathbb{N}$; $\{4;-2;12\} \not\subset \mathbb{N}$; $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$; $\{0\} \subset \mathbb{N}$; $10 \notin \{1;8;9;11;12\}$; $5 \notin \varnothing$

Exercice2 : 1) Déterminer les multiples de 9 comprises entre : 23 et 59

2) Déterminer les diviseurs de 56

3) Existe-t-il un nombre multiple de 12 et diviseur de 80

Correction : 1) Soit a et b deux entiers. On dit que : a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que a = k b.
On dit alors que b est un diviseur de a.

Les multiples de 9 s'écrivent sous la forme : $9k$ avec : $k \in \mathbb{N}$

On a donc : $23 \le 9k \le 59$ Signifie que : $23/9 \le k \le 59/9$

Signifie que : $2.5 \le k \le 6.5$ donc : $k \in \{3;4;5;6\}$

Par suite : les multiples de 9 comprises entrent : 23 et 59 sont : 9×3 ; 9×4 ; 9×5 ; 9×6

C'est à dire : 27 ; 36 :45 ; 54

2) Déterminons les diviseurs de 56

$56 = 8\times 7 = 2^3 \times 7^1$

Il y a : (3 +1) ×(1 +1) = 4 ×2 = 8diviseurs

Les diviseurs de 56 sont : 1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56

3)s'il Existait un nombre n multiple de 12 c'est-à-dire s'il existait un nombre n tel que 12 divise n et n divise 80

Par transitivité 12 divise 80 ce qui est impossible

Résultat : il n'existe aucun un nombre multiple de 12 et diviseur de 80

Exercice3 : (*)1) a) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 72

b) Déterminer le nombre de diviseurs de 72.

c) Déterminer les diviseurs de 72

2) a) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 60

b) Déterminer le nombre de diviseurs de 60.

c) Déterminer les diviseurs de 60

3) a) Déterminer tous les diviseurs communs à 72 et 60

b) Déterminer le : PGCD (72 ; 60)

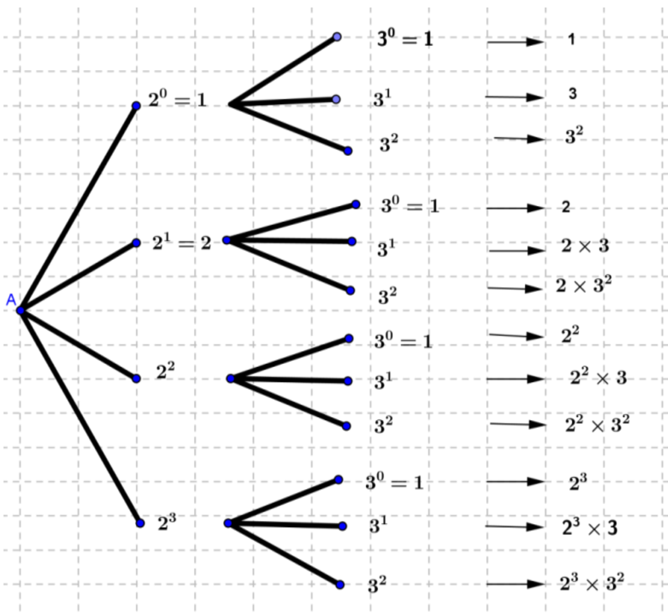
4) a) Déterminer trois multiples communs à 72 et 60

b) Déterminer le : PPCM (72 ; 60)

Correction : 1) a) La décomposition en facteurs premiers de l'entier naturel 72 est : 72 = $2^3 \times 3^2$

b) Il y a : (3 +1) ×(2 +1) = 4 × 3 = 12 diviseurs

c) <u>Methode1 :</u> On peut s'aider d'un arbre pour lister ces diviseurs :



Donc : les diviseurs de 72 sont : 1 ; 3 ; 9 ; 2 ; 6 ; 18 ; 4 ; 12 ; 36 ; 8 ; 24 ; 72

<u>Methode2 :</u> On utilise les critères de divisibilités : On a : $\sqrt{72} = 8,48...$ On prend : 9

Nous déterminons les nombres inferieurs ou égales à 9 qui sont des diviseurs de 72

