http://www.xriadiat.com **DL6 /E** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

Exercice01 : Soient deux points fixes différents A et B du plan.
Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :
$\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur

Solution : pour chaque point M du plan nous avons :
$f(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=-2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Équivaut à : $t_{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}(M)=M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Exercice02 : Soient A et B deux points fixes du plan. Soit T une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$
Montrer que T est une homothétie de centre I le milieu du segment $[AB]$ et déterminer son rapport k

Solution : pour chaque point M du plan nous avons : $T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IM'}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{MI}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=3\overrightarrow{MI}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$ or on a : I le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=-3\overrightarrow{IM}$

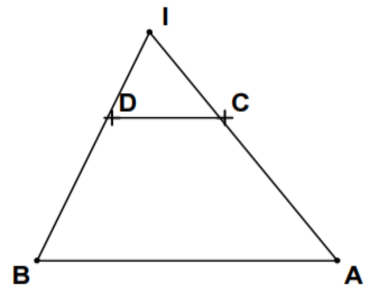
Cela veut dire que : h est une homothétie de centre I le milieu du segment $[AB]$ et de rapport : $k=-3$

Exercice03 : Soit IAB un triangle et soient les points C et D tels que :
$\overrightarrow{IC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ et $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

On considère l'homothétie h de centre I et de rapport $k=\frac{1}{3}$

1) Faite une figure
2) Montrer que : $h(A)=C$ et $h(B)=D$
3) Montrer que : $AB=3CD$

Solution :1) La figure



2) a) Montrons que : $h(A)=C$

On a : $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ ceci signifie que l'image de A par l'homothétie h est C c'est-à-dire : $h(A)=C$

b) Montrons que : $h(B)=D$: Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

On a : $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ donc : $2\left(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DB}\right)+3\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{ID}+2\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{ID}+2\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB}\right)+3\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID}\right)=\vec{0}$

Donc : $5\overrightarrow{ID}+2\overrightarrow{DI}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $3\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IB}$ ceci signifie que : $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

Par suite : $h(B)=D$

3) Montrons que : $AB=3CD$

On a : : $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ et par suite : D'après la propriété caractéristique on obtient : $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $CD=\left|\frac{1}{3}\right|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $CD=\frac{1}{3}AB$ par suite : $AB=3CD$

Exercice04 : A et B deux points fixes

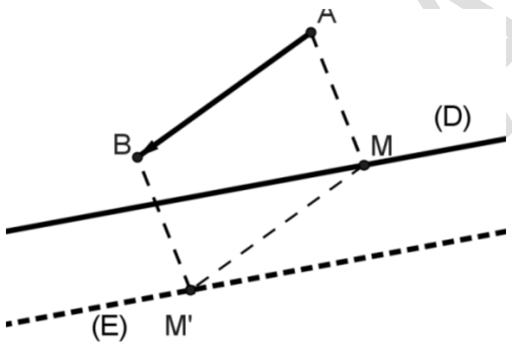
1) Soit une droite (D) et M un point qui varie sur la droite (D)

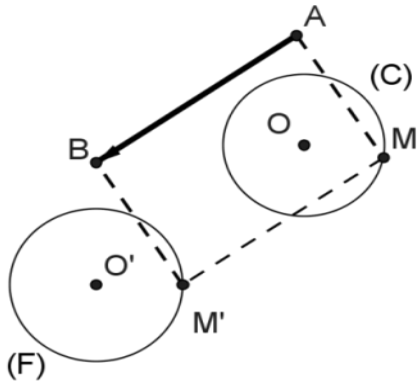
Déterminer l'ensemble (E) des points M' tel que : $MABM'$ est un parallélogramme

2) (C) est un cercle et M un point qui varie sur le cercle (C)

Déterminer l'ensemble (F) des points M' tel que : $MABM'$ est un parallélogramme

Solution : 1)





On a : $MABM'$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$ signifie que : $t_{\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

Donc : M' est l'image M par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Et puisque M un point qui varie sur la droite (D) alors son image M' varie sur l'image de la droite (D)

Et puisque l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle

Donc : l'ensemble (E) des points M' est la droite qui passe par M' est parallèle a la droite (D)

2) On a : $MABM'$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$ signifie que : $t_{\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

Donc : M' est l'image M par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Et puisque M un point qui varie sur le cercle (C) alors son image M' varie sur l'image du cercle (C)

Et puisque l'image d'un cercle par une translation est un cercle

Donc : l'ensemble (F) des points M' est l'image du cercle (C) par la translation

Exercice05 : Considérons un triangle ABC rectangle en A tel que :

AC=5 et AB=4 et $\overline{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

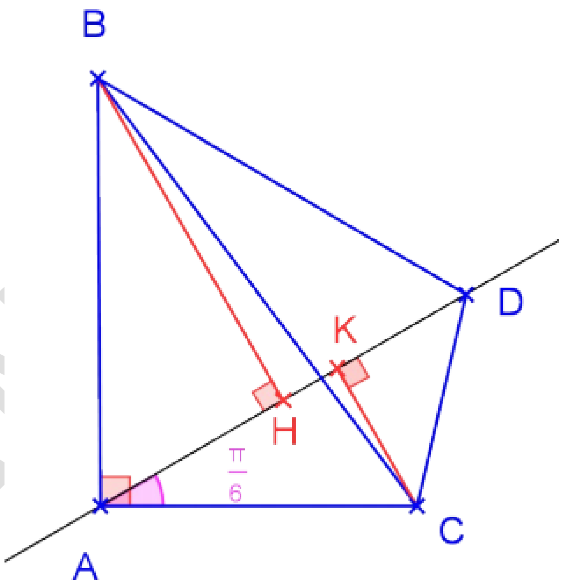
Soit D le point du plan vérifiant AD=4 et $\overline{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

H est le pied de la hauteur du triangle ABD issue de B et K est le pied de la hauteur du triangle ACD issue de C.

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ 3) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$

4) $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH})$ 5) $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK})$ 6) $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}$



Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

Le triangle ABC est rectangle en A donc le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C est A, Donc : A étant le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}^2 = BA^2 = AB^2 = 4^2 = 16$

2)Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Le triangle ABH est rectangle en H donc le pied de la hauteur du triangle ABH issue de B est H, Donc : H étant le projeté orthogonal de B sur la droite (AH)

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}^2 = AH^2$

Dans le triangle rectangle ABH : $BAH = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{2}$ Donc : $AH = \frac{1}{2}AB = 2$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AH^2 = 2^2 = 4$

3) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$

Le triangle ACK est rectangle en K donc le pied de la hauteur du triangle ACK issue de C est K, Donc : K étant le projeté orthogonal de C sur la droite (AK) = (AD)

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AK}^2 = AK^2$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{AK}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Donc : $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{75}{2}$

4) Calculons : $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH})$

$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Or, les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = 0$

Donc : $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = 4$

5) Calculons : $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK})$

$\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$ or : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} = 0$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}=\frac{75}{2}$

6) Calculons : $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}$

On a : $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}=\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}$ or : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{HA}=KA\times HA\cos\left(\overrightarrow{KA};\overrightarrow{HA}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}\times 2\times 1=5\sqrt{3}$ car $\cos\left(\overrightarrow{KA};\overrightarrow{HA}\right)=\cos 0=1$

$\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}=-\frac{75}{2}$ donc: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=-4$

$\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}=5\sqrt{3}-\frac{75}{2}-4=\frac{10\sqrt{3}-75-8}{2}=\frac{10\sqrt{3}-83}{2}$

Exercice06 : Soit ABC un triangle tel que et $AB=2\sqrt{3}$ et $AC=1$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$

1) Déterminer une mesure de l'angle BAC

2) Soit I le milieu du segment $[BC]$

a) Calculer BC b) En déduire la distance AI

Solution : 1) Déterminons une mesure de l'angle BAC

On a : $\cos BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$ Donc : $\cos BAC=\frac{-3}{2\sqrt{3}\times 1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\cos BAC=-\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Donc : Une mesure de l'angle BAC est $\frac{5\pi}{6}$ rad ou 150°

2) I le milieu du segment $[BC]$

a) D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :
$BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ C'est-à-dire : $BC^2=12+1+6=19$ par suite : $BC=\sqrt{19}$
b) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(12+1-\frac{19}{2}\right)=\frac{7}{4}$ Par suite : $AI=\frac{\sqrt{7}}{2}$

Exercice07 : Soit ABC un triangle tel que et $AB=2\sqrt{2}$ et $AC=3$ et $BAC=\frac{\pi}{4}$

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) En déduire la distance BC

2) Soit I le milieu du segment $[BC]$; Calculer la distance AI

3) Soit J le milieu du segment $[AB]$; Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}$

4) Soit K tel que $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; Montrer que les droites : (IJ) et (BK) sont perpendiculaires

Solution : 1) a) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{2}\times 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{2}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$

b) déduction de la distance BC ?
D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :
$BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+3^2-2\times6=8+9-12=5$ par suite : $BC=\sqrt{5}$

2) Calculons la distance AI : on a : I le milieu du segment $[BC]$

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$ C'est-à-dire : $AI^2=\frac{1}{2}\left(8+9-\frac{5}{2}\right)=\frac{29}{4}$

Par suite : $AI=\frac{\sqrt{29}}{2}$

3) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}$

On a : J le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}8=4$

4) On a : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Et puisque : I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AB]$ Alors : $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2=\frac{6}{2}-\frac{9}{3}=3-3+0$

Et puisque : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$ alors les droites : (IJ) et (BK) sont perpendiculaires

Exercice08 : Soit A et B deux points dans le plan tel que : $AB=10$

Et soit I le milieu du segment $[AB]$

1) Déterminer (Δ) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=10$

2) Déterminer (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=68$

Solution : $AB=10$ et le milieu du segment $[AB]$

1) Déterminons (Δ) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=10$

Soit : H la projection orthogonale du point M sur la droite (AB)

Donc : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=IH.AB$

Equivaut à : $IH.AB=10$ Equivaut à : $IH=1$

Puisque $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens alors : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$

Et par suite : (Δ) est la droite qui passe par le point H et tel que :

$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$ et perpendiculaire a (AB)

2) Déterminons (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=68$

Donc : $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

Donc : $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2$

Donc : $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$

Puisque I le milieu du segment $[AB]$donc : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$

Donc : $MA^2+MB^2=2MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\vec{0}\right)+50$

Donc : $MA^2+MB^2=2MI^2+50$ par suite on a : $2MI^2+50=68$

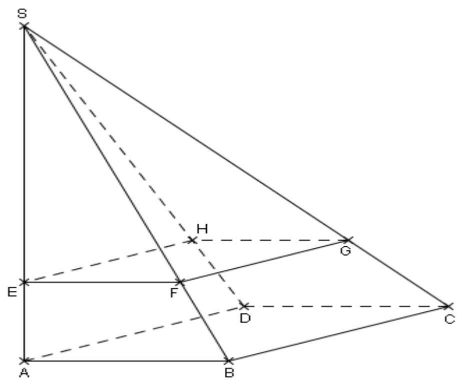
Donc : $MI^2=9$ Cela équivaut à dire que $MI=3$

Par conséquent : l'ensemble(C) des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=68$ est le cercle de centre I et de rayon $R=3$

Exercice09 : SABCD est une pyramide à base rectangulaire ABCD, de hauteur [SA].
On donne SA = 15 cm, AB = 8 cm et BC = 11 cm.
1) Calculer le volume V_1 de la pyramide SABCD.
2) Démontrer que SB = 17 cm.
3) On note E le point de [SA] tel que SE = 12 cm et F le point de [SB] tel que SF = 13,6.
Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
4) On coupe cette pyramide par le plan passant par E et parallèle à la base de la pyramide. La pyramide SEFGH ainsi obtenue est une réduction de la pyramide SABCD.
a) Quel est le coefficient de la réduction ?
b) En déduire le volume V_2 de la pyramide SEFGH en fonction de V_1.

Solution :1) Volume de la pyramide SABCD :

$V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}\times SA\times\left(AB\times BC\right)=\dfrac{8\times11\times15}{3}=440cm^3$



Le volume de la pyramide SABCD est de 440 cm^3.
2) On sait que [SA] est la hauteur de la pyramide SABCD donc [SA] est perpendiculaire à [AB] donc le triangle SAB est rectangle en A.
On peut utiliser le théorème de Pythagore dans ce triangle pour déterminer la longueur SB :
$SA^2+AB^2=SB^2$ Donc : $15^2+8^2=SB^2$
Donc : $SB=\sqrt{280}=17$ La longueur SB mesure 17 cm.
3) Les points S, E, A d'une part et les points S, F, B d'autre part sont alignés dans le même ordre.
On a de plus : $\dfrac{SE}{SA}=\dfrac{12}{15}=0.8$ et $\dfrac{SF}{SB}=\dfrac{13.6}{17}=0.8$. Nous avons par conséquent : $\dfrac{SE}{SA}=\dfrac{SF}{SB}$
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
4) a) Calcul du coefficient de réduction : $\dfrac{SE}{SA}=k=0.8$
Le coefficient de réduction est de 0,8.
b) Si on multiplie les dimensions de la pyramide SABCD par 0,8, on multipliera son volume par 0,8^3 pour obtenir celui de la pyramide SEFGH.
$V_2=k^3\times V_1=0.8^3\times440=225.28cm^3$
Le volume de la pyramide SEFGH est de 225,28 cm^3.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien