http://www.xriadiat.com **DL6 /F** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**
- ✓ **Géométrie dans l'espace**

Exercice01 : $ABCD$ un parallélogramme de centre O

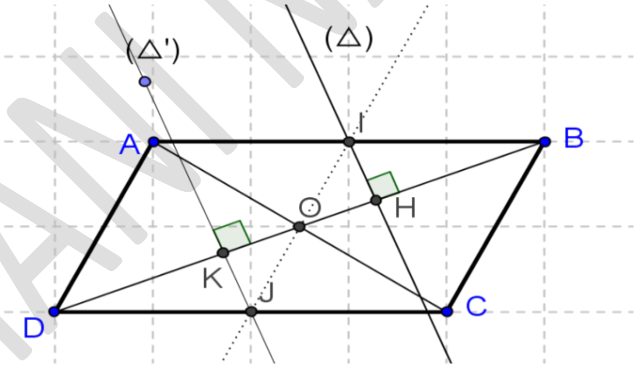
Les points : I , J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$

Les points : H , K sont les projections orthogonales respectives des points I , J sur la droite (BD).

1) Montrer que : $S_O(I)=J$

2)Montrer que : $IHJK$ est un parallélogramme

Solution : 1)



• On a : O est le centre de symétrie du parallélogramme $ABCD$

• On a : $S_O(A)=C$ et $S_O(B)=D$ et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[CD]$

Puisque la symétrie centrale conserve le milieu alors : $S_O(I)=J$

2)

• Puisque $O\in(BD)$ alors $S_O((BD))=(BD)$

Soit (Δ) la droite qui passe par le point I et perpendiculaire a (BD) donc l'image de la droite (Δ) par S_O

Est la droite qui passe par le point J et perpendiculaire a (Δ) (conservation de la perpendiculaire)

On a : $(BD)\cap(\Delta)=\{H\}$ donc : $S_O((BD))\cap S_O((\Delta))=\{S_O(H)\}$ c'est-à-dire : $(BD)\cap(\Delta')=\{S_O(H)\}$

Donc : $S_O(H)=K$ par suite : et O le milieu du segment $[HK]$

Et puisque : les diagonales $[IJ]$ et $[HK]$ ont le même milieu O alors : $IHJK$ est un parallélogramme

Exercice02 : ABC Un triangle isocèle de sommet A

On construit à l'extérieur de ABC deux triangles ABF et ACE équilatérales

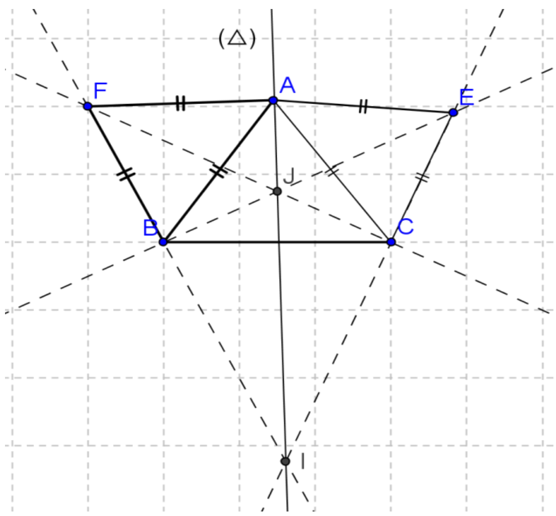
Les droites (BF) et (CE) se coupent en un point I

Et les droites (FC) et (BE) se coupent en un point J

Soit (Δ) l'axe de symétrie du triangle ABC

Montrer que les points : A , I et J sont alignés

Solution :



Montrons que les points : A , I et J sont alignés

Soit $S_{(\Delta)}$ la symétrie axiale d'axe (Δ)

Les deux triangles ABF et ACE sont symétriques par rapport à la droite (Δ)

On a : $S_{(\Delta)}(B)=C$ et $S_{(\Delta)}(E)=F$ donc : $S_{(\Delta)}(BE)=(CF)$

Et puisque : $(BE)\cap(CF)=\{J\}$ alors $J\in(\Delta)$

Et puisque les points : A , I et J appartiennent à la droite (Δ) alors les points A , I et J sont alignés

Exercice03 : Soient deux points fixes différents A et B du plan.

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$7\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}-7\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur

Solution : pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M)=M'$ Équivaut à : $7\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}-7\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}+7\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}+7\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

Équivaut à : $t_{\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}}(M)=M'$

Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

Exercice04 : $ABCD$ un parallélogramme et I le point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

On considère l'homothétie h de centre I et de rapport k tel que : $h(A)=B$

1) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k=-3$

2) Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (IC).

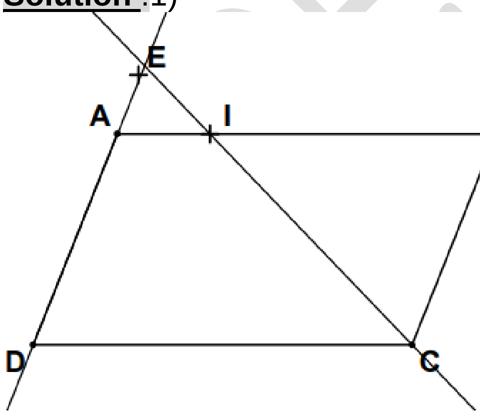
a) Montrer que $h(E)=C$

b) Déduire que : $BC=3AE$

3) On pose : $h(D)=D'$

Montrer que les points B ; C et D' sont alignés.

Solution :1)



1) Montrons que le rapport k de l'homothétie est $k=-3$

On a : $h(A)=B$ signifie que : $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}$ ①

D'autre part, on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ signifie que : $4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$

Signifie que : $4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$

Signifie que : $4\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$
Signifie que : $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$
Signifie que : $\overrightarrow{IB}=-3\overrightarrow{IA}$ ②
De : ① et ② on déduit que : $k=-3$
2) Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (IC)

a) Montrons que : $h(E)=C$

On a : $(AD)\cap(IC)=\{E\}$

Donc, il suffit de trouver l'image des droites (AD) et (IC) par l'homothétie h :

On sait que : $I\in(IC)$ donc : $h((IC))=(IC)$

D'autre part, on a : $h(A)=B$, donc l'image de (AD) est la droite qui passe par le point D et parallèle à la droite (AD)

Donc : $h((AD))=(BC)$

On obtient : $(BC)\cap(IC)=\{C\}$: ce qui signifie que : $h(E)=C$

b) Déduisons que : $BC=3AE$

On a $\begin{cases}h(A)=B\\h(E)=C\end{cases}$ donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AE}$

Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|-3\overrightarrow{AE}\right\|$

Donc : $BC=|-3|\left\|\overrightarrow{AE}\right\|$

Donc : $BC=2AE$

3) On pose : $h(D)=D'$

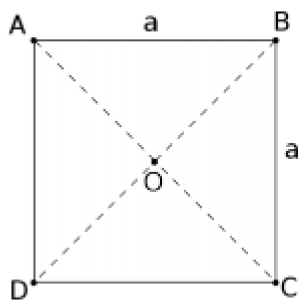
Montrons que les points B ; C et D' sont alignés.

On a $\begin{cases}h(A)=B\\h(E)=C\\h(D)=D'\end{cases}$ et es points A ; E et D sont aligné car $E\in(AD)$

Et puisque l'homothétie conserve l'alignement alors les points :
Alors : les points B ; C et D' sont aussi alignés.

Exercice05 : Soit le carré ABCD de centre O et de côté a.
Calculer, en fonction de : a les produits scalaires suivants.

1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ 2) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}$ 3) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}$ 4) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CO}$ 5) $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB}$ 6) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}$



Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$

On sait que dans un carré les diagonales sont à supports perpendiculaires et se coupent en leurs milieux ainsi, (AO) ⊥ (BD).
(AO) ⊥ (BD) donc le point O est le projeté orthogonal de du point A sur la droite (BD).

Par conséquent : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}$ Or : $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}BD^2$

Déterminons BD.
Considérons le triangle BAD rectangle en A, d'après la propriété de Pythagore on a:

PROF: ATMANI NAJIB

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

Donc : $BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Donc : $BD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

Par suite, on obtient : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}2a^2 = a^2$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = a^2}$

2) Calculons : $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant colinéaire et de sens contraire :

Donc : $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} = -DA \times BC = -a \times a = -a^2$

3) Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DB}$ ont respectivement pour droite d'action (CA) et (DB) qui sont perpendiculaires comme étant les diagonales du carrée, ainsi les vecteurs

Ainsi Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux.

D'où : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = 0$

4) Calculons : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CO}$

Le projeté du point D sur la droite (CO) est le point O et la droite (CO) est la droite d'action du vecteur $\overrightarrow{CO}$

Donc on a : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CO}^2 = CO^2$

Déterminons CO :

On a : $CO = \frac{1}{2}CA$

D'après la réponse de la question 1), la diagonale du carrée a pour longueur : $BD = a\sqrt{2} = CA$

Donc on a : $CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Par conséquent : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CO} = CO^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CO} = \frac{a^2}{2}}$

5) Calculons : $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OB}$ étant colinéaire et de sens contraire

Donc : $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = -OD \times OB$ or $OD = OB$

Donc : $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = -OD \times OD = -OD^2$

De la question précédente on a : $CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ or $OD = CO$ alors :

$\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = -\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{2a^2}{4} = -\frac{a^2}{2}$ D'où : $\boxed{\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = -\frac{a^2}{2}}$

6) Calculons : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}$

Le projeté orthogonal du point D sur la droite (AC) est le point O et la droite (AC) est la droite d'action du vecteur $\overrightarrow{AD}$ alors :

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CA}$ or $\overrightarrow{AO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Alors : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2=-\frac{1}{2}CA^2$

$CA=a\sqrt{2}$ donc : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=-\frac{2}{2}a^2=-a^2$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}=-a^2}$

Exercice06 : Soit ABC un triangle isocèle en B tel que :

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ et $\cos(A\hat{B}C)=\frac{1}{3}$ et J un point tel que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ et I le milieu du segment $[AC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par J et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$ et soit $M\in(\Delta)$

1) Montrer que : $AB=6$ et calculer AC

2) Calculer : $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=45$

4) Calculer : BI

Solution : 1) on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ donc : $\|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos\hat{B}=12$

Donc : $BA\times BC\times\cos\hat{B}=12$ donc : $AB^2\times\frac{1}{3}=12$

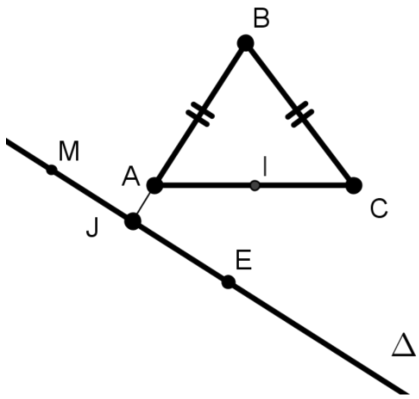
Donc : $AB^2=36$ donc : $AB=6$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

Donc : $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos B$

Donc : $AC^2=36+36-2\times36\times\frac{1}{2}$

Donc : $AC^2=54$ donc : $AC=\sqrt{54}$



3) $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{5}{4}BA^2=\frac{5}{4}\times36=45$

4) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=45$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$AB^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$ Donc : $6^2+6^2=2BI^2+\frac{1}{2}\sqrt{54}^2$

Donc : $72=2BI^2+27$ donc : $BI^2=\frac{45}{2}$ Donc : $BI=\sqrt{\frac{45}{2}}$

Exercice07 : Soit A et B deux points dans le plan tel que : $AB=4$

Et soit k un réel ; on note (C_k) l'ensemble des points M dans le plan tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

1) Déterminer et représenter les ensembles : (C_0) et (C_5) et (C_{12}) et (C_{-6})

2) Déterminer (E) l'ensemble des points M du plan tel que : $0\le\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\le5$

Solution : Soit M un point dans le plan et soit I le milieu du segment $[AB]$ on a donc : d'après le théorème de la médiane dans $MAB : \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = MI^2 - 4$ car $AB = 4$

Déterminons l'ensemble (C_0) :

1ier méthode : $M \in (C_0)$ Signifie que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ C'est-à-dire : $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

C'est-à-dire : $(MA) \perp (MB)$ et par suite l'ensemble (C_0) est le cercle de de diamètre $[AB]$

2ier méthode : $M \in (C_0)$ Signifie que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Signifie que $MI^2 - 4 = 0$

Signifie que $MI^2 = 4$ c'est-à-dire : $MI = 2$

Par suite l'ensemble (C_0) est le cercle de centre I et de rayon $R = 2$

Déterminons l'ensemble (C_5) :

• $M \in (C_5)$ Signifie que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$ Signifie que $MI^2 - 4 = 5$

Signifie que $MI^2 = 9$ C'est-à-dire : $MI = 3$

Par suite l'ensemble (C_5) est le cercle de centre I et de rayon $R = 3$

• Déterminons l'ensemble (C_{12}) :

$M \in (C_{12})$ Signifie que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$ Signifie que $MI^2 - 4 = 12$

Signifie que $MI^2 = 16$ C'est-à-dire : $MI = 4$

Par suite l'ensemble (C_{12}) est le cercle de centre I et de rayon $R = 4$

• Déterminons l'ensemble (C_{-6}) : $M \in (C_{-6})$

Signifie que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6$ c'est-à-dire : $MI^2 - 4 = -6$

Signifie que $MI^2 = -2$ impossible.

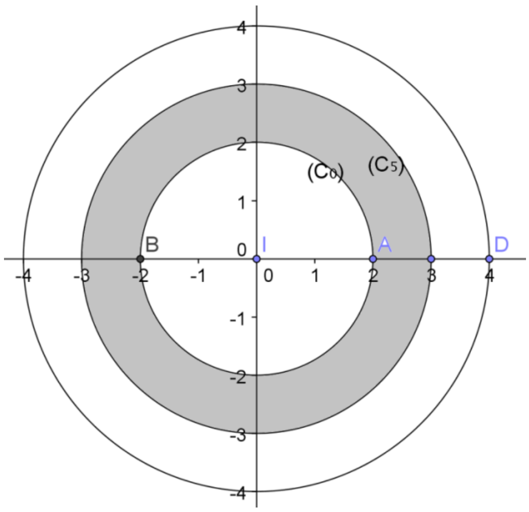
Par suite l'ensemble (C_{-6}) est l'ensemble vide : $(C_{-6}) = \varnothing$

2) Déterminons (E) : $M \in (E)$ Signifie que $0 \leq \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leq 5$

Signifie que $0 \leq MI^2 - 4 \leq 5$

Signifie que $4 \leq MI^2 \leq 9$ C'est-à-dire : $2 \leq MI \leq 3$

Par suite l'ensemble (E) est La couronne circulaire limitée par les cercles (C_0) est (C_5)



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB