http://www.xriadiat.com **DL6/ D** **PROF: ATMANI NAJIB**

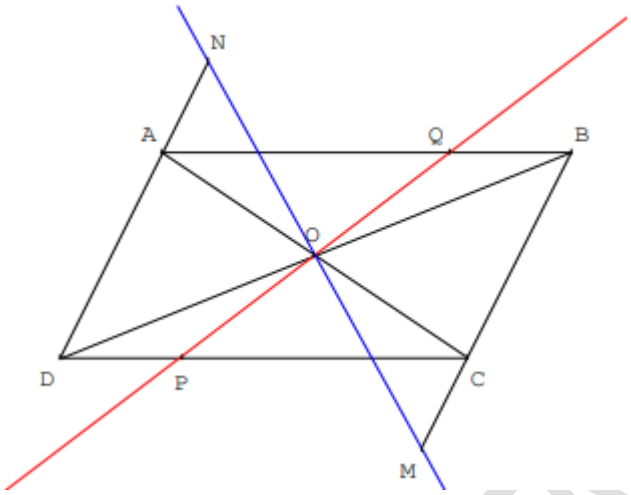
**Tronc commun Sciences BIOF**

# *Correction :* Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**
- ✓ **Géométrie dans l'espace**

**Exercice01 :** $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

Une droite (D) passant par O coupe les droites (DC) en P et (AB) en Q. Une droite $(\Delta)$ passant par O coupe les droites (AD) en N et (BC) en M




1) Quelles sont les images des points A, B, C, D par la symétrie de centre O ?
2) Quelles sont les images des droites (D), (BC) et (CD) par la symétrie de centre O ?
3) Démontrer que le quadrilatère MPNQ est un parallélogramme

**Solution** : $S_O$ est une symétrie centrale de centre $O$

1) Par la symétrie de centre O, l'image de A est C : $S_O(A)=C$

L'image de B est D : $S_O(B)=D$

L'image de C est A : $S_O(C)=A$

L'image de D est B : En effet, l'intersection des diagonales d'un parallélogramme est un centre de symétrie Donc : $S_O(D)=B$

2) Puisque l'image de O est O et que l'image d'une droite est une droite parallèle (par une symétrie centrale), alors l'image de (D) est (D).
Comme l'image de B est D et que l'image de C est A, alors l'image de (BC) est (DA).
Comme l'image de C est A et que l'image de D est B, alors l'image de (CD) est (AB).
3) Démontrons que le quadrilatère MPNQ est un parallélogramme.
L'image de (D) est (D) et l'image de (BC) est (DA), donc l'image de M intersection de (D) et (BC) est N intersection de (D) et (DA).
L'image de (D) est (D) et l'image de (CD) est (AB), donc l'image de P intersection de (D) et (CD) est Q intersection de (D) et (AB).
Puisque, par la symétrie de centre O, l'image de M est N et l'image de P est Q, alors le quadrilatère MPNQ a un centre de symétrie, c'est donc un parallélogramme.

**Exercice02 :** $ABCD$ Un rectangle de centre $O$ et $S_{(BD)}$ est la Symétrie axiale d'axe $(BD)$

Les points : $A'$ , $C'$ les images respectives des points $A$ , $C$ par $S_{(BD)}$

Montrer que : $AA'CC'$ est aussi un rectangle

**Solution** : On a : $S_{(BD)}(A)=A'$ et $S_{(BD)}(C)=C'$ et $O$ le milieu du segment $[AC]$

Donc $S_{(BD)}(O)=O'$ est aussi le milieu du segment $[A'C']$ car la symétrie axiale conserve le milieu

Or : $O\in(BD)$ donc : $S_{(BD)}(O)=O$

Donc : $O$ le milieu du segment $[A'C']$et de $[AC]$

Donc : les segments $[A'C']$et de $[AC]$ont le même milieu $O$

Par suite $AA'CC'$ est un parallélogramme

Et on a aussi : $S_{(BD)}(A)=A'$ et $S_{(BD)}(C)=C'$ donc $AC=A'C'$ (car la symétrie axiale

Conserve les distances) Par conséquent : $AA'CC'$ est aussi un rectangle

**Exercice03 :** On considère deux points $A$ et $B$ et une homothétie $h$ qui transforme $A$ en $C$ et laisse invariant le point $B$ de sorte que : $\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Trouver le rapport k de cette homothétie

**Solution :** nous avons : $h(A)=C$ et $h(B)=B'=B$

D'après la propriété caractéristique de l'homothétie

On a ; $\overrightarrow{CB}=k\overrightarrow{AB}\ (1)$

D'autre part nous avons :

$\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{AB}\ (2)$

De $(1)$ et $(2)$ nous déduisons : $k=4$

**Exercice04 :** $ABC$ un triangle tel que : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $m$ un paramètre réel

On considère une transformation $T$ du plan qui transforme chaque point $M$ en $M'$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+\left(m+\frac{4}{3}\right)\overrightarrow{MB}-4\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MC}$$

1) Montrer que pour tout réel $m$ on a $T$ est une translation dont on déterminera son vecteur

2) Déterminer l'image de la droite $(BC)$par la translation $T$ et en déduire l'image de la droite $(AB)$par $T$

**Solution :**1) Soit $M$ un point $M$ du plan :

$T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+\left(m+\frac{4}{3}\right)\overrightarrow{MB}-4\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MC}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{MB}-4m\overrightarrow{MC}-\frac{4}{3}\overrightarrow{MC}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-4\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{AC}\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}\right)+\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

Et puisque : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ alors : $\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\overrightarrow{MM'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ c'est-à-dire : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(M)=M'$

Donc : $T=t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}$ est la translation dont de vecteur $\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

2) Déterminons l'image de la droite $(BC)$ par la translation $T=t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}$

On a : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc les points $A$ et $B$ et $C$ sont des points alignés

Posons : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(B)=B'$ signifie que : $\overrightarrow{BB'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ donc : $B'\in(BC)$

De même si $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(C)=C'$ signifie que : $\overrightarrow{CC'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ donc : $C'\in(BC)$

Donc : $(B'C')=(BC)$ et par suite : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(BC)=(BC)$

Et puisque : points $A$ et $B$ et $C$ sont des points alignés alors : $(AB)=(BC)$ par suite : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(AB)=(BC)$

**Exercice05 :** $ABC$ un triangle et $I$ le milieu du segment $[BC]$ soient les points $B'$ et $C'$ tels que : $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et le point $J$ le milieu du segment $[B'C']$

On considère l'homothétie $h$ de centre $A$ et de rapport $k=\frac{2}{3}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{B'C'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

2) En utilisant l'homothétie, Montrer que les points $J$ ; $A$ et $I$ sont alignés

**Solution** :

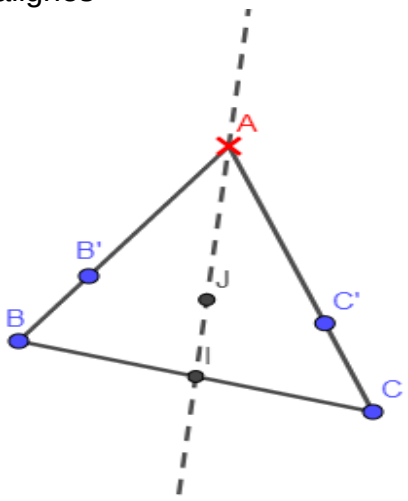
1) Montrons que : $\overrightarrow{B'C'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Méthode 1 : On a : $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ceci signifie que : $h(B)=B'$

De même on a : $\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ceci signifie que : $h(C)=C'$

Donc : $\begin{cases}h(B)=B'\\h(C)=C'\end{cases}$ et par suite : D'après la propriété

caractéristique on obtient : $\overrightarrow{B'C'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$




Méthode 2 : En utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AC'}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

2) Montrons que les points $J$ ; $A$ et $I$ sont alignés

L'image du point $A$ par l'homothétie $h$ est $A'$ et L'image du point $B$ par $h$ est $B'$

Donc : L'image du segment $[BC]$ par $h$ est le segment $[B'C']$, et comme $I$ est le milieu du segment $[BC]$ alors $h(I)$ est le milieu de $[B'C']$ et comme $J$ est le milieu de $[B'C']$

Donc : $h(I)=J$ : Car l'homothétie conserve les milieux. Ceci signifie que les points $J$ ; $A$ et $I$ sont alignés

PROF. ATMANI NAJIB

**Exercice06 :** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=6$ et $\vec{u}.\vec{v}=-9$ et $(\vec{u};\vec{v})=\frac{4\pi}{3}$

Déterminer : $\|\vec{v}\|$

**Solution** : On sait que : $\vec{u}.\vec{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$ donc : $\|\vec{v}\|=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})}$

Donc : $\|\vec{v}\|=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\times\cos\frac{4\pi}{3}}$ or $\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

Donc : $\|\vec{v}\|=\frac{-9}{-6\times\frac{1}{2}}=3$

**Exercice07 :** Soit ABC un triangle tels que : $AB=\sqrt{7}$ et $AC=8$ et $BC=2$

En appliquant la propriété suivante :

**Si** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors on a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

Calculer : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

**Solution** : Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Pour : $\vec{u}=\overrightarrow{CA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CB}$

Et comme on a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Alors on a : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CA}\|^2+\|\overrightarrow{CB}\|^2-\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\|^2\right)$

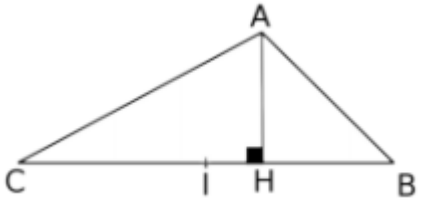
Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-BA^2\right)=\frac{1}{2}\left(8^2+2^2-\sqrt{7}^2\right)=30,5$

**Exercice08 :** Considérons un triangle ABC tels que : $BAC=\frac{2\pi}{3}$ et $AC=2$ et $AB=\sqrt{3}-1$

1) a) Montrer que : $BC=\sqrt{6}$

b) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=3-\sqrt{3}$

2)Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).




Calculer : $BH$

**Solution** : 1) a) Montrons que : $BC=\sqrt{6}$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans $ABC$ nous obtenons :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos BAC$

$BC^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+4-4\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\frac{2\pi}{3}$

$BC^2=8-2\sqrt{3}-4\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ on a : $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$BC^2=8-2\sqrt{3}+4\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$BC^2=8-2\sqrt{3}+4\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{1}{2}=6$

Donc : $BC=\sqrt{6}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=3-\sqrt{3}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=BA^2-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\frac{2\pi}{3}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{3}-1\right)\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+1$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\sqrt{3}-1$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=3-\sqrt{3}$

2)Calculons : $BH$

On a : H le projeté orthogonal de A sur (BC) et puisque : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=3-\sqrt{3}>0$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=BH\times BC$

Donc : $\boxed{BH=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}$

**Exercice09 :** Soit $ABC$ un triangle tel que $AB=1$ Et $BC=AC=\sqrt{2}$

$I$ Le milieu du segment $[AB]$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

1) Calculer $CI$

2) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) En déduire que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ et en déduire $\cos BAC$

5) Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du triangle $BAD$

6) Soit le point $M$ tel que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

a) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

b) Montrer que $(MD)\perp(AC)$

**Solution** : **1)** a) D'après le théorème de la médiane dans $ABC$ on a :

$BC^2+AC^2=2CI^2+\frac{AB^2}{2}$

Donc : $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ donc : $\frac{7}{4}=CI^2$ donc : $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ssi $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ donc : $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

On a : $I$ le milieu du segment $[AB]$et $ABC$ isocèle en $C$

Donc : $(IC)\perp(AB)$ cad $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$ donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AI}\|\cos 0=AB\cdot AI\cdot 1=AB\cdot\frac{AB}{}\cdot\cos 0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Calcul de $\cos BAC$ :On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\cos\hat{A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ donc : $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5) On a : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Signifie que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ par suite $BAD$ est un triangle rectangle en $A$

6)a) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ssi $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ ssi $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

Calcul de : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ؟؟؟

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

B) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}=-\frac{7}{4}\cdot 2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$

Signifie que : $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc : $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$

Par suite : $(MD)\perp(AC)$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*

PROF : ATMANI NAJIB