

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

Exercice01 : On considère deux points A et B tels que : $AB = 3cm$.

Et nous considérons la translation $t_{\vec{u}}$ qui transforme respectivement les points : A , B , C et D en A' , B' , C' et D' et sachant que : $\vec{CD} = -2\vec{AB}$
Calculer : $C'D'$.

Solution : On a : $\vec{CD} = -2\vec{AB}$ et la translation $t_{\vec{u}}$ transforme respectivement les points :

A , B , C et D en A' , B' , C' et D' et puisque : la translation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

$$\text{Alors : } \vec{C'D'} = -2\vec{A'B'}$$

$$\text{Donc : } C'D' = 2A'B'$$

$$\text{D'autre part puisque : } t_{\vec{AB}}(A) = A' \text{ et } t_{\vec{AB}}(B) = B'$$

$$\text{Alors d'après la propriété caractéristique de la translation on a : } A'B' = AB = 3cm$$

$$\text{Par suite : } C'D' = 2 \times 3cm = 6cm.$$

Exercice02 : ABC un triangle tel que : $\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et m un paramètre réel

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$$\vec{MM'} = 2m\vec{MA} + \left(m + \frac{3}{2}\right)\vec{MB} - 3\left(m + \frac{1}{2}\right)\vec{MC}$$

1) Montrer que : pour tout réel m f est une translation dont trouvera son vecteur

2) Déterminer l'image de la droite (BC) par la translation f et en déduire l'image de la droite (AB) par la translation f

Solution : 1) Montrons que : pour tout réel m f est une translation dont trouvera son vecteur

Soit M un point du plan (P) et M' son image par la transformation f

$$\text{On a : } \vec{MM'} = 2m\vec{MA} + \left(m + \frac{3}{2}\right)\vec{MB} - 3\left(m + \frac{1}{2}\right)\vec{MC}$$

$$\vec{MM'} = 2m\vec{MA} + m\vec{MB} + \frac{3}{2}\vec{MB} - 3m\vec{MC} - \frac{3}{2}\vec{MC}$$

$$\vec{MM'} = 2m\vec{MA} + m\vec{MB} - 3m\vec{MC} + \frac{3}{2}\vec{MB} - \frac{3}{2}\vec{MC}$$

$$\vec{MM'} = m\left(2\vec{MA} + \vec{MA} + \vec{AB} - 3(\vec{MA} + \vec{AC})\right) + \frac{3}{2}(\vec{MB} - \vec{MC})$$

$$\vec{MM'} = m\left(2\vec{MA} + \vec{MA} + \vec{AB} - 3\vec{MA} - 3\vec{AC}\right) + \frac{3}{2}(\vec{CM} + \vec{MB})$$

$$\vec{MM'} = m(\vec{AB} - 3\vec{AC}) + \frac{3}{2}\vec{CB} \text{ et comme : } \vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB} \text{ alors : } 3\vec{AC} = \vec{AB} \text{ c'est-à-dire : } \vec{AB} - 3\vec{AC} = \vec{0}$$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{MM'} = m\vec{0} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\text{On a donc : } \overrightarrow{MM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \text{ c'est-à-dire : } t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}(M) = M'$$

Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

2) Déterminons l'image de la droite (BC) par la translation : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}$

On a : $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc: les points A ; B et C sont alignés et $\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ est un vecteur directeur de (BC)

Alors : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}((BC)) = (BC)$ et puisque : $(AB) = (BC)$ car les points A ; B et C sont alignés

Alors : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}((AB)) = t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}((BC)) = (BC)$

Exercice03 : Déterminer dans les cas suivants le rapport k de l'homothétie h de centre A et qui transforme B en C

$$1) 6\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad 2) \overrightarrow{CA} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} \quad 3) \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Solution: soit $h(A, k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(B) = C$

$$h(B) = C \text{ Equivaut à : } \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

$$1) 6\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ Equivaut à : } \overrightarrow{AC} = \frac{2}{6}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Equivaut à : } \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Equivaut à : } k = \frac{1}{3} \text{ donc } h\left(A, \frac{1}{3}\right) : \text{ le rapport de l'homothétie } h \text{ est : } k = \frac{1}{3}$$

$$2) \overrightarrow{CA} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} \text{ Equivaut à : } \overrightarrow{AC} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Equivaut à : } k = -\frac{5}{6} \text{ donc } h\left(A, -\frac{5}{6}\right) : \text{ le rapport de l'homothétie } h \text{ est : } k = -\frac{5}{6}$$

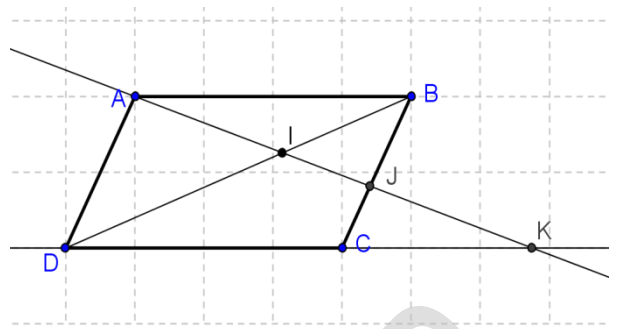
$$3) \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ Equivaut à : } 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Equivaut à : } 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \text{ Equivaut à : } 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \text{ Equivaut à : } 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA}$$

$$\text{Equivaut à : } 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \text{ Equivaut à : } 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} \text{ Equivaut à : } \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Equivaut à : } k = \frac{3}{2} \text{ donc } h\left(A, \frac{3}{2}\right) : \text{ le rapport de l'homothétie } h \text{ est : } k = \frac{3}{2}$$

Exercice04 : Soit $ABCD$ un parallélogramme et I un point fixe qui appartient à $[BD]$ et J le point d'intersection des droites (AI) et (BC) et soit K le point d'intersection des droites (AI) et (CD)



Soit h l'homothétie de centre I et qui transforme B en D

1) Déterminer $h(A)$ et $h(J)$

2) Montrer que : $IA^2 = IJ \times IK$

Solution :1) a) Déterminons $h(A)$?

On a : $h(B) = D$ et puisque l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

Alors : l'image de la droite (AB) est la droite qui passe par D est parallèle à (AB) c'est-à-dire (DC)

Par suite : $h((AB)) = (CD)$

Et on a : $I \in (AI)$ donc : $h((AI)) = (AI)$

Et puisque : $A \in (AI) \cap (AB)$ alors $h(A) \in h((AI)) \cap h((AB))$ c'est-à-dire : $h(A) \in (AI) \cap (CD)$

Et on a : $(AI) \cap (CD) = \{K\}$ Donc : $h(A) = K$

b) Déterminons $h(J)$?

On a : $h((AI)) = (AI)$ et $h(B) = D$ donc : l'image de la droite (BC) est la droite qui passe par D est parallèle à (BC) c'est-à-dire (AD)

Par suite : $h((BC)) = (AD)$

Et puisque : $J \in (BC) \cap (AI)$ alors $h(J) \in h((BC)) \cap h((AI))$ c'est-à-dire : $h(J) \in (AD) \cap (AI)$

Et on a : $(AD) \cap (AI) = \{A\}$ Donc : $h(J) = A$

2) Soit $h(I, k)$: On a : $h(A) = K$ Équivaut à : $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IA}$ donc : $IK = |k| IA$ (1)

Et on a : $h(J) = A$ Équivaut à : $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IJ}$ donc : $IA = |k| IJ$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $\frac{IK}{IA} = \frac{IA}{IJ} = |k|$ et par suite : $IA^2 = IJ \times IK$

Exercice05 : A, B, C trois points du plan tel que B est le milieu du segment $[AC]$

Soit la droite (Δ) qui passe par A et différent de la droite (AB) et non perpendiculaire à (AB)

B' et C' les projections orthogonales respectivement des points B et C sur la droite (Δ)

I le point d'intersection des droites (BC') et $(B'C)$

Soit h l'homothétie de centre I et transforme B en C'

1) Déterminer l'image du point B' par l'homothétie h et rapport k de l'homothétie h

2) a) Déterminer le nombre réel x tel que : $\overrightarrow{BI} = x\overrightarrow{BC'}$

b) Déterminer l'ensemble (E) des points C' lorsque (Δ) varie

c) Déterminer l'ensemble (F) des points I lorsqu'elle varie sur (Δ)

d) Faire une figure sachant que : $AB = 4cm$

Solution : 1) h l'homothétie de centre I et $h(B) = C'$

On a : $h(B) = C'$ donc : $\overrightarrow{IC'} = k\overrightarrow{IB}$

Et puisque : $(BB') \parallel (CC')$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{IB'}$

Donc : $h(B') = C$

Donc : d'après la propriété caractéristique d'une homothétie on a $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{B'B}$

Donc : $CC' = |k|B'B$ par suite : $\frac{CC'}{B'B} = |k|$

On considère le triangle ACC'

On a : B est le milieu du segment $[AC]$ et $(BB') \parallel (CC')$

Donc : B' est le milieu du segment $[AC']$ et $CC' = 2B'B$

Par suite : $\frac{CC'}{B'B} = 2$

Donc : $2 = |k|$ et puisque : $\overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{CC'}$ ont le même sens contraire

Alors : $-2 = k$

2)a) On a : $h(B) = C'$ donc : $\overrightarrow{IC'} = -2\overrightarrow{IB}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC'} = -2\overrightarrow{IB}$

Donc : $3\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{BC'}$ par suite : $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$ donc : $x = -\frac{1}{3}$

2)b) On a : $AC'C$ est un angle droit et A et C deux points fixes

Donc lorsque la droite (Δ) varie le point C' varie sur le cercle (Γ) de diamètre $[AC]$

Mais le point C' est tel que : $C' \neq A$ et $C' \neq C$

Donc l'ensemble (E) des points C' lorsque (Δ) varie est le (Γ) de diamètre $[AC]$ privé des points A et C

C'est-à-dire : $(E) = (\Gamma) - \{A; C\}$

2)c) On a : $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$ donc : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$

C'est-à-dire : I est l'image du point C' par l'homothétie $h'_{\left(B; \frac{1}{3}\right)}$

Donc lorsque le point C' varie sur le cercle (Γ) alors le point I varie sur le cercle (Γ') l'image du cercle (Γ) par l'homothétie $h'_{\left(B; \frac{1}{3}\right)}$ privé des points A'

et I tel que : $h'(A) = A'$

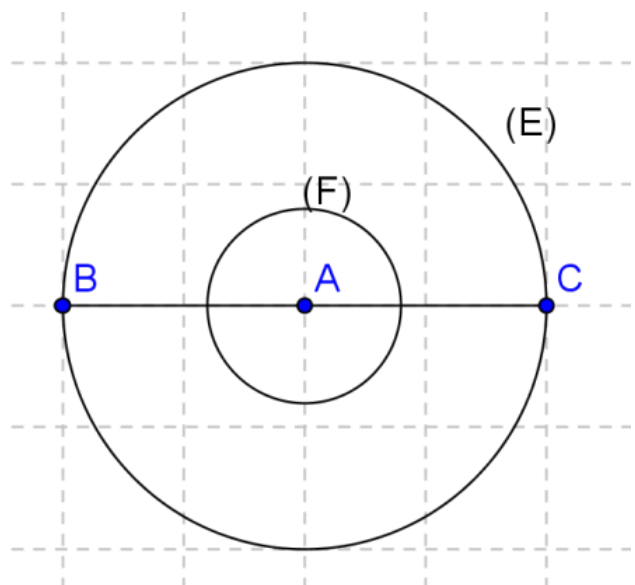
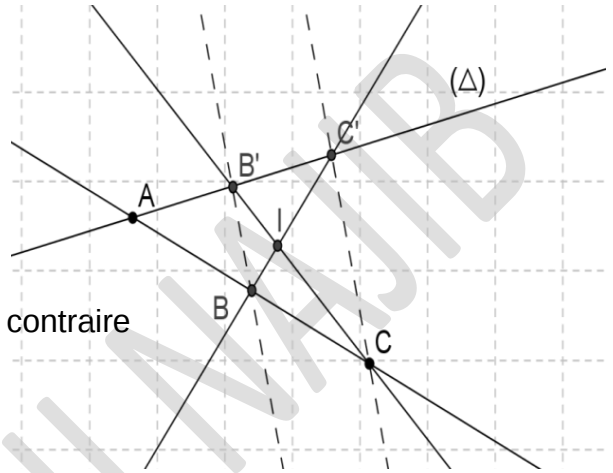
Et on a le rayon du cercle (Γ') est : $r' = \frac{1}{3} \times r$ avec r

le rayon du cercle (Γ)

Le centre du cercle (Γ') est : l'image du centre du cercle (Γ) par l'homothétie $h'_{\left(B; \frac{1}{3}\right)}$

Par suite : $(F) = (\Gamma') - \{A'; I\}$

d) La figure sachant que : $AB = 4\text{cm}$



Exercice06 : Soit HBCD un rectangle : $AB=3cm$; $AD=2cm$; $BC=\sqrt{2}cm$

- 1) Calculer AH 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Solution : 1) Calculons AH : le théorème de Pythagore nous permet d'écrire : $AD^2 = AH^2 + HD^2$

$$D'où AH^2 = AD^2 - HD^2 = 4 - 2 = 2$$

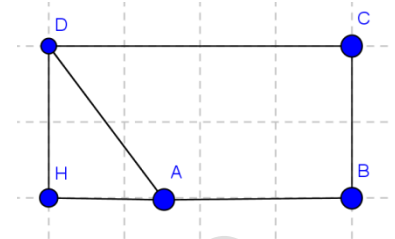
$$\text{Donc : } AH = \sqrt{2}cm$$

- 2) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AH}\| \cos \pi = AB \times AH (-1) = -3\sqrt{2}$$

- 3) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 3^2 = 9$$



Exercice07 : ABCD est un losange dont les diagonales mesurent : $AC=12$ et $BD=6$

Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Solution :

Il est possible ici de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ en utilisant la relation de Chasles et en faisant intervenir le point I : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}$

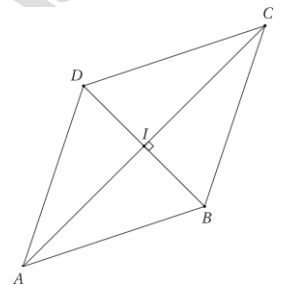
On peut alors calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$$

Comme les vecteurs : $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI}$ est nul ; pour la même raison le produit scalaire $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$ est lui aussi nul.

$$\text{De plus : } \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} ; IB = \frac{1}{2} DB = 3 \text{ et } IC = AI = \frac{1}{2} AC = 6$$

$$\text{Par conséquent : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI}^2 - \overrightarrow{IB}^2 = AI^2 - IB^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$$



Exercice08 : ABCD est un rectangle de centre O tel que $AB=8$ et $AD=5$

- 1) Calculer les produits scalaires suivants : a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

- 2) On désigne par α une mesure de l'angle AOB

Calculer $\cos \alpha$ puis en déduire une valeur approchée par défaut à 1 degré près de α

- 3) H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC). Calculer AK et HK

- 4) a) Donner la valeur exacte de $\tan HDK$

- b) En déduire une valeur approchée à 1 degré près de HDK

Solution : 1) a) Calculons : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$

Le point C se projette orthogonalement en D sur (AD), de sorte que :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = 25$$

- b) Calculons : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$

On « réarrange » le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$ avant de le calculer :

Le point A se projette orthogonalement en D sur (CD), de sorte que :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}^2 = CD^2 = 64$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = 64$$

- c) Calculons : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

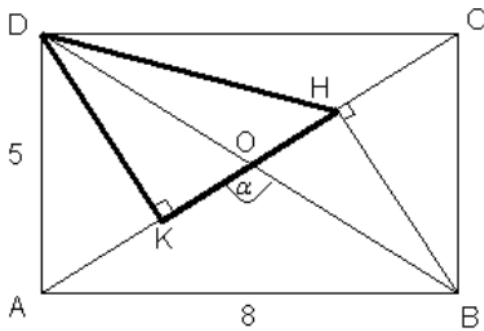
On applique la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire pour calculer :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$$

Le point C se projette orthogonalement en B sur (AB), de sorte que :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 64$$

Ainsi : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -64 + 25 = -39$



2) On calcule de deux manière différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$$\text{D'une part : } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{1}{4} (-\overrightarrow{AC}) \cdot (-\overrightarrow{BD}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

On a déjà calculé : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -39$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{39}{4}$$

$$\text{D'autre part : } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(\angle AOB)$$

D'après le théorème de Pythagore, la diagonale AC du rectangle mesure :

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89}$$

$$\text{Donc : La demi diagonales mesurent : } OA = OB = \frac{1}{2} \sqrt{89}$$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \sqrt{89} \times \frac{1}{2} \sqrt{89} \times \cos(\alpha)$$

$$\text{En égalant les deux expressions du produit scalaire, on obtient : } \frac{89}{4} \times \cos(\alpha) = -\frac{39}{4}$$

$$\text{Donc : } \cos(\alpha) = -\frac{39}{89}$$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle $\angle AOB$ mesure environ 116° (à 1 degré près)

3) On calcule de deux manière différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD}$.

D'une part, le point D se projette orthogonalement en K sur (AO).

Ainsi : $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AK}$, et puisque les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires de même sens,

$$\text{Alors : } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AK} = AO \times AK = \frac{1}{2} \sqrt{89} AK$$

$$\text{D'autre part : } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{25}{2}$$

En égalant les deux expressions du produit scalaire $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$\text{On obtiendra : } \frac{1}{2} \sqrt{89} AK = \frac{25}{2} \text{ qui signifie que : } AK = \frac{25}{\sqrt{89}} = \frac{25\sqrt{89}}{98}$$

$$\text{Par symétrie, on déduit la valeur de } HC = \frac{25\sqrt{89}}{98}$$

$$\text{On calcule alors } HK = AC - (AK + HC) \text{ c'est-à-dire : } HK = \sqrt{89} - 2 \frac{25}{\sqrt{89}} = \frac{89 - 50}{\sqrt{89}} = \frac{39}{\sqrt{89}} = \frac{39\sqrt{89}}{89}$$

$$4) \text{ a) Dans le triangle HDK rectangle en K, on calcule } \tan HDK = \frac{HK}{DK}$$

On calcule la longueur DK en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AKD rectangle

$$\text{en K : } DK^2 = AD^2 - AK^2 = 25 - \left(\frac{25}{\sqrt{89}}\right)^2 = \frac{1600}{89}$$

$$\text{Donc : } DK = \sqrt{\frac{1600}{89}} = \frac{40}{\sqrt{89}} \text{ et on termine de calculer : } \tan HDK = \frac{HK}{DK} = \frac{\frac{39}{\sqrt{89}}}{\frac{40}{\sqrt{89}}} = \frac{39}{40}$$

b) Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle HDK mesure environ 44° (à 1 degré près)

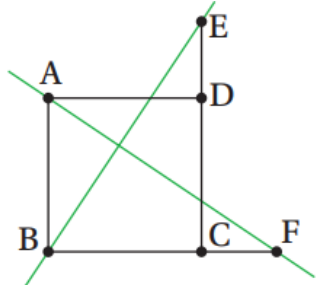
Exercice09 : ABCD est un carré de côté c.

Les points E et F sont définis par : $\vec{CE} = \frac{3}{2}\vec{CD}$ et $\vec{BF} = \frac{3}{2}\vec{BC}$

Montrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires.

Solution :

CONSEILS : Utilisez la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs $\vec{AF}$ et $\vec{BE}$ et les écrire en fonction des vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$, puis calculez leur produit scalaire.



$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{BC} \text{ et } \vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE} = \vec{BC} + \frac{3}{2}\vec{CD}$$

$$\text{Donc : } \vec{AF} \cdot \vec{BE} = \left(\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{BC}\right) \cdot \left(\vec{BC} + \frac{3}{2}\vec{CD}\right) \text{ et, en développant :}$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{BE} = \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \frac{3}{2}\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \frac{3}{2}\vec{BC} \cdot \vec{BC} + \frac{9}{4}\vec{BC} \cdot \vec{CD}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \text{ et } \vec{BC} \cdot \vec{CD} = 0 \text{ car } \vec{BC} \text{ est orthogonal à } \vec{AB} \text{ et } \vec{CD}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -\vec{AB} \cdot \vec{AB} = -AB^2 = -c^2 \text{ et } \vec{BC} \cdot \vec{BC} = BC^2 = c^2$$

$$\text{D'où : } \vec{AF} \cdot \vec{BE} = 0 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{3}{2}c^2 + \frac{9}{4} \times 0 = 0$$

Donc : $\vec{AF}$ et $\vec{BE}$ sont orthogonaux, par suite : (AF) et (BE) sont perpendiculaires.

Exercice10 : Soit un triangle équilatéral ABC de côté 2 et de centre O

1) Calculer : a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ b) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ c) $\vec{CA} \cdot \vec{OB}$

2) Montrer que : $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \vec{CA} \cdot \vec{CO}$

Solution :

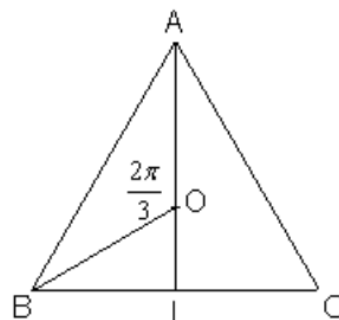
1) a) Calculons : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos BAC = 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

b) Calculons : $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

Puisque le triangle est équilatéral, la médiane [AI] est aussi hauteur

Donc : d'après le théorème de Pythagore : $AI^2 = AB^2 - BI^2$



$$\text{Donc : } AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ et ainsi : } OA = \frac{2}{3} AI = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{On conclut donc que : } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos AOB = OA \times OB \times \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}$$

C) Calculons : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OB}$

On a : O étant le centre de gravité du triangle équilatéral, il est aussi centre du cercle circonscrit au Triangle, donc (BO) est la hauteur issue de B dans le triangle, donc est orthogonale à (AC)

$$\text{Donc : } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

2) Montrons que : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CO}$

En utilisant la relation de Chasles, la distributivité du produit scalaire, et la question précédente, on obtient : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OB}$

Puisque le triangle est équilatéral, la médiane [BO] est aussi hauteur donc : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CO}$$

Exercice11 : A et B sont deux points tels que $AB = 6$. I est le milieu du segment [AB].

On appelle $(\mathcal{E})$. L'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 27$

a) Soit C le symétrique de I par rapport à A. Montrer que C appartient à $(\mathcal{E})$.

b) Montrer que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9$

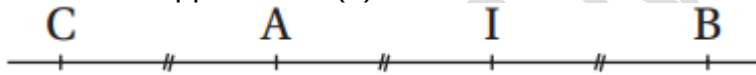
c) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$.

Solution : a) Les vecteurs : $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires de même sens

$$\text{Donc : } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CB \text{ et } CA = 3 \text{ et } CB = 9$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3 \times 9 = 27$$

Par suite C appartient à $(\mathcal{E})$.



b) Montrons que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \text{ car : I est le milieu du segment [AB].}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$$

$$\text{Par suite : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 3^2 = MI^2 - 9$$

c) Déterminons l'ensemble $(\mathcal{E})$.

M appartient à $(\mathcal{E})$ signifie que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 27$

$$\text{Signifie que : } MI^2 - 9 = 27$$

$$\text{Signifie que : } MI^2 = 36$$

$$\text{Signifie que : } MI = 6$$

$(\mathcal{E})$ est donc le cercle de centre I et de rayon 6 (passant par C).

Exercice12 : Soit ABCD un quadrilatère tel que : $AB = AD$ et $CD = CB$

1) Montrer que : les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

2) En déduire que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

3) Nous prenons dans cette question : $AB = AD = 3\text{cm}$ et $(\widehat{BAD}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

a) Calculer : BD

b) En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1) Montrons que : $(AC) \perp (BD)$?

Puisque : $AB = AD$ et $CD = CB$ alors les points A et C appartiennent à la médiatrice (AC)

Du segment $[BD]$

Donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

2) En déduisons que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Or $(AC) \perp (BD)$ donc : $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Par suite : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

3) a) Calculons : BD ?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABD nous obtenons :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos BAD$$

$$BD^2 = 18 - 18 \cos \frac{\pi}{4} = 9(2 - \sqrt{2})$$

$$D'où : BD = \sqrt{9(2 - \sqrt{2})} = 3\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

b) En déduisons $\sin \frac{\pi}{8}$: Soit I le point d'intersection des deux diagonales $[BD]$ et $[AC]$

Nous avons ABD est un triangle isocèle et (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$

Donc : (AC) est la bissectrice de l'angle BAD

$$\text{Donc : } (\overrightarrow{BAI}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

D'autre part : le triangle ABI est rectangle en I

$$\text{Donc : } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{BI}{AB} = \frac{\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{3} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 13 : Soient A et B deux points distincts du plan. I et J deux points tels que :

$$\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0}$$

1) Représenter les points I et J

2) Montrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MJ}$

3) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 2$

Solution : 1) Représentation des points I et J (voir la figure)

$$\bullet \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ Équivaut à : } \overrightarrow{IA} - 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

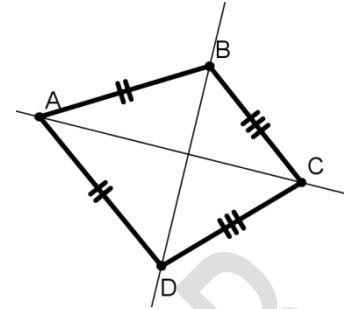
$$\text{Équivaut à : } -2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

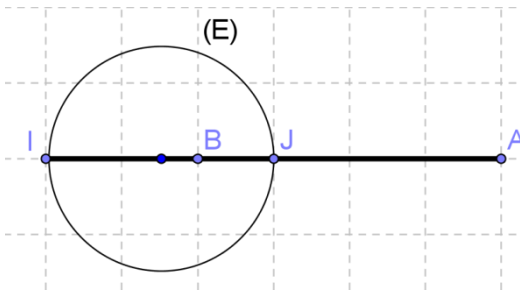
$$\text{Équivaut à : } \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\bullet \overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0} \text{ Équivaut à : } \overrightarrow{JA} + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\text{Équivaut à : } 4\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\text{Équivaut à : } \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$





2)

• Montrons que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MI}$
 $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = -2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{MI}$ car $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MI}$ pour tout point M du plan

• Montrons que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MJ}$
 $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) = 4\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = 4\overrightarrow{MJ}$ car $\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MJ}$ pour tout point M du plan

3) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 3$?

$M \in (E)$ Équivaut à : $\frac{MA}{MB} = 3$

Équivaut à : $MA = 3MB$

Équivaut à : $MA^2 - 9MB^2 = 0$

Équivaut à : $\overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$ Équivaut à : $(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$

Équivaut à : $-2\overrightarrow{MI} \cdot 4\overrightarrow{MJ} = 0$

Équivaut à : $-8\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$

Équivaut à : $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$

Équivaut à : $(MI) \perp (MJ)$

Équivaut à dire que : le point M appartient au cercle de diamètre $[IJ]$

Exercice14 : Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$ et $BC = 14$ et $AC = \sqrt{201}$

Soit I le milieu du segment $[BC]$

1) Montrer que : $AI = 8$

2) Montrer que : $\angle BAI = \frac{\pi}{3}$

3) Soit H un point du segment $[AB]$ tel que $AH = 4$

Montrer que les droites : (AH) et (IH) sont perpendiculaires

Solution : 1) Montrons que : $AI = 8$

On a : Soit I le milieu du segment $[BC]$

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2 = \frac{1}{2} \left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} \right)$

Donc : $AI^2 = \frac{1}{2} (25 + 201 - 98) = 64$ Par suite : $AI = \sqrt{64} = 8$

2) Montrons que : $BAI = \frac{\pi}{3}$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle AIB on a :

$$BI^2 = AB^2 + AI^2 - 2AB \times AI \cos(BAI)$$

Donc : $\cos(BAI) = \frac{AB^2 + AI^2 - BI^2}{2AB \times AI} = \frac{25 + 64 - 49}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$ par suite : $\cos(BAI) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $BAI = \frac{\pi}{3}$

3) Montrons que les droites : (AH) et (IH) sont perpendiculaires

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AI}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AI} = AH^2 - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{IH} = AH^2 - AH \times AI \cos(HAI)$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{IH} = 16 - 4 \times 8 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 16 - 32 \times \frac{1}{2} = 16 - 16 = 0$$

Par suite : Les droites : (AH) et (IH) sont perpendiculaires

Exercice15 : Soit ABC un triangle tel que $AB=6$ et $AC=5$ et $BC=7$

1) Calculer $\cos BAC$

2) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 30$

3) Soit K la projection orthogonale du point A sur la droite (BC)

Calculer : BK

Solution : 1) Calculons $\cos BAC$?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC

On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos BAC$

Donc : $\cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$

Donc : $\cos BAC = \frac{36 + 25 - 49}{60} = \frac{1}{5}$

2) a) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 5 \times \frac{1}{5} = 6$

b) déduction que : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 30$?

On a : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

Donc : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA^2 - 6 = 36 - 6 = 30$

3) Calculons : BK

On a : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 30$ et puisque K est la projection orthogonale du point A sur la droite (BC)

Alors : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BC} = 30$

Exercice16 : $ABCD$ Un tétraèdre tel que : $AC = AD$ et $BC = BD$

Soit I le milieu du segment $[CD]$

1) Montrer que : $(CD) \perp (ABI)$ 2) En déduire que $(AB) \perp (CD)$

Solution : 1) Le triangle ACD est isocèle en A car $AC = AD$

Et I le milieu du segment $[CD]$

Donc : $(AI) \perp (CD)$ (1)

On a aussi BCD est isocèle en B car $BC = BD$ et I le milieu du segment $[CD]$

Donc : $(BI) \perp (CD)$ (2)

ET (BI) et (AI) se coupent dans le plan (ABI) Par suite : $(CD) \perp (ABI)$

2) On a : $(CD) \perp (ABI)$ et $(AB) \subset (ABI)$ donc : $(AB) \perp (CD)$

Exercice17 : Soient dans l'espace le cube $ABCDEFGH$

1) Montrer que : $(AE) \perp (BD)$

2) Montrer que : $(BD) \perp (AEC)$

3) Soit S le centre du carré $EFGH$ avec : $AB = 3cm$

Calculer le volume du cube $ABCDEFGH$ et de la pyramide $SABCD$

4) Montrer que : $(BDF) \perp (AEG)$

Solution : 1) On a : $(AE) \perp (AB)$ car $ABFE$ carré

et $(AE) \perp (AD)$ car $ADHE$ carré

Et on a :

(AB) et (AD) se coupent dans le plan (ABD)

Donc : $(AE) \perp (ABD)$

Et puisque : $(BD) \subset (ABD)$ alors $(AE) \perp (BD)$

2) on a : $(AE) \perp (BD)$ et $(AC) \perp (BD)$

(car $ABCD$ carré)

Et on a : (AE) et (AC) se coupent dans le plan (ACE)

Donc : $(BD) \perp (AEC)$

3) a) Le volume du cube $ABCDEFGH$ est : $AB^3 = 3^3 = 27cm^3$

b) Le volume de la pyramide $SABCD$:

Soit I le centre du carré $ABCD$

Donc (SI) est une hauteur de la pyramide $SABCD$

Donc le volume du pyramide $SABCD$ est : $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times A_{SABCD} \times SI$

Or on a : $SI = AE$ donc : $SI = 3cm$

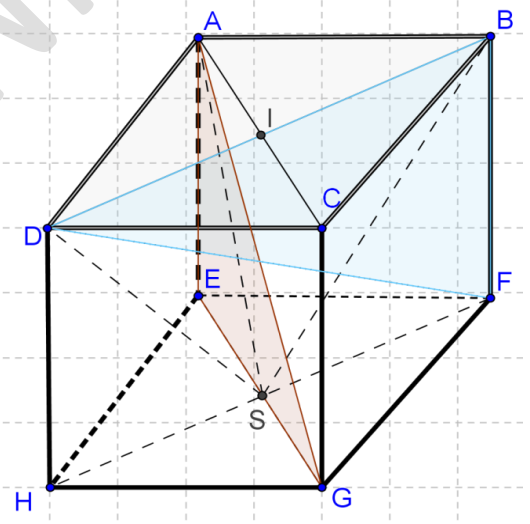
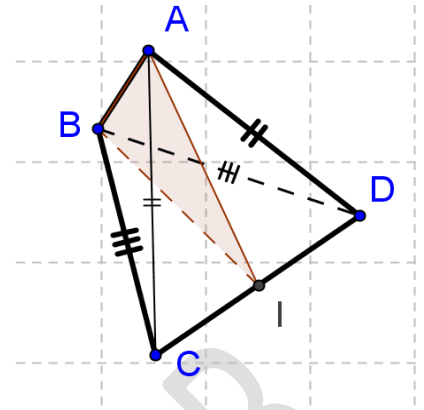
On a : $A_{SABCD} = AB^2 = 9cm^2$ donc : $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 9 \times 3cm^3 = 9cm^3$

4) Montrons que : $(BDF) \perp (AEG)$?

On a : $(AE) \parallel (CG)$ donc : les points $A; E; C; G$ sont coplanaires

Et par suite : $(AEC) = (AEG)$ et on a : $(BD) \subset (BDF)$ et $(BD) \perp (AEG)$

Donc : $(BDF) \perp (AEG)$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