Qui sont : **1 ; 2 ; 4 ; 3 ; 6; 9** après on divise 72 par 1 on trouve 72 et on divise 72 par 2 on trouve 36
Et on divise 72 par 3 on trouve 24 ……
Nous obtenons ainsi les diviseurs suivants de : 1 ; 3 ; 9 ; 2 ; 6 ; 18 ; 4 ; 12 ; 36 ; 8 ; 24 ; 72
2)a) La décomposition en facteurs premiers de l'entier naturel 60 est : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
b) Il y a : $(2 +1) \times (1 +1) = 3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs
c) les diviseurs de 60 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 2 ; 6 ; 10 ; 4 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60
3) a) Les diviseurs communs à 72 et 60 sont : 1 ; 2 ; 3 ;4 ; 6 ; 12
b) Le PGCD (72 ; 60) : est le plus grand diviseur commun de 72 et 60
Le PGCD :« Le plus grand diviseur commun des deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PGCD (72 ; 60) $=2^2 \times 3$
Remarque : les diviseurs de12 sont aussi les diviseurs communs de 72 et 60
4) a) Déterminer deux multiples communs à 72 et 60
Les multiples de 60 sont : 0 ; 60 ; 120 ; 180 ; 240 ; 300 ; 360 ; …
Les multiples de 72 sont : 0 ; 72 ; 144 ; 216 ; 288 ; 360 ; 432 ; …
Deux multiples communs à 72 et 60 sont : 0 ; 360
b) le : PPCM (72 ; 60) = 360

Exercice4 : Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$

1) 375^2+648^2 2) $\left(25^3+24^3\right)^7$ 3) $2n+16$ 4) $10n+5$ 5) $n^2+11n+17$ 6) $n^2+7n+20$

7) $n^2+13n+17$ 8) $5n^2+7n+4$.

Correction : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

1) 375^2+648^2 : 648^2 est paire car le carré d'un nombre pair.
375^2 est impair car le carré d'un nombre impair.
375^2+648^2 C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair.

2) 24^3 est paire car le produit de nombres pairs et 25^3 est impair car le produit de nombres impairs
Donc : 25^3+24^3 c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair
Et par suite : $\left(25^3+24^3\right)^7$ est impair car le produit de nombres impairs.

3) $2n+16=2(n+8)=2\times k$ avec $k=n+8\in\mathbb{N}$
Et par suite : $2n+16$ est un nombre pair.

4) $10n+5=2(5n+2)+1=2\times k+1$ avec $k=5n+2\in\mathbb{N}$
Par suite : $10n+5$ est un nombre impair.

5) On a : $n^2+11n+17=n^2+n+10n+16+1$ $n^2+11n+17=n(n+1)+2(5n+8)+1$
Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.
Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$
Donc : $n^2+11n+17=2k+2(5n+8)+1$
Donc : $n^2+11n+17=2(k+5n+8)+1=2k'+1$ Avec $k'=k+5n+8$
Par suite : $n^2+11n+17$ est un nombre impair.

6) On a: $n^2+7n+20=n^2+n+6n+20=n(n+1)+2(3n+10)$
Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.
$n^2+7n+20=2k+2(3n+10)=2(k+3n+10)=2k'$ Avec $k'=k+3n+10$
Donc $n^2+7n+20$ est un nombre pair.

7) Etude de la parité de $n^2+13n+17$:
$n^2+13n+17=n^2+n+12n+16+1$ $n^2+13n+17=n(n+1)+2(6n+8)+1$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Par suite : $n^2+13n+17=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$ avec : $k''=k+k'\in\mathbb{N}$

Donc $n^2+13n+17$ est un nombre impair

8) Etude de la parité de $5n^2+7n+4$: $5n^2+7n+4=5n^2+5n+2n+4=5n(n+1)+2(n+2)$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Par suite : $5n^2+7n+4=5\times 2k+2k'=2(5k+k')=2k''$ Avec : $k'=n+2\in\mathbb{N}$ et $k''=5k+k'\in\mathbb{N}$

Donc $5n^2+7n+4$ est un nombre pair

Exercice5 : (***) Soit n est un nombre entier naturel impair

1) Vérifier que : n^2-1 est un multiple de 8 dans cas suivants : $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$

2) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 4

3) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 8

4) En déduire que : n^4-1 est un multiple de 16

5) Montrer que si n et m sont impairs alors : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Correction : **1)** si $n=1$ alors $1^2-1=0$ est un multiple de 8

Si $n=3$ alors : $3^2-1=8$ est un multiple de 8

Si $n=5$ alors $5^2-1=24$ est un multiple de 8

Si $n=7$ alors : $7^2-1=48$ est un multiple de 8

2) n *est impair* donc : $n=2k+1$.

Donc : $n^2-1=(2k+1)^2-1=(2k)^2+2\times 2k\times 1+(1)^2-1$

$n^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4(k^2+k)=4\times k'$ *Avec* $k'=k^2+k\in\mathbb{N}$

Donc : n^2-1 est un multiple de 4.

3) On a trouvé : $n^2-1=4k(k+1)$ *or* $k(k+1)$ *est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.*

Donc : $k(k+1)=2k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2-1=8k'$ et par suite : n^2-1 est un multiple de 8.

4) $n^4-1=(n^2)^2-1^2=(n^2-1)(n^2+1)$.

Et on a trouvé que : $n^2-1=4k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$.

Et on a : $n^2+1=4k^2+4k+1+1=4k^2+4k+2$

$n^2+1=4(k^2+k+1)=4\times k''$

Donc : $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(4k')(4k'')=16k'''$ avec : $k'''=k'k''\in\mathbb{N}$

Donc : n^4-1 est un multiple de 16.

5) On a trouvé que : n^2-1 est un multiple de 8

Donc : $n^2-1=8k$ c'est-à-dire : $n^2=8k+1$ de même on a : m^2-1 est un multiple de 8

Donc : $m^2-1=8k'$ c'est-à-dire : $m^2=8k'+1$

$n^2+m^2+6=8k+1+8k'+1+6=8k+8k'+8$

$n^2+m^2+6=8(k+k'+1)=8k''$ Avec : $k''=k+k'+1\in\mathbb{N}$

Par conséquent : n^2+m^2+6 est un multiple de 8.

Exercice6 : (**) Soient : $n\in\mathbb{N}^*$ tel que : $n-1$ soit un multiple de 3.

Montrer que : n^2-1 est un entier naturel multiple de 3.

Correction : On a : $n-1$ soit un multiple de 3

Donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que : $n-1=3k$ c'est-à-dire : $n=3k+1$

Donc : $n^2-1=(3k+1)^2-1=9k^2+6k+1-1=9k^2+6k$ $n^2-1=3(3k^2+2k)=3k'$ avec : $k'=3k^2+2k\in\mathbb{N}$

Par suite : n^2-1 est un entier naturel multiple de 3

Exercice7 : (*) Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse.

0 ; 17 ; 21 ; 41 ; 87 ; 105 ; 239 ; 2787 ; 191 ;1004001 et 259

Correction : Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs qui sont : 1 et lui-même.
1) 0 n'est pas premier car tous les nombres divise 0
17 est premier car admet exactement deux diviseurs
21 n'est pas premier car 3 divise 21 ($21=7\times3$)
41 est premier car admet exactement deux diviseurs
87 n'est pas premier car 3 divise 87 ($87=29\times3$)
105 n'est pas premier car 5 divise 105 ($105=5\times21$)
Question : Est-ce que 239 est premier ?
On utilise la règle suivante : « Pour montrer qu'un nombre est premier il suffit de vérifier qu'il n'est pas divisible par aucun nombre premier p inferieur à sa racine carré »
Donc on cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 239$
Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 239 et par conséquent : 239 est premier
2787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 24 qui est multiple de 3 donc 3 divise 2787
3) Est ce que 191 est premier ? On utilise la règle : On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 191$
Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 191. Par conséquent : 191 est premier
1004001 n'est pas premier car la somme des chiffres est 6 qui est un multiple de 3 donc 3 divise 1004001
259 n'est pas premier car $259=7\times37$ c'est à dire 7 divise 259.

Exercice8 : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 4$ on pose : $A=7^{n+2}-7^n$; $B=2^{n+3}+2^n$
1) Décomposer A en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 12
2) Décomposer B en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 9
3) En déduire $A\wedge B$ et $A\vee B$

Correction : 1) $A=7^{n+2}-7^n=7^n\times7^2-7^n=7^n\times\left(7^2-1\right)=7^n\times48=2^4\times3^1\times7^n$
La décomposition de A en produit de facteurs premiers est : $A=2^4\times3^1\times7^n$
$A=2^4\times3^1\times7^n=2^2\times3\times2^2\times7^n=12\times\left(2^2\times7^n\right)=12\times k$ avec $k=2^2\times7^n$
Donc : A est divisible par 12
2) $B=2^{n+3}+2^n=2^n\times2^3+2^n=2^n\times\left(2^3+1\right)=2^n\times9=2^n\times3^2$
La décomposition de B en produit de facteurs premiers est : $B=2^n\times3^2$
$B=2^n\times9=9\times k$ Avec $k=2^n$ Donc : B est divisible par 9
3) Déduction de : $A\wedge B$ et $A\vee B$.
On a trouvé : $A=2^4\times3^1\times7^n$ et $B=2^n\times3^2$
On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de A et B
Donc : $A\wedge B=2^4\times3^1=48$ car $n\geq4$
On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs premiers communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de A et B
Donc : $A\vee B=2^n\times3^2\times7^n=9\times14^n$

Exercice9 : Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :
$x^2-y^2=17$ **Correction :1)** $x^2-y^2=17$ Équivaut a $(x+y)(x-y)=17$
Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 17
On a : $17=1\times17$ donc les diviseurs de 17 sont : 1 et 17
Par suite : $\begin{cases}x-y=1\\x+y=17\end{cases}$ car $x-y\prec x+y$ Donc : $\begin{cases}2x=18\\x+y=17\end{cases}$ **cad :** $\begin{cases}x=9\\x+y=17\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x=9\\y=17-9=8\end{cases}$
Par suite : le couple $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation est : $(9;8)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien