http://www.xriadiat.com **DL6 /I** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur les leçons suivantes :

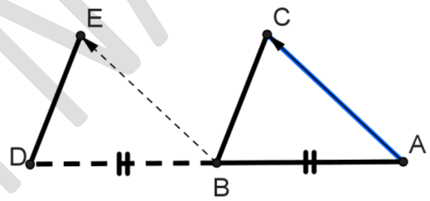
- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**
- ✓ **Géométrie dans l'espace**

Exercice01 : ABC Un triangle et D le symétrique du point A par rapport à B

Et E L'image du point B par la translation $t_{\overrightarrow{AC}}$

1) Faire une figure
2) Montrer que le triangle BDE est l'image du triangle ABC par une translation dont on déterminera son vecteur
3) En déduire que le triangle ABC est l'image du triangle BDE par une translation dont on déterminera son vecteur

Solution :



$t_{\overrightarrow{AC}}(B) = E$ Signifie $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$

Donc : $ABEB$ est un parallélogramme

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ par suite : $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$

ET on a : D le symétrique du point A par rapport à B donc : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$ par suite :_ $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = D$

On a aussi : $ABEB$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ par suite : $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = E$

Par conséquent : $t_{\overrightarrow{AB}}(ABC) = BDE$

3) on a : $t_{\overrightarrow{AB}}(ABC) = BDE$ et par suite : $t_{-\overrightarrow{AB}}(BDE) = ABC$

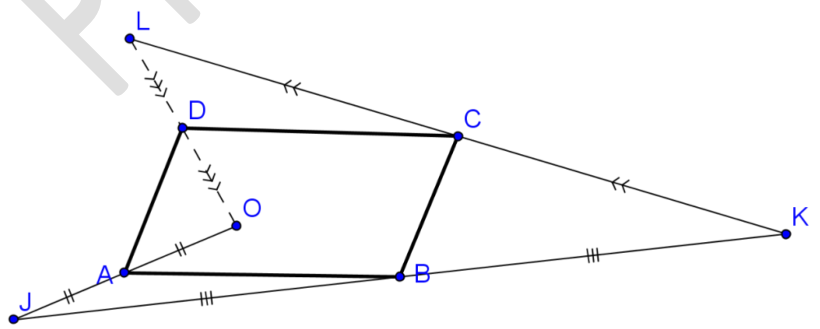
Le triangle ABC est l'image du triangle BDE par une translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$

(Car : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$ *donc* $t_{\overrightarrow{BA}}(B) = A$ *et* $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$ donc : $t_{\overrightarrow{BA}}(D) = B$ *et et* $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BA}$

Donc : $t_{\overrightarrow{BA}}(E) = C$ *)*

Exercice02 : $ABCD$ un parallélogramme et O un point qui n'appartient pas à ces cotés
Et soient : J le symétrique de O par rapport a A
Et K le symétrique de J par rapport a B
Et L le symétrique de K par rapport a C
Montrer que : O est le symétrique de L par rapport a D

Solution :



On a : $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KL}$ donc : $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OK} + 2\overrightarrow{KC}$ car C le milieu du segment $[KL]$

Donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JK}+2\overrightarrow{KC}$
Donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OJ}+2\overrightarrow{BK}+2\overrightarrow{KC}$
Donc : $\overrightarrow{OL}=2\overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\right)$ car A le milieu du segment $[OJ]$

Donc : $\overrightarrow{OL}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{BC}=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\right)$ or $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ car $ABCD$ un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{OL}=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{OD}$

Donc : D est le milieu du segment $[IK]$ et par suite : $S_D(L)=O$

Exercice03 : Soient deux points fixes distincts A et B du plan.
Soit T une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :
$\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$
1) En utilisant la propriété caractéristique d'une translation montrer que T est une translation
2) Déterminer un vecteur de la translation T

Solution :1) Soient M et N deux points du plan nous avons :

$T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$ (1)

$T(N)=N'$ Équivaut à : $\overrightarrow{N'A}-\overrightarrow{N'B}+5\overrightarrow{NN'}=\vec{0}$ (2)

$(2)-(1)$ Donne : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{N'A}+\overrightarrow{N'B}-5\overrightarrow{NN'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AN'}+\overrightarrow{N'B}+\overrightarrow{BM'}+5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$
Équivaut à : $\overrightarrow{M'N'}+\overrightarrow{N'M'}+5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$
Équivaut à : $5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$
Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$
Et d'après la propriété caractéristique d'une translation cela veut dire que T est une translation
2) déterminons un vecteur de la translation T :
$T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $t_{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

Par suite : T est la translation de vecteur $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $T=t_{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}}$

Exercice04 : Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $(AB)\parallel(CD)$ et tels que : $AB=2$ et $CD=4$

1) Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie h qui transforme A en D et transforme B en C
2) Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie h' qui transforme A en C et transforme B en D

Solution :1) Soit $h(E,k)$: on a : $h(A)=D$ donc : $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{EA}$

Donc : les points E ; A et D sont alignés par suite : $E\in(AD)$

Et On a : $h(B)=C$ donc : $\overrightarrow{EC}=k\overrightarrow{EB}$

Donc : les points E ; B et C sont alignés par suite : $E\in(BC)$

Donc le centre de l'homothétie h est le point E d'intersection des droites (AD) et (BC)

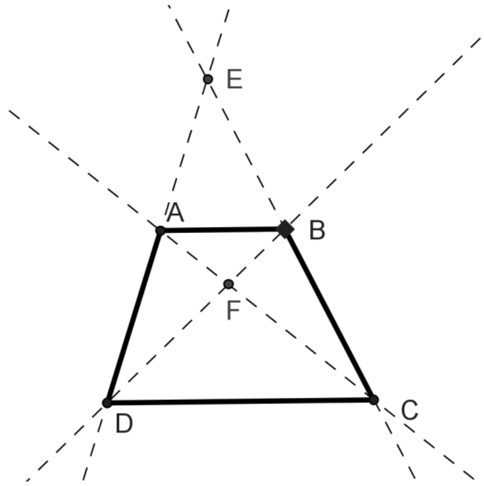
Et puisque : $(AB)\parallel(CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle EDC on a :

$$\frac{ED}{EA}=\frac{EC}{EB}=\frac{DC}{AB}=\frac{4}{2}=2$$

Et puisque : $\overrightarrow{ED} = k\overrightarrow{EA}$ alors : $\left\|\overrightarrow{ED}\right\| = \left\|k\overrightarrow{EA}\right\|$ c'est-à-dire : $ED = |k|EA$ donc : $\dfrac{ED}{EA} = |k|$

Et par suite : $|k| = 2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le même sens alors : $k = 2$

Par conséquent : $h(E,2)$



2) Soit $h'(F,k')$

On a : $h'(A) = C$ donc : $\overrightarrow{FC} = k'\overrightarrow{FA}$

Donc : les points F ; A et C sont alignés par suite : $F \in (AC)$

Et On a : $h'(B) = D$ donc : $\overrightarrow{FD} = k'\overrightarrow{FB}$

Donc : les points F ; B et D sont alignés par suite : $F \in (BD)$

Donc le centre de l'homothétie h' est le point F d'intersection des droites (AC) et (BD)

Et puisque : $(AB) \parallel (CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle EDC on a :

$$\frac{FD}{FA} = \frac{FC}{FB} = \frac{DC}{AB} = \frac{4}{2} = 2$$

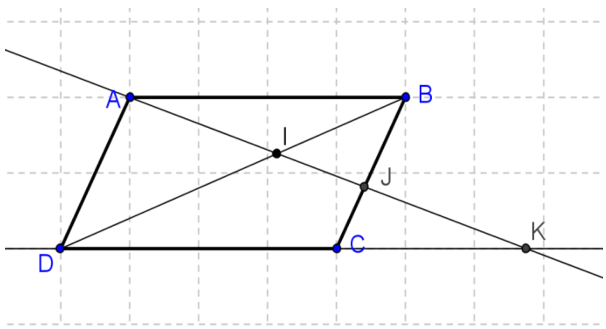
Et puisque : $\overrightarrow{FD} = k'\overrightarrow{FB}$ alors : $\left\|\overrightarrow{FD}\right\| = \left\|k'\overrightarrow{FB}\right\|$ c'est-à-dire : $FD = |k'|FB$ donc : $\dfrac{FD}{FB} = |k'|$

Et par suite : $|k'| = 2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le sens contraire alors : $k' = -2$

Par conséquent : $h'(F,-2)$

Exercice05 : ABC un triangle et D un point tel que :

$\overrightarrow{CD} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et I est le point d'intersection des droites (BD) et (AC) (Voir la figure)



On considère l'homothétie h de centre I qui transforme le point A en C.

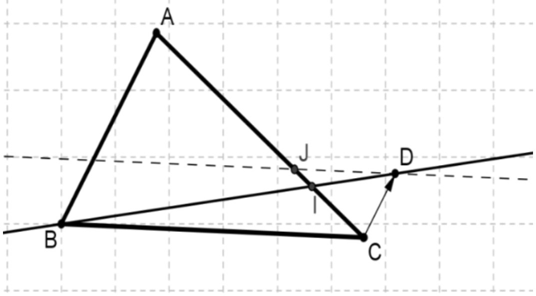
1) a) Déterminer l'image du point B par l'homothétie

b) En déduire le rapport k de l'homothétie h.

2) La droite qui passe par D et parallèle à (BC) coupe la droite (AI) en J.

Montrer que $h(C) = J$.

Solution :



1)a) On a de I qui transforme le point A en C

Et on a : $h((BI))=(BI)$ car $I\in(BI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(A)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle donc l'image de la droite (AB) est la droite qui passe par l'image de A qui est C et parallèle a (AB)

Donc : $h((AB))=(CD)$

On a : $B\in(BI)\cap(AB)$ Donc : $h(B)\in h((BI))\cap h((AB))$

C'est-à-dire : $h(B)\in(BI)\cap(CD)$

Et puisque : $(BI)\cap(CD)=\{D\}$ alors : $h(B)=D$

b) Déduction du rapport k de l'homothétie h ?

On a $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$

Et puisque : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $k=-\frac{1}{4}$

2) On a : $h((CI))=(CI)$ car $I\in(CI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(B)=D$ donc l'image de la droite (BC) est la droite qui passe par l'image de B qui est D et parallèle a (BC)

Donc : $h((BC))=(DJ)$

On a : $C\in(BC)\cap(CI)$

Donc : $h(C)\in h((BC))\cap h((CI))$ c'est-à-dire : $h(C)\in(DJ)\cap(CI)$

Et puisque : $(DJ)\cap(CI)=\{J\}$ alors : $h(C)=J$

Exercice06 : Soit (C) un cercle de centre I est de rayon $r=2$ et A et B des points fixes du plan. Et soit M un point variable sur le cercle (C) et soit N un point tel que : $AMNB$ est un parallélogramme

Déterminer l'ensemble (E) des points N lorsque M varie dans le cercle (C)

Solution : Déterminons l'ensemble (E) : On a : $AMNB$ est un parallélogramme

Cela signifie que : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$

Alors N est l'image de M par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Lorsque M varie dans le cercle (C) alors N varie dans l'image du cercle (C) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Par suite : l'ensemble (E) est le cercle de centre $t_{\overrightarrow{AB}}(I)$ est de rayon $r=2$

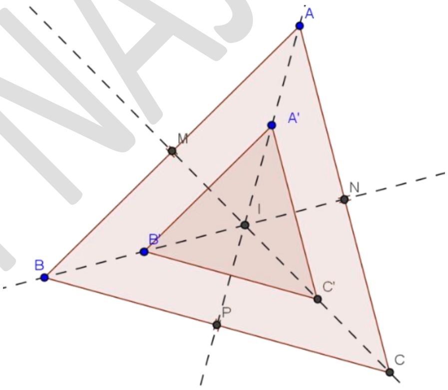
Exercice07 : ABC un triangle équilatéral. M , N et P sont les milieux des segments $[AB]$; $[AC]$ et $[BC]$ et I est le point d'intersection des médianes : (AP) ; (BN) et (CM)
A' , B' et C' sont respectivement les images des points : A , B et C par l'homothétie h de centre I et de rapport $k=\frac{1}{2}$

1) Faite une figure. Monter que : $\frac{AB}{A'B'}=2$.

2) Monter que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

3) Monter que : $\frac{L}{L'}=2$ .sachant que L est le périmètre du triangle ABC et L' est le périmètre du triangle $A'B'C'$

4) Monter que : $\frac{S}{S'}=4$ .sachant que S est la surface du triangle ABC et S' est la surface du triangle $A'B'C'$



Solution : 2) Montrons que : $\frac{AB}{A'B'}=2$.

On a $\begin{cases} h(A)=A' \\ h(B)=B' \end{cases}$ donc $\overrightarrow{A'B'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Donc : $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|=\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right\|$ par suite : $A'B'=\frac{1}{2}AB$ D'où : $\frac{AB}{A'B'}=2$

3) Montrons que : le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

On a : $A'B'=\frac{1}{2}AB$

De même on montre que : $A'C'=\frac{1}{2}AC$ et aussi $B'C'=\frac{1}{2}BC$

Et puisque : $AB=AC=BC$ alors : $A'B'=A'C'=B'C'$
D'où : le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

4) Montrons que : $\frac{L}{L'}=2$?

On a : $\frac{AB}{A'B'}=2$ et $\frac{AC}{A'C'}=2$ et $\frac{BC}{B'C'}=2$ donc : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=2$

Donc : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{L}{L'}$

Donc : $\frac{L}{L'}=\frac{AB}{A'B'}=2$

5) Montrons que : $\frac{S}{S'}=4$? On a : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$ et $C=C'$
Car l'homothétie conserve la mesure des angles

Or : la surface du triangle ABC est $S=\frac{1}{2}AC\times BC\times\sin C$ et la surface de $A'B'C'$ est $S'=\frac{1}{2}A'C'\times B'C'\times\sin C'$

Par conséquent : $\frac{S}{S'}=\frac{AC\times BC\times\sin C}{A'C'\times B'C'\times\sin C'}=\frac{AC\times BC}{A'C'\times B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\times\frac{BC}{B'C'}=2\times 2=4$

Exercice08 : A , B et C sont trois points du plan tels que AB=3 , AC=2 et $BAC = \frac{\pi}{3}$ radians

1) On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

2) Construire les points D et E définis par : $\overrightarrow{AD} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ et $\overrightarrow{AE} = -\vec{u} + 4\vec{v}$

3) Calculer les produits scalaires suivants :

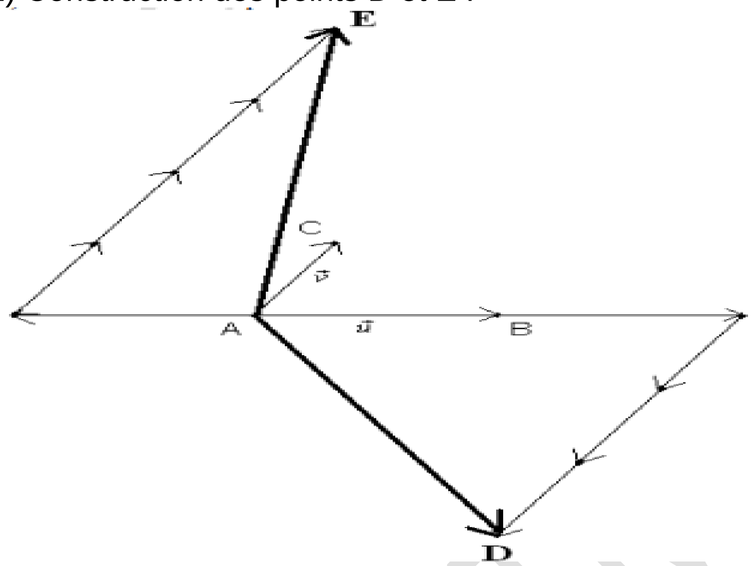
a) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$ c) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$

4) En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près par défaut de l'angle DAE

Solution :1) Le calcul de $\vec{u}.\vec{v}$ s'effectue directement à l'aide des données de l'énoncé :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos BAC = 3 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

2) Construction des points D et E :



3) a) Calculons : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$

On utilise les « identités remarquables » et la distribution du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right)\left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right) = \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right)^2$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = \left(2\vec{u}\right)^2 - 2 \times 2\vec{u}.3\vec{v} + \left(3\vec{v}\right)^2 = 4\vec{u}^2 - 12\vec{u}.\vec{v} + 9\vec{v}^2$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = 4\|\vec{u}\|^2 - 12\vec{u}.\vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2 = 4\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 12\,\vec{u}.\vec{v} + 9\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2$$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = 4AB^2 - 12\vec{u}.\vec{v} + 9AC^2$ Or : $\vec{u}.\vec{v} = 3$

Donc : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = 4 \times 3^2 - 12 \times 3 + 9 \times 2^2$

Donc : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = 36 - 36 + 36 = 36$

b) Calculons : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right)\left(-\vec{u} + 4\vec{v}\right)$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = 2\vec{u}.\left(-\vec{u}\right) + 2\vec{u}.4\vec{v} - 3\vec{v}.\left(-\vec{u}\right) - 3\vec{v}.4\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = -2\vec{u}^2 + 8\vec{u}.\vec{v} + 3\vec{v}.\vec{u} - 12\vec{v}^2$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = -2\|\vec{u}\|^2 + 8\vec{u}.\vec{v} + 3\vec{v}.\vec{u} - 12\|\vec{v}\|^2$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = -2\,AB^2 + 8\vec{u}.\vec{v} + 3\vec{v}.\vec{u} - 12\,AC^2$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = -2 \times 9 + 11\vec{u}.\vec{v} - 12 \times 4$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = -18 + 11 \times 3 - 48 = 33 - 66 = -33$$

c) Calculons : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}=\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)=\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)^2$

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}=\left(-\vec{u}\right)^2+2\times\left(-\vec{u}\right).4\vec{v}+\left(4\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-8\vec{u}.\vec{v}+16\vec{v}^2$

$=\left\|\vec{u}\right\|^2-8\vec{u}.\vec{v}+16\left\|\vec{v}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-8\vec{u}.\vec{v}+16\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2$

$=AB^2-8\vec{u}.\vec{v}+16\,AC^2=3^2-8\times3+16\times2^2=9-24+64=\boxed{49}$

4) En calculant le produit scalaire : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$ d'une deuxième manière, on obtiendrait :

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\times\cos\left(ADE\right)$

Puisque : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=-33$; $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=36$ on obtient $AD^2=36$ c'est-à-dire : $AD=6$

et de même : $AD=7$

Égalité : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\times\cos\left(ADE\right)$ fournit donc : $\cos\left(ADE\right)=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AE}\right\|}=\dfrac{-33}{6\times7}=-\dfrac{33}{42}=-\dfrac{11}{14}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\times\cos\left(ADE\right)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos BAC=3\times2\times\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=6\times\dfrac{1}{2}=3$

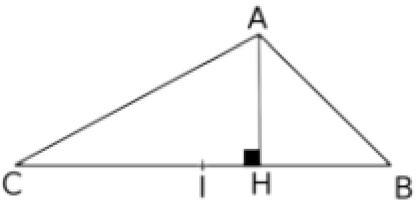
Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle DAE mesure environ 141,8 ° (à 0,1 degré

Exercice09 : Considérons un triangle ABC tels que : BC = 7, AB = 6 et Ac = 5

1) a) Calculer : $\cos BAC$

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ En déduire que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$

2)Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).



Calculer : BH

Solution : 1) a) Calculons : $\cos BAC$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC nous obtenons :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos BAC$

Donc : $\cos\left(BAC\right)=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$

Donc : $\cos\left(BAC\right)=\dfrac{36+25-49}{2\times6\times5}=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$

b) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos BAC=6\times5\times\dfrac{1}{5}=6$

Déduisons que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}^2-6=BA^2-6=36-6=30$

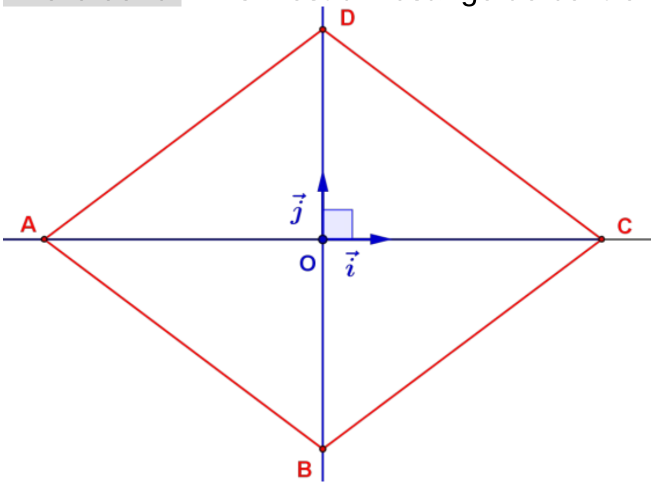
Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$

2) Calculons : BH

On a : H le projeté orthogonal de A sur (BC) et puisque : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30>0$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=BH\times BC$ c'est-à-dire : Donc : $\boxed{BH=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC}=\dfrac{30}{7}}$

Exercice10: ABCD est un losange de centre O tel que OA=4 et OD = 3.



Calculer les produits scalaires suivants : 1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ 2) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$ 3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ 4) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

O est le pied de la hauteur du triangle ADC issue de D

Donc : O étant le projeté orthogonal de D sur la droite (AC)

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AC \times AO = 8\times 4 = 32$ car : $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires et de même sens

2)Calculons : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$

O est le pied de la hauteur du triangle OBC issue de C

Donc : O étant le projeté orthogonal de C sur la droite (BO)

Donc : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO}^2 = BO^2 = 3^2 = 9$

3)Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$

On a : ABCD est un losange donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

Dans le triangle rectangle OAB, j'utilise le théorème de Pythagore :

On a donc : $AB^2 = OA^2 + OB^2$ c'est-à-dire : $AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = AB^2 = 25$

4)Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

O est le pied de la hauteur du triangle DBC issue de C

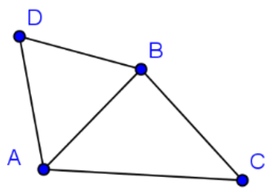
Donc : O étant le projeté orthogonal de C sur la droite (BO)

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BO} = BD \times BO$ car : $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires et de même sens

Donc : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = 6\times 3 = 18$

Exercice11 : Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en B tel que $AB = \sqrt{2}$

On construit à l'extérieur du triangle ABC le triangle équilatérale ABD (voir schéma)



1) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

2) Calculer : AC et DC

3) Montrer que : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 1-\sqrt{3}$

4) Vérifier que : $DAC = \frac{7\pi}{12}$

5) En déduire : $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Solution : 1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos A\hat{B}D=AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

• D'après Pythagore on a : $AC^2=BC^2+AB^2$

$AC^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2$ Signifie que : $AC^2=4$ ssi $AC=2$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans BCD on a : $DC^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $DC^2=2+2-2\times2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $DC^2=4+4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=4+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$ par suite : $DC=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

• D'après le Théorème d'Al Kashi dans ACD on a :

$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos(\alpha)$

$DC^2=AC^2+AD^2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Signifie que : $4+2\sqrt{3}=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Signifie que : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) $DAC=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

On a : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$ donc : $AC\times AD\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Exercice12 : Soit ABC un triangle tel que : $AB=9$ et $AC=6$ et $BC=8$

En appliquant la propriété suivante :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors on a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

1)Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2)Calculer : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

3)Calculer : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

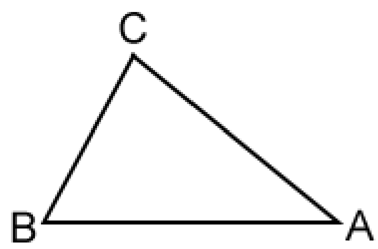
Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On en déduit, d'après la propriété que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right\|^2\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right)$

$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(9^2+6^2-8^2\right)=\frac{1}{2}\times53=26,5$



2) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-AC^2\right)}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(9^2+8^2-6^2\right)=\frac{1}{2}\times 109=54,5$$

3) Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$$\boxed{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)}$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(6^2+8^2-9^2\right)=\frac{1}{2}\times 19=9,5$$

Exercice13 : Soit ABC un triangle isocèle en A tel que et $AB=5$ et $BC=6$

Soit I le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$

2) Soit K la projection orthogonale du point C sur la droite (AB)

Calculer : BK

Solution : 1) a) Calculons $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$:

1*iére méthode :* I le milieu du segment $[BC]$ et ABC un triangle isocèle en A

Cela équivaut à dire que (AI) est une hauteur du triangle ABC donc : $(AI)\perp(BC)$

Par suite $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

2*iére méthode :*

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}\cdot 2\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$$

Et d'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle AIC on a : $AC^2=AI^2+IC^2-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$

Donc : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\left(AI^2+IC^2-AC^2\right)$

Donc : $-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=-\left(AI^2+IC^2-AC^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=-\left(AI^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2-AC^2\right)$

Et D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$ par suite : $AI^2=\frac{1}{2}\left(25+25-\frac{36}{2}\right)=16$

Par suite : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=-(16+9-25)=0$

b) Calculons $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$:

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$$AC^2=BA^2+BC^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-AC^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(25+36-25^2\right)=18$

c) Calculons $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$: On sait que : $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ car I le milieu du segment $[BC]$

Donc : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

Et on a : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}=\frac{1}{4}\left(25+36-25^2\right)=9$

2) on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$ et puisque K est la projection orthogonale du point C sur la droite (AB)

Alors : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}$ donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}=18$

Donc : $BK\times BA=18$ par suite : $BK=\frac{18}{BA}=\frac{18}{5}$

Exercice14 : Soit A et B deux points dans le plan tel que : $AB=5$

Et soit I le point du segment $[AB]$ tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que : $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
2) Calculer les distances : IA et IB
3) Montrer que : quel que soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$
4) Déterminer (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $4MA^2+MB^2=37$

Solution : $AB=5$ et $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Montrons que : $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$$4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=4\left(-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

2) Calculons les distances IA et IB : On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AI}\right\|=\left\|\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $AI=\frac{1}{5}AB=\frac{1}{5}\times5=1$ Par suite : $IB=AB-AI=4$

3) Montrons que : quel que soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$

Soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=4\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=4\left(\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+IA^2+IB^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\vec{0}\right)+1^2+4^2$

Par suite : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$

4) Déterminons l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $4MA^2+MB^2=37$?

On a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$ Donc : $5MI^2+17=37$

Cela équivaut à dire que : $MI^2=4$

Par conséquent : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $4MA^2+MB^2=37$

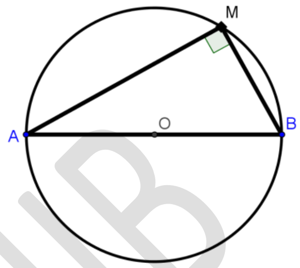
Est le cercle de centre I et de rayon $R=2$.

Exercice15 : Soient A et B deux points distincts du plan tel que : $AB=4$

1) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$

2) Déterminer et représenter l'ensemble (F) des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\frac{9}{4}$

Solution : soit M un point du plan



1) $M\in(E)$ Équivaut à : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$

Équivaut à : $(AM)\perp(BM)$

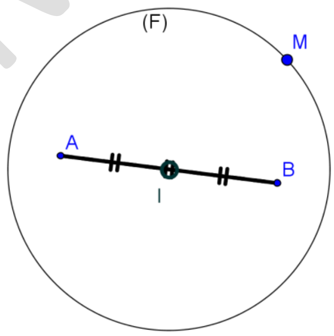
Équivaut à dire que : le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$

Par conséquent : l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$

2) $M\in(F)$ Équivaut à : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\frac{9}{4}$

Soit I le milieu du segment $[AB]$ donc D'après le théorème de la médiane dans MAB on a :

$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$ C'est-à-dire : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{16}{4}$



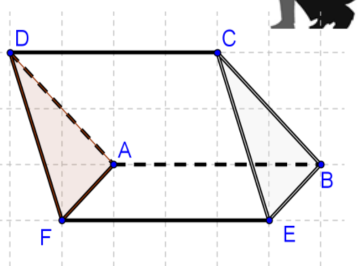
$M\in(F)$ Équivaut à : $MI^2-\frac{16}{4}=\frac{9}{4}$

Équivaut à : $MI^2=\frac{9}{4}+\frac{16}{4}=\frac{25}{4}$

Équivaut à : $MI=\frac{5}{2}$

Par conséquent : l'ensemble (F) des points M du plan est le cercle de centre I et de rayon $R=\frac{5}{2}$

Exercice16 : Soient dans l'espace les parallélogrammes $ABCD$ et $ABEF$ Non situés dans le même plan



1) Montrer que : $(BCE)\parallel(ADF)$

2)a) Montrer que : les points $E\,;F\,;C\,;D$ sont coplanaires

b) Montrer que : $(EC)\parallel(DF)$

c) En déduire : la nature du quadrilatère $CDFE$

3) Déterminer l'intersection des plans (ACE) et (ADF)

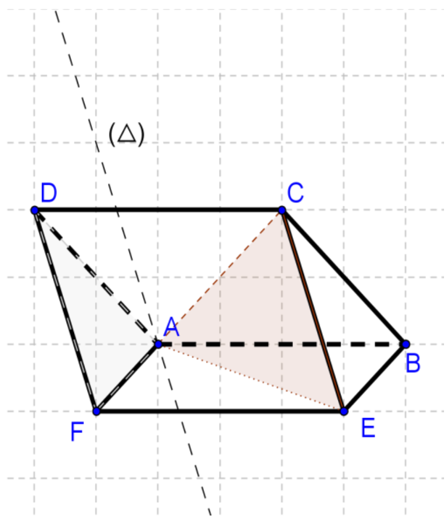
Solution :1) $ABCD$ est un parallélogramme donc : $(AD)\parallel(BC)$

Et on a : $ABEF$ est un parallélogramme donc : $(AF)\parallel(BE)$

ET on a : $(AD)\cap(AF)=\{A\}$ et $(AD)\subset(ADF)$ et $(AF)\subset(ADF)$

Et on a : $(BC)\cap(BE)=\{B\}$ et $(BC)\subset(BCE)$ et $(BE)\subset(BCE)$

Donc : $(BCE)\parallel(ADF)$



2) a) On a : $ABCD$ est un parallélogramme donc : $(DC)\parallel(AB)$

ET On a : $ABEF$ est un parallélogramme donc : $(EF)\parallel(AB)$

Par suite : $(EF)\parallel(DC)$

Donc: les points $E\,;F\,;C\,;D$ sont coplanaires

b) On a : $(ADF)\parallel(BCE)$ et $(EFDC)\cap(ADF)=(DF)$ et $(EFDC)\cap(BCE)=(EC)$ Donc : $(EC)\parallel(DF)$

c) On a : $(DC)\parallel(EF)$ et $(EC)\parallel(DF)$

Donc : quadrilatère $CDEF$ est un parallélogramme

3) On a : $C\in(ACE)$ et $C\notin(ADF)$ donc : $(ACE)\neq(ADF)$

On a : $A\in(ACE)\cap(ADF)$

On pose : $(ACE)\cap(ADF)=(\Delta)$

On a : $(FD)\subset(ADF)$ et $(CE)\subset(ACE)$ et $(FD)\parallel(CE)$

Donc : (Δ) est la droite qui passe par A et parallèle a (CE) et (FD)

Donc : L'intersection des plans (ACE) et (ADF) est la droite qui passe par A

Et parallèle a (CE) et (FD)

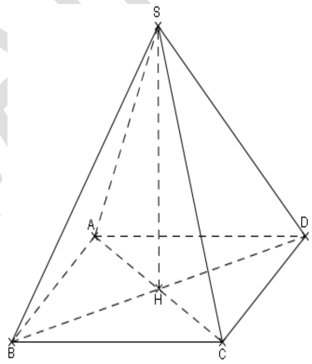
Exercice17 : Sur la pyramide SABCD à base rectangulaire ci-dessous, H est le centre du rectangle ABCD et (SH) est perpendiculaire à la base ABCD.

De plus, on a : SA = SB = SC = SD = 8,5 cm, CD = 12 cm et BC = 9 cm.

1) Vérifier que HD = 7,5 cm.

2) Calculer SH.

3) Calculer le volume de la pyramide SABCD.



Solution :

1) Le triangle BCD est rectangle en C donc on peut utiliser le théorème de Pythagore

On trouve : $BD=\sqrt{225}=15cm$

H est le centre du rectangle ABCD donc il est le milieu

De la diagonale [BD] donc : $HD=\frac{1}{2}BD=7.5cm$

4) (SH) est perpendiculaire à la base ABCD donc le triangle SHD est rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore on trouve que : La longueur SH mesure 4 cm.

5) Volume de la pyramide SABCD :

$$V=\frac{BC\times CD\times SH}{3}=\frac{6\times 12\times 4}{3}=144cm^3$$

Le volume de la pyramide est de 144 cm^3.

Exercice18 : On considère une bougie conique Représentée ci-contre (la forme d'un Cône droit)

Le rayon OA de sa base est 2,5 cm.

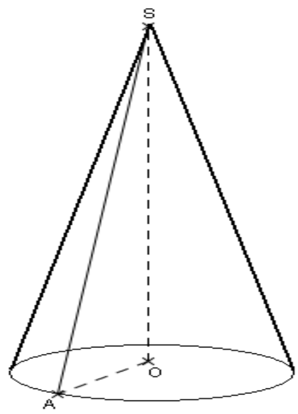
La longueur du segment [SA] est 6,5 cm.

1) Donner la nature du triangle SAO

2) Montrer que la hauteur SO de la bougie est 6 cm.

3) Calculer le volume de cire nécessaire à la fabrication de cette bougie ; on donnera la valeur arrondie au dixième de cm^3 ?

4) Calculer l'angle $\widehat{ASO}$; on donnera la valeur arrondie au degré.



Solution :1) Le triangle SAO est rectangle en O ; on peut donc utiliser le théorème de Pythagore et On trouve : $OS=\sqrt{36}=6cm$

3) Calcul du volume : si B L'aire de la base et $V=\frac{1}{3}B\times h=\frac{\pi\times r^2\times h}{3}$

$$V=\frac{\pi\times AO^2\times OS}{3}=\frac{\pi\times 2.5^2\times 6}{3}=12.5\pi cm^3$$ Valeur exacte

Le volume de la bougie est $V\simeq 39.3cm^3$ Valeur approchée

4) Le triangle SAO est rectangle en O ; on peut donc utiliser les formules trigonométriques pour déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ASO}$: $Cos\left(ASO\right)=\frac{OS}{AS}=\frac{6}{6.5}=\frac{12}{13}$ et d'après la calculatrice, $\widehat{ASO}\approx 23°$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien