http://www.xriadiat.com **DL6/K** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**
- ✓ **Géométrie dans l'espace**

Exercice01 : Soit ABC un triangle

On associe à chaque point M du segment $[BC]$ Le point M' tel que M le milieu du segment $[AM']$

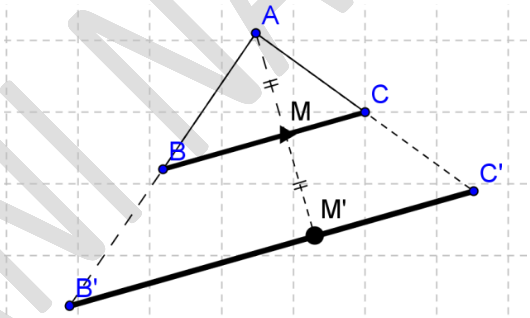
1) Montrer qu'il existe une homothétie h tel que : $h(M)=M'$ pour tous point du segment $[BC]$

2) En déduire l'ensemble (E) des points M' lorsque M varie sur le segment $[BC]$

Solution : 1) On a M le milieu du segment $[AM']$ donc :

$\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}$

C'est-à-dire : M' est l'image du point M par l'homothétie h de centre A et de rapport : $k=2$



2)Si le point M varie sur Le segment $[BC]$ alors son image M' varie sur l'image du segment $[BC]$ par l'homothétie h de centre A et de rapport : $k=2$

C'est-à-dire : M' varie sur le segment $[B'C']$ avec :

$h(B)=B'$ et $h(C)=C'$

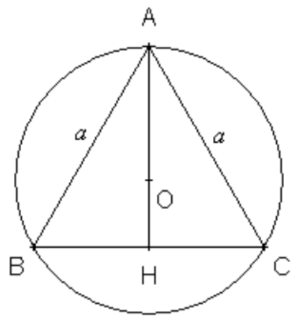
($\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AC}$)

Donc l'ensemble (E) des points M' lorsque M varie sur le segment $[BC]$ est le segment $[B'C']$

Exercice02 : Soit un triangle équilatéral ABC de côté a et H est le projeté orthogonal de A sur (BC) et O le centre du cercle circonscrit à ABC.

Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ d) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$



Solution :a) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, l'angle BAC mesure $\frac{\pi}{3}$ radians

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos BAC=a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=a^2\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

b) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$

1ère méthode : On « réarrange » l'écriture des vecteurs avant de calculer le produit scalaire :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\left(-\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ se calcule comme celui ci-dessus :

Ainsi : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\|\overrightarrow{CA}\|\times\|\overrightarrow{CB}\|\times\cos ACB=a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=a^2\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\frac{a^2}{2}$

2ème méthode : On utilise la relation de Chasles, et la distributivité du produit scalaire, pour écrire :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AC^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AC^2 + \frac{a^2}{2} = -a^2 + \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{2}$

c) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

1ère méthode :H est le projeté orthogonal de B sur (AH)

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}^2 = AH^2$

On utilise un résultat bien connu qui dit que la hauteur AH du triangle équilatéral mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AH^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$

2ème méthode :On calcule directement : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AH}\right\| \times \cos BAH$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également bissectrice de l'angle BAC de sorte que l'angle BAH mesure $\frac{\pi}{6}$ radians.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a^2$ On retrouve le même résultat !

d) Calculons : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

1ère méthode : Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également médiane issue de A. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle, de sorte que : $OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ et de même pour la longueur OB.

Enfin, l'angle AOB mesure $\frac{2\pi}{3}$ radians

On calcule donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \times \cos AOB = \frac{\sqrt{3}}{3}a \times \frac{\sqrt{3}}{3}a \times \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}a^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}a^2$

2ème méthode :H est le projeté orthogonal de B sur (OA), de sorte que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires de sens opposé, on aura :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également médiane issue de A. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle, de sorte que : $OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ et $OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

On retrouve ainsi : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = -\frac{\sqrt{3}}{3}a \times \frac{\sqrt{3}}{6}a = \boxed{-\frac{1}{6}a^2}$

Exercice03 : On considère un rectangle $ABCD$ tel que : $AB = 4$ et $AD = 3$

Et soit E un point tel que : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1) a) Calculer : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) En déduire : $\left\|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right\|$

2) Calculer : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$

3) a) Calculer : $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}$ b) En déduire : $\cos\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}\right)$

c) En utilisant la calculatrice : déduire une mesure de l'angle : $\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}\right)$

Solution : 1) a) Le point D est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AD)

Par conséquent : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}^2=AD^2=9$

b) On sait d'après un théorème que : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$

Dans le triangle ADC rectangle en D on applique le théorème de Pythagore.

$AC^2=AD^2+DC^2=9+16=25$

Par conséquent : $9=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-AC^2-AD^2\right)$

On en déduit que : $18=\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-9-25$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2=52$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{52}$

2) Calculons : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$

Le point B est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AE)

Donc : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=AE\times AB$ car : $\overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et de même sens

Donc : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times4=24$

3) a) Calculons : $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$

$$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+0+0+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AD}^2=\frac{3}{4}BA^2+AD^2=\frac{3}{4}\times4^2+3^2=\boxed{21}$$

b) On a : $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=EC\times ED\times\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)$

Dans le triangle EBC rectangle en B on applique le théorème de Pythagore :

$EC^2=EB^2+BC^2=4+9=13$

Donc : $EC=\sqrt{13}$

Dans le triangle AED rectangle en A on applique le théorème de Pythagore :

$ED^2=EA^2+AD^2=36+9=45$ Donc : $ED=\sqrt{45}$

On a donc : $21=\sqrt{13}\times\sqrt{45}\times\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)$

Donc : $\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)=\frac{21}{\sqrt{13}\times\sqrt{45}}=\frac{21}{\sqrt{13\times45}}=\frac{21}{3\sqrt{13\times5}}=\frac{7}{\sqrt{65}}=\frac{7\sqrt{65}}{65}$

c) On a : $\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)=\frac{7\sqrt{65}}{65}$ la calculatrice donne : $\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)\simeq29,7^\circ$

Exercice04 : Soit ABC un triangle tel que et $AB=3$ et $BC=4\sqrt{3}$ et $ABC=\frac{\pi}{6}$

I le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer AC .

2) Montrer que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$

3) Montrer que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4) Calculer : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle AIB

Solution : 1) Calculons AC

D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$AC^2=BA^2+BC^2-2BA\times BC\cos ABC$

$AC^2 = 9 + 48 - 24 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $AC^2 = 21$

Par suite : $AC = \sqrt{21}$.

b) Montrons que : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 18$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos ABC = 3 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$

3) Montrons que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Nous avons : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$

Puisque I est le milieu du segment $[BC]$

Nous obtenons : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

4) Calculons $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ Donc : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 9 - \frac{1}{2} \times 18 = 0$

On a : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ Nous en déduisons que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (AB)

Et par conséquent le triangle AIB est rectangle en A

Exercice05 : Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C) = \frac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$.

I un point tel que : $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E \in (\Delta)$

1) Construire une figure.

2) Montrer que : $AB = 8$ et calculer BC.

3) Calculer : $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$ 4) Montrer que : $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = 48$

5) Calculer : AJ

Solution :1) 2) On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$

Donc : $AB \times AB \times \cos \hat{A} = 16$ Donc : $AB^2 \times \frac{1}{4} = 16$

Donc : c'est-à-dire : $AB^2 = 64$ c'est-à-dire : $AB = 8$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$

Donc : $BC^2 = 64 + 64 - 2 \times 64 \times \frac{1}{4}$

Donc : $BC^2 = 96$ c'est-à-dire : $BC = \sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2 = \frac{3}{4}BA^2 = \frac{3}{4}BA^2 = \frac{3}{4} \times 64 = 48$

4) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{BI}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = 48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$

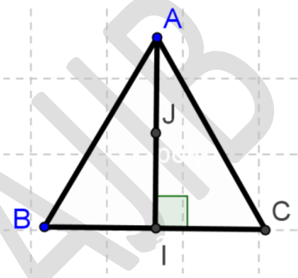
Donc : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

Donc : $128=2AJ^2+48$ c'est-à-dire : $40=AJ^2$

Donc : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Exercice06 : Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $AB=3cm$

I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AI]$



1) Calculer : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}$ et la distance AI

2) Montrer que : pour tout point M du plan on a :

$$2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$$

3) Déterminer : l'ensemble (C) des points M du plan tel que :

$$2MA^2+MB^2+MC^2=18$$

Solution : a) Calcul de : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}$

ABC Un triangle équilatéral et I le milieu du segment $[BC]$ donc : $(BC)\perp(IJ)$

Et donc : I est la projection orthogonale de J sur segment (BC)

Donc : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IC}^2=-IC^2=-2^2=-4$

b) Calcul de : AI

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Nous obtenons donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{1}{2}BC^2\right)$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(3^2+3^2-\frac{1}{2}3^2\right)=\frac{3}{4}\times 3^2=\frac{27}{4}$ Par suite : $AI=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}cm$

1) Montrons que : pour tout point M du plan on a : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$

Soit M un point dans le plan et I le milieu du segment $[BC]$

Donc d'après le théorème de la médiane dans MBC on a : $MB^2+MC^2=2MI^2+\frac{1}{2}BC^2$

$2MA^2+MB^2+MC^2=2MA^2+2MI^2+\frac{1}{2}BC^2$ donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=2\left(MA^2+MI^2\right)+\frac{1}{2}BC^2$

D'autre part on a : J le milieu du segment $[AI]$ donc d'après le théorème de la médiane dans MAI

On a : $MA^2+MI^2=2MJ^2+\frac{1}{2}AI^2$ donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=2\left(2MJ^2+\frac{1}{2}AI^2\right)+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{27}{4}+\frac{9}{2}$ car $AI=\frac{3\sqrt{3}}{2}cm$

Donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$

2) Déterminons l'ensemble (C) ? $M \in (C)$ Signifie que : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$

Signifie que $4MJ^2 + \frac{45}{4} = 18$ c'est-à-dire : $4MJ^2 = 18 - \frac{45}{4}$ qui signifie que $MJ^2 = \frac{27}{16}$

C'est-à-dire : $MJ = \sqrt{\frac{27}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ Par suite l'ensemble (C) est le cercle de centre J et de rayon

$R = \frac{3\sqrt{3}}{4} cm$

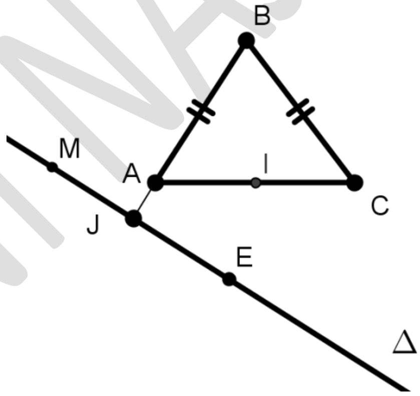
Exercice07 : Soit ABC un triangle isocèle en B tel que : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$ et $\cos(A\hat{B}C) = \frac{1}{3}$ et J un point tel que : $\overrightarrow{BJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ et I le milieu du segment $[AC]$ et soit la droite (Δ) qui passe par J et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E \in (\Delta)$ et soit $M \in (\Delta)$

1) Montrer que : $AB = 6$ et calculer AC

2) Calculer : $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = 45$

4) Calculer : BI



Solution : 1) On a : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$

Donc : $\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\hat{B} = 12$

Donc : $BA \times BC \times \cos\hat{B} = 12$

C'est-à-dire : $AB^2 \times \frac{1}{3} = 12$

Donc : $AB^2 = 36$ c'est-à-dire : $AB = 6$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

On a : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B$

Donc : $AC^2 = 36 + 36 - 2 \times 36 \times \frac{1}{3}$

Donc : $AC^2 = 54$ c'est-à-dire : $AC = \sqrt{54}$

3) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BA}^2 = \frac{5}{2} \times 36 = 45$

4) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{BJ}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA} = 45$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2$

Donc : $6^2 + 6^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}\sqrt{54}^2$

Donc : $72 = 2BI^2 + 27$ c'est-à-dire : $BI^2 = \frac{45}{2}$

Par suite : $BI = \sqrt{\frac{45}{2}}$

Exercice08 : Soit ABC un triangle tel que $AB=1$ Et $BC=AC=\sqrt{2}$
I Le milieu du segment $[AB]$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

1) Calculer CI
2) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$
4) En déduire que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$

Et en déduire $\cos BAC$.

5) Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du triangle BAD
6) Soit le point M tel que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
a) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$
b) Montrer que $(MD)\perp(AC)$

Solution :1) a) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $BC+AC^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$

Donc : $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{7}{4}=CI^2$

Donc : $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$
C'est-à-dire : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
Donc : $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
Signifie que : $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$
3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

On a : I le milieu du segment $[AB]$ et ABC isocèle en C donc : $(IC)\perp(AB)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$
Par suite : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AI}\right\|\cos 0=AB\times AI=AB\times\frac{AB}{2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Calcul de $\cos BAC$: On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$

Donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

C'est-à-dire : $\cos\hat{A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ donc : $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5) On a : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$
Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Signifie que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$
Donc: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2$

$$=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$$

Donc : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ par suite BAD est un triangle rectangle en A

6)a) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ssi $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ ssi $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

Calcul de : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ؟؟؟

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

6) $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}==-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}$

$$=-\frac{7}{4}\cdot2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc : $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$ par suite : $(MD)\perp(AC)$

Exercice09 : Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que : $AB=AD$ et $CD=CB$

1) Montrer que : les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

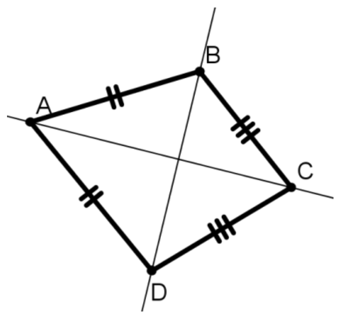
2) En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

3) Nous prenons dans cette question : $AB=AD=3cm$ et $\left(\overline{BAD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

a) Calculer : BD

b) En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1) Montrons que : $(AC)\perp(BD)$?



Puisque : $AB=AD$ et $CD=CB$ alors les points A et C appartiennent à la médiatrice (AC) du segment $[BD]$

Donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

2) En déduisons que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}$

Or $(AC)\perp(BD)$ donc : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

3) a) Calculons : BD ?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABD nous obtenons : $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\cos BAD$

Donc : $BD^2=18-18\cos\frac{\pi}{4}=9\left(2-\sqrt{2}\right)$

D'où : $BD=\sqrt{9\left(2-\sqrt{2}\right)}=3\sqrt{2-\sqrt{2}}$

b) En déduisons $\sin\frac{\pi}{8}$: soit I le point d'intersection des deux diagonales $[BD]$ et $[AC]$

Nous avons ABD est un triangle isocèle et (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$

Donc : (AC) est la bissectrice de l'angle BAD

Donc : $\left(\overrightarrow{BAI}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

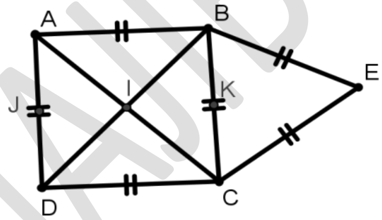
D'autre part : le triangle ABI est rectangle en I

Donc : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{BI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{3} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice10 : Soit $ABCD$ un carré de centre I et a la longueur de son côté ; on construit à l'extérieur un triangle équilatérale BCE (Voir figure)

1) Soit J le milieu du segment $[AD]$ et K le milieu du segment $[BC]$

Calculer $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}$ en fonction de a



2) a) Montrer que : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

b) En déduire que : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

3) En utilisant les résultats de la question

Montrer que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

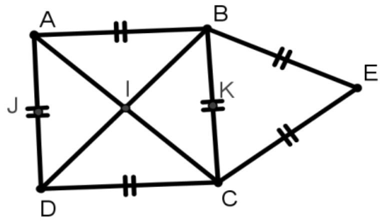
Et en déduire : $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\tan\frac{7\pi}{12}$

Solution : 1) Calcul de $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}$ en fonction de a

On a : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ}\bullet\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{KC}$

Et puisque : $(IJ)\perp(KC)$ alors : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{KC} = 0$



Et puisque : I le milieu de $[JK]$ alors : $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ}\bullet\left(-\overrightarrow{IJ}\right) = -\overrightarrow{IJ}^2 = -IJ^2$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC} = -\frac{a^2}{4}$ car $IJ = \frac{a}{2}$

2) a) Montrons que : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

• Montrons d'abord que les points : I ; K et E sont alignés ?

On a : $EC = EB$ et $IC = IB$ car $ABCD$ un carré

Et on a: $KC = KB$ car K le milieu du segment $[BC]$

Donc : les points : I ; K et E appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$

Donc : I ; K et E sont alignés

• On a : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE} = \left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KB}\right)\bullet\overrightarrow{IE}$ Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}$

Et puisque : $(KB)\perp(IE)$ alors : $\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE} = 0$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE} = IK \times IE \cos\left(\overrightarrow{IK};\overrightarrow{IE}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE} = IK \times IE\cos(0) = IK \times IE$

Car $\cos(0)=1$ Or on a : $IK = \frac{a}{2}$

et $IE = IK + KE = IK + \sqrt{CE^2 - CK^2}$

Donc : $IE = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})}{2}a$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE} = \frac{(1+\sqrt{3})}{4}a \times a = \frac{(1+\sqrt{3})}{4}a^2$

b) Déduction que : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

On a : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BI}\bullet\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IE}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BI}^2 + \overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{IE} = BI^2 + \overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = BI^2 - \overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = KI^2 + KB^2 - \overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}$ car $BI^2 = KI^2 + KB^2$

(le triangle IKB est rectangle en K)

($KI = KB = \frac{a}{2}$)

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(1+\sqrt{3})}{4}a^2 \quad \frac{a}{2}$

Par suite : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

3) Montrons que : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

On a : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = BI \times BE\cos\left(IBE\right)$

Donc : $\cos\left(IBE\right) = \frac{\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}}{BI \times BE}$

Et on a : $IBE = IBC + CBE = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

Et on a $BI = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ et $BE = a$ et $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

Donc : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}a^2} = \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Déduction de : $\sin\frac{7\pi}{12}$?

On a : $\sin^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} = 1$ donc : $\sin^2\frac{7\pi}{12} = 1 - \cos^2\frac{7\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = \frac{8+2\sqrt{12}}{16}$ Donc :

$\sin^2\frac{7\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

Par suite : $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $\sin\frac{7\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or : $0\prec\frac{7\pi}{12}\prec\pi$ donc : $\sin\frac{7\pi}{12}\geq 0$

Par suite : $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Calcul de : $\tan\frac{7\pi}{12}$?

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{\sqrt{2}^2-\sqrt{6}^2}=\frac{8+2\sqrt{12}}{-4}=-2-\sqrt{3}$$

Exercice 11 : $SABCD$ une pyramide sa base est un parallélogramme $ABCD$
Soient I et J les milieux respectifs des segments $[SB]$ et $[SC]$

1) Montrer que : $(AD)\parallel(IJ)$

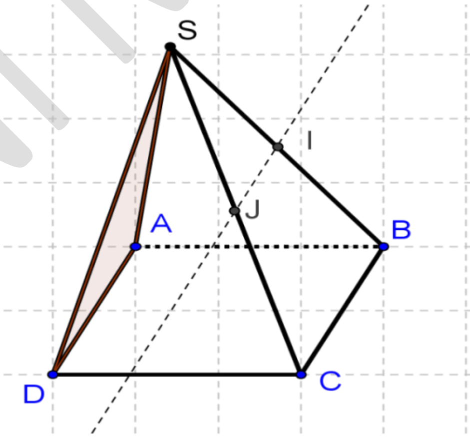
2) Montrer que : $(IJ)\parallel(ADS)$

Solution : Dans le triangle SBC on a I le milieu du segment $[SB]$ et J le milieu du segment $[SC]$

Donc $(IJ)\parallel(BC)$ (1) et puisque $ABCD$ est un parallélogramme alors $(BC)\parallel(AD)$) (2)

De (1) et (2) on déduit que $(AD)\parallel(IJ)$

2) On a : $A\in(ADS)$ et $D\in(ADS)$ donc : $(AD)\subset(ADS)$ (4)
(d'après une axiome d'incidence)
Et puisque : $(AD)\parallel(IJ)$ alors : $(IJ)\parallel(ADS)$



Exercice 12 : Soit $ABCDEFGH$ un cube de l'espace

1) Déterminer et représenter la droite (Δ) d'intersection des plans (ACH) et (BDF)

2) Soient I et J les centres des carrés $EFGH$ et $ABFE$ respectivement
Déterminer la droite (Δ') d'intersection des plans (IJE) et (ADH)

Solution : 1) On a : $A\in(ACH)$ et $A\notin(BDF)$

Donc $(ACH)\neq(BDF)$ (1)

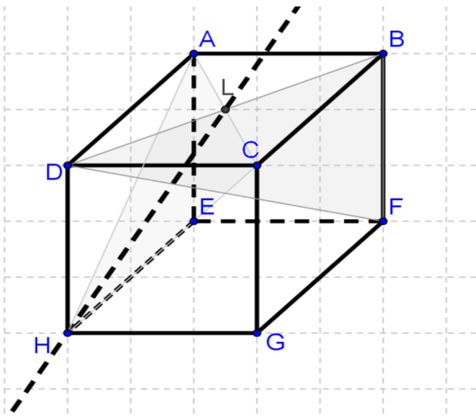
On a : $H\in(ACH)$

Puisque : $DH=BF$ et $(DH)\parallel(BF)$

Alors : $BDHF$ est un parallélogramme
Par suite les points $B;D;H;F$ sont coplanaires et donc : $H\in(BDF)$

Et par suite : $H\in(BDF)\cap(ACH)$ (2)

Soit L Le point intersection des droites
(AC) et (BD) donc : $L\in(ACH)$ et $L\in(BDF)$

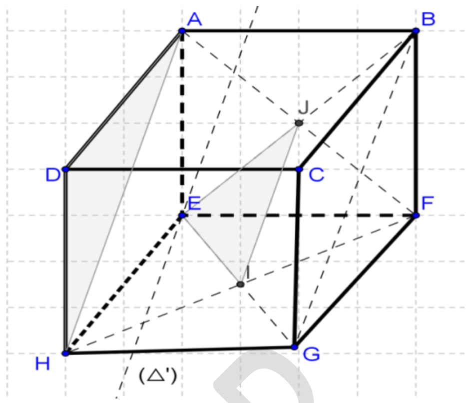


Donc $L\in(BDF)\cap(ACH)$ (3)

Par suite : de (1) et (2) et (3) en déduit que : $(BDF)\cap(ACH)=(HL)$

2) On a : $I\in(IJE)$ et $I\notin(ADH)$

Donc $(IJE)\neq(ADH)$



On a : $E \in (IJE)$ et $E \in (ADH)$ car: $(DH) \parallel (AE)$

Donc : $E \in (ADH) \cap (IJE)$

Par suite : $(ADH) \cap (IJE) = (\Delta')$

On considère le triangle AHF : on a I et J les milieux respectifs des segments $[HF]$ et $[AF]$

Donc : $(IJ) \parallel (AH)$

Donc : on a : $(IJ) \parallel (AH)$ et $(IJ) \subset (IJE)$ et $(AH) \subset (ADH)$ et $(ADH) \cap (IJE) = (\Delta')$

Donc : (Δ') est la droite qui passe par E et parallèle a (IJ) et (AH)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien