 DL6/C PROF: ATMANI NAJIB

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

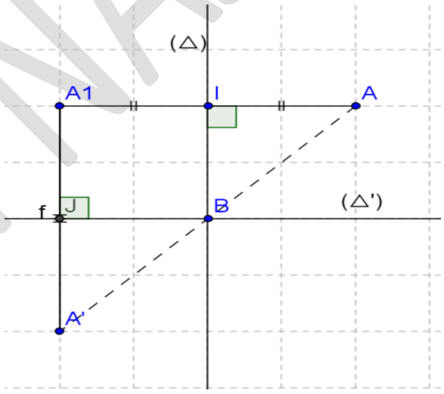
Exercice01 : On considère les droites (Δ) et (Δ') perpendiculaires en un point O

Soit A un point du plan (P) et A_1 son image par la symétrie axiale : $S_{(\Delta)}$

Et A' l'image de A_1 par la symétrie axiale : $S_{(\Delta)}$

Montrer que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=\vec{0}$

Solution : On a : $S_{(\Delta)}(A)=A_1$ et $S_{(\Delta)}(A_1)=A'$



Soit I Le milieu du segment $[AA_1]$ donc : $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OI}$

Soit I Le milieu du segment $[A_1A']$ donc : $\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA_1}=2\overrightarrow{OJ}$

Par suite : $\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA}=2\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\right)$

Et puisque : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OA_1}$ (car OIA_1J est un rectangle)

Alors : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=\vec{0}$

Exercice02 : Soit ABC un triangle ; I et J et K les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[AC]$ et $[AB]$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$

2) Soit M le point du plan.

Représenter les points E et F les images du point M respectivement par les translations $t_{\overrightarrow{KC}}$ et $t_{\overrightarrow{BJ}}$

3) Déterminer la translation qui transforme E en F

Solution : 1) Montrons que : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$

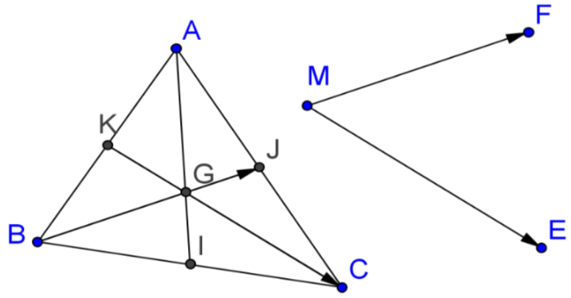
Soit G Le centre de gravité du triangle ABC

Alors on sait que : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$

Donc : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)=\vec{0}$ car $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

2) Représentation des points E et F :

3) Détermination de la translation qui transforme E en F



On a : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MF}$ donc : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{BJ}$

Et puisque : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=-\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IA}$

Donc : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{IA}$ par suite : $t_{\overrightarrow{IA}}(E)=F$

Par conséquent la translation qui transforme E en F est $t_{\overrightarrow{IA}}$ c'est-à-dire : la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$

Exercice03 : Soit deux points A et B du plan et soit h une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}-\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$

1) Déterminer les points invariants par la transformation h

2)Montrer que : h est une homothétie et trouver le centre et le rapport k de cette homothétie

Solution : 1) Déterminons les points invariants par la transformation h

Soit Ω un point invariant par la transformation h

Ω un point invariant par la transformation h signifie que : $h(\Omega)=\Omega$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega\Omega}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\left(\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{AB}\right)+\vec{0}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Signifie que : $-\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$

Donc : le point invariant par la transformation h vérifie : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$

2)Montrons que : h est une homothétie

Soit M un point du plan et $h(M)=M'$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}-\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$

Équivaut à : $\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)-2\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right)-\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{M'\Omega}-2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{M'\Omega}-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$

Équivaut à : $-2\overrightarrow{M'\Omega}+\left(\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega B}\right)-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$ et puisque : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$ alors : $\overrightarrow{A\Omega}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $-2\overrightarrow{M'\Omega}-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{\Omega M'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M}$

Cela veut dire que : h est une homothétie de centre Ω et de rapport $k=\frac{1}{2}$

Exercice04 : Soit ABC un triangle et $I\in[BC]$ tel que : $I\neq B$ et $I\neq C$

Et soit G le point tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$

1) Faite une figure

2)On considère l'homothétie h de centre I et de rapport k tel que : $h(A)=G$

a) Montrer que le rapport de l'homothétie est $k=\frac{1}{4}$

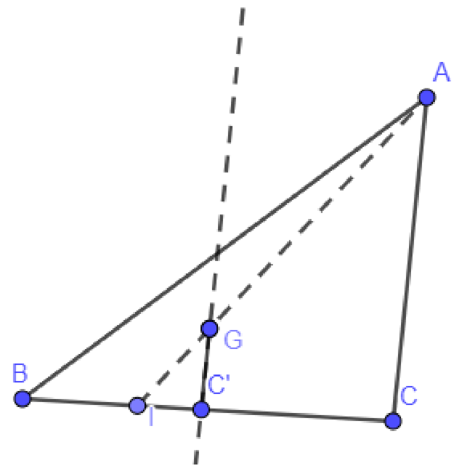
b) Déterminer l'image de la droite (BC) par l'homothétie h.

Justifier votre réponse.

c) Déterminer l'image de la droite (AC) par l'homothétie h.

Puis construire le point C' tel que : $h(C)=C'$

Solution :1) La figure



2)On considère l'homothétie h de centre I et de rapport k tel que : $h(A)=G$

a) Montrons que le rapport de l'homothétie est $k=\frac{1}{4}$

On a : $h(A)=G$ donc : $\overrightarrow{IG}=k\overrightarrow{IA}$

D'autre part, on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$ donc : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$

Donc : $\overrightarrow{IG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AI}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{IG}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}$

Donc : $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ Ce qui signifie que le rapport de l'homothétie est $k=\frac{1}{4}$

b) Déterminons l'image de la droite (BC) par l'homothétie h .

On a : $I\in(BC)$ donc : $h((BC))=(BC)$

c) Déterminons l'image de la droite (AC) par l'homothétie h .

On a : $h(A)=G$ donc : $h((AC))$ est la droite qui passe par G est parallèle (AC)

On a : $h(C)=C'$ donc : C' appartient à la droite qui passe par G est parallèle (AC)

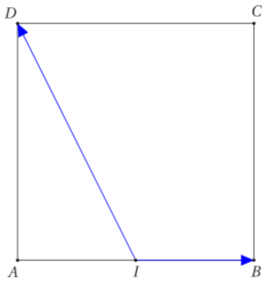
et $C'\in h((BC))=(BC)$ appartient à la droite qui passe par G est parallèle (AC)

Donc : C' est le point d'intersection des droites (BC) et la droite qui passe par G

est parallèle (AC)

Exercice05 : Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté 4 unités et I et le milieu du segment [AB].

Calculer la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$



Solution :La méthode utilisant la projection orthogonale est particulièrement bien adaptée ici puisque l'on connaît la projection orthogonale *A* du point *D* sur la droite (*IB*).

$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA}$

Et puisque : $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires et sont de sens contraires

Alors : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}=-IB\times IA=-2\times 2=-4$

Exercice06 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de même norme.

Démontrer que les vecteurs : $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux

Solution : Calculons : $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$

On applique « l'identité remarquable du produit scalaire » :

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ or $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

Donc : $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=0$

Par suite : les vecteurs : $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux

Exercice07 : Soit ABC un triangle tel que et $AB=3$ et $AC=1$ et $\cos BAC=-\frac{1}{3}$

Soit M le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 2) Calculer AM et BC

3) Soit H tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

Montrer que les droites : (AB) et (MH) sont perpendiculaires

Solution :1) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times1\times-\frac{1}{3}=-1$

2) a) Calculons BC :

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2=(3)^2+1^2-2\times(-1)=12$ par suite : $BC=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

b) Calculons AM :

On a : M le milieu du segment $[BC]$

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AM^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$

Donc : $AM^2=\frac{1}{2}(9+1-6)=2$ Par suite : $AM=\sqrt{2}$

3) Soit H tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

Montrons que les droites : (AB) et (MH) sont perpendiculaires

M le milieu du segment $[BC]$ donc : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AM}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\frac{1}{18}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=-\frac{1}{18}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{18}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{2}(-1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=-\frac{1}{18}AB^2-\frac{1}{2}(-1)=-\frac{1}{18}9+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=0$

Donc : les droites (AB) et (MH) sont perpendiculaires

Exercice08 : Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

I Un point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

1) Construire une figure

2) Montrer que : $AB=8$ et calculer BC

3) Calculer : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$

4) Montrer que : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5) Calculer : AJ

Solution :1) La figure

2) On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=16$

Donc : $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$ donc : $AB^2\times\frac{1}{4}=16$

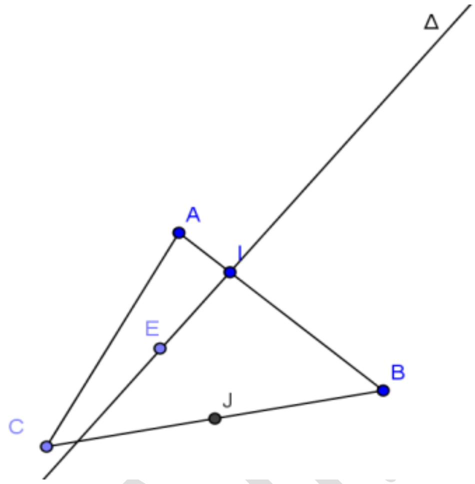
Donc : $AB=8$ donc : $AB^2=64$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\cos A$

Donc : $BC^2 = 64+64-2\times 64\times\frac{1}{4}$

Donc : $BC^2=96$ donc : $BC=\sqrt{96}$



3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times 64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

Donc : $128=2AJ^2+48$ donc : $40=AJ^2$ donc : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Exercice09 : Soit $ABCDEFGH$ un cube de l'espace et Soient I ; J les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[FG]$

1) Montrer que : $(IJ)\parallel(HFB)$

2) Montrer que $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$:

Avec $(HF)\cap(EJ)=\{P\}$ et $(AI)\cap(BD)=\{Q\}$

3) Montrer que $(PQ)\parallel(FB)$:

Solution :1) On a I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu

Du segment $[FG]$ donc : $(BF)\parallel(IJ)$

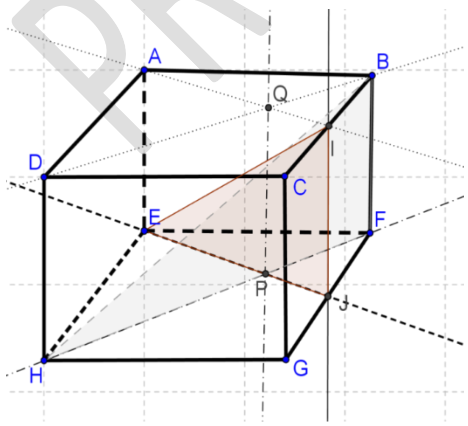
Et on a $(BF)\subset(HFB)$ donc : $(IJ)\parallel(HFB)$

2) On a : $(EJ)\subset(EIJ)$ et $(AI)\subset(EIJ)$ (car $(AE)\parallel(IJ)$ les points A ; J ; E ; I sont coplanaires

Donc les points A ; J ; E ; I sont coplanaires

Donc : $P\in(EIJ)$ et $Q\in(EIJ)$

(car $Q\in(AI)$ et $P\in(EJ)$)



Ce qui équivaut à dire que : $(PQ)\subset(EIJ)$ (1)

D'autre part on a : $(HF)\subset(HFB)$ et $(BD)\subset(HFD)$ (car $(DH)\parallel(BF)$

Donc : D ; H ;et B coplanaires) F

Donc : $P\in(HFD)$ et $Q\in(HFD)$

Ce qui équivaut à dire que/ $(PQ)\subset(HFD)$:2)

Et puisque : $(HFD)\neq(EIJ)$

Alors de (1) et (2) on déduit que : $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$

3) On a : $(IJ)\subset(EIJ)$ et $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$ *et* $(BF)\subset(HFD)$ *et* $(BF)\parallel(IJ)$

Donc : $(PQ)\parallel(FB)$

Exercice10 : Soient dans l'espace un cube $ABCDEFGH$

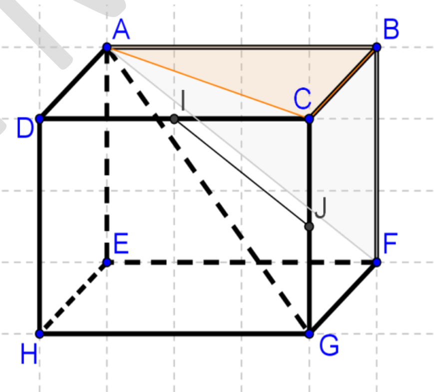
Avec I le milieu du segment $[CD]$ et J le milieu du segment $[CG]$

1) Montrer que : $(CG)\perp(ABC)$

2) Qu'elle est le la longueur du coté du cube $ABCDEFGH$ sachant que la longueur de la diagonal du cube est égale a $\sqrt{14}$

3) Montrer que : $(IJ)\parallel(ABF)$

4) Montrer que : $(AD)\perp(IJ)$



Solution :1) On a : $(CG)\perp(BC)$ car $BCGF$ carré et on a :

$(CG)\perp(DC)$ car $CDHG$ carré

Et puisque : (DC) et (BC) se coupent dans le plan (ABC) par suite : $(CG)\perp(ABC)$

2) Soit a la longueur du coté d'un cube on a : AG diagonal de $ABCDEFGH$

D'après le théorème de Pythagore directe dans le triangle ABC

On a : $AC^2=AB^2+BC^2$ donc: $AC^2=a^2+a^2=2a^2$

Par suite : $AC=a\sqrt{2}$

Et puisque : $(CG)\perp(ABC)$ et $(AC)\subset(ABC)$ alors : $(CG)\perp(AC)$

Donc : AGC est un triangle rectangle en C

Donc d'après le théorème de Pythagore dans le triangle AGC on a: $AG^2=AC^2+CG^2$

Donc : $AG^2=2a^2+a^2=3a^2$ c'est-à-dire : $AG=\sqrt{3}a$ or on a : $AG=\sqrt{14}$

Donc : $\sqrt{3}a=\sqrt{14}$ c'est-à-dire : $a=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$

3)Dans le triangle DCG on a I le milieu du segment $[CD]$ et J le milieu du segment $[CG]$

Donc : $AD=FG$ et puisque on a : (1) $(DG)\parallel(IJ)$

Alors : $ADGF$ est un parallélogramme et par suite : $(DG)\parallel(AF)$

De (1) et (2) en déduit que : $(AF)\parallel(IJ)$

Et on a : $(AF)\subset(ABF)$ par suite $(IJ)\parallel(ABF)$

4) On a : $(AD)\perp(DC)$ et $(AD)\perp(DH)$

ET (DC) et (DH) se coupent dans le plan (HDC)

Par suite : $(AD)\perp(HDC)$ et puisque : $(IJ)\subset(HDC)$ alors : $(AD)\perp(IJ)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien