http://www.xriadiat.com **DL6/ A** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**
- ✓ **Géométrie dans l'espace**

Exercice01 : *Soient* trois points fixes A ; B et C du plan

Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

1) Montrer que : E est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

2)a) Faire une figure

b) Représenter le point : F est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

Et Montrer que : C est le milieu $[EF]$

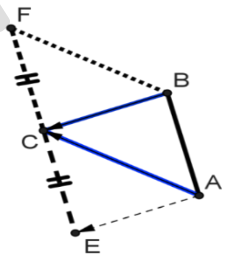
Solution : 1) On a : $\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ Signifie que : $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire $BCEA$ est un parallélogramme

Par suite : $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=E$

2)a) la figure



On a : F est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ donc :

$t_{\overrightarrow{AC}}(B)=F$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$ donc $ACFB$ est un parallélogramme par suite : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CF}$ (1)

On a aussi : $BCEA$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}$ (2)

De (1) et (2) on obtient : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{CF}$

Par conséquent : C est le milieu $[EF]$

Exercice02 : *Déterminer* dans les cas suivants le rapport k de l'homothétie h de centre A et qui transforme B en C

1) $3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ 2) $\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ 3) $3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ 4) $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AB}$

Solution : Soit $h(A,k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(B)=C$

$h(B)=C$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

1) $3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=-\frac{2}{3}$ donc $h\left(A,-\frac{2}{3}\right)$

2) $\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=\frac{2}{3}$ donc $h\left(A,\frac{2}{3}\right)$

3) $3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ équivaut à : $k=\frac{3}{2}$ donc $h\left(A,\frac{3}{2}\right)$

4) $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=-2$ donc $h(A,-2)$

Exercice03 : *Soit* deux points A et B du plan et soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$

1) Déterminer le point Ω invariant par la transformation f

2) Déterminer la nature de la transformation f

Solution : 1) Déterminons le point invariant par la transformation f

Soit Ω le point invariant par la transformation f

Ω un point invariant par la transformation f signifie que : $f(\Omega)=\Omega$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega\Omega}=3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega B}$

Signifie que : $\vec{0}=3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega B}$

Signifie que : $3\overrightarrow{\Omega A}+2\left(\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Signifie que : $5\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{A\Omega}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : le point invariant par la transformation f vérifie : $\overrightarrow{A\Omega}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

2) Déterminons la nature de la transformation f

Soit M un point du plan et $f(M)=M'$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega M'}=3\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)+2\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{\Omega M'}=3\overrightarrow{M\Omega}+3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{M\Omega}+2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{M\Omega}$

Équivaut à : $\overrightarrow{\Omega M'}=4\overrightarrow{M\Omega}+\left(3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega B}\right)$ et puisque : $3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega B}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{\Omega M'}=4\overrightarrow{M\Omega}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{\Omega M'}=-4\overrightarrow{\Omega M}$

Cela veut dire que : f est une homothétie de centre Ω et de rapport $k=-4$

Exercice04 : *Soit* ABC un triangle et soient les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

On considère l'homothétie h de centre A et de rapport $k=\frac{2}{5}$

1) Montrer que : $h(B)=E$ et $h(C)=F$

2) Faite une figure

3) Montrer que : $EF=\frac{2}{5}BC$

4) Montrer que : $(EF)\parallel(BC)$

Solution : 1) a) Montrons que : $h(B)=E$

On a : $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ceci signifie que l'image de B par l'homothétie h est E C'est-à-dire : $h(B)=E$

b) Montrons que : $h(C)=F$

Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

On a : $3\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ donc : $3\overrightarrow{AF}+2\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}\right)=\vec{0}$

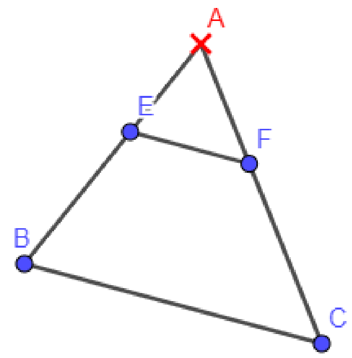
Donc : $3\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AF}=\vec{0}$

Donc : $5\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

Donc : $5\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AC}$ ceci signifie que : $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Par suite : $h(C)=F$

2) La figure



3) Montrons que : $AB=3CD$

On a : $\begin{cases} h(B)=E \\ h(C)=F \end{cases}$ et par suite : D'après la propriété caractéristique on obtient : $\overrightarrow{EF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{EF}\right\|=\left\|\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}\right\|$

Donc : $EF=\left|\frac{2}{5}\right|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

Donc : $EF=\frac{2}{5}BC$

4) Montrons que : $(EF)\parallel(BC)$

On a : $\begin{cases} h(B)=E \\ h(C)=F \end{cases}$ donc : $h\left((BC)\right)=(EF)$

Et puisque l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

Donc : $(EF)\parallel(BC)$

Exercice05 : $ABCD$ un parallélogramme et I et J deux points tels que :

$\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$

1) Faite une figure

2) Monter que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ et que peut-on en déduire pour les droites (BJ) et (AI) ?

3) Soit l'homothétie h de centre I qui transforme le point B en C

a) Montrer que $h\left((AB)\right)=(CD)$

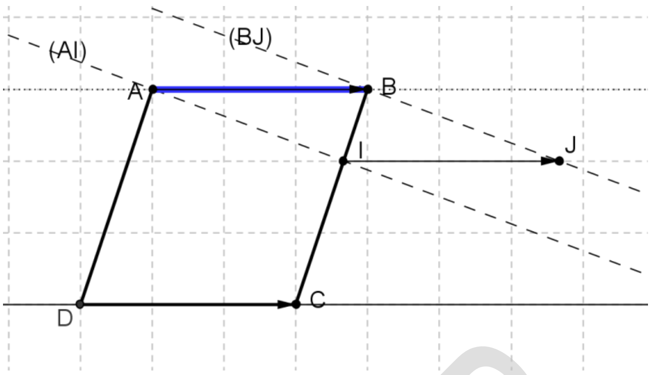
b) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k=-2$

4) Soit le point K tel que : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $h(J)=K$

b) Montrer que : $AI=\frac{1}{2}CK$

Solution : 1) La figure



2) $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$?????

On a : $ABCD$ parallélogramme donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ c a d $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$

On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$

On a donc : $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B \end{cases}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}((AI))=(BJ)$

Déduction : on sait que L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle donc $(AI)\parallel(BJ)$

3)a) on a $h(B)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle et donc passe par l'image de B c a d C donc $h((AB))=(CD)$

3)b) on a $h(B)=C$ donc $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB}$

Et on sait que $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CB}$

Donc : $3\overrightarrow{CI}=2(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB})$ c'est-à-dire : $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IB}$

Donc $3\overrightarrow{CI}-2\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ donc $\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}$

Par suite : $k=-2$

4)a) $h(J)=K$?????

On a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ et on a $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{IJ}$ donc : $\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{IJ}$ Par suite : $h(J)=K$

4)b) On a : $\begin{cases} h(J)=K \\ h(B)=C \end{cases}$ donc $\overrightarrow{CK}=-2\overrightarrow{BJ}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Donc $\|\overrightarrow{CK}\|=\|-2\overrightarrow{BJ}\|$ alors $\|\overrightarrow{CK}\|=|-2|\|\overrightarrow{BJ}\|$ c'est-à-dire : $CK=2BJ$

Et on a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ donc $ABJI$ parallélogramme donc $BJ=AI$

Donc $CK=2AI$ par suite : $AI=\frac{1}{2}CK$

Exercice06 : Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ et tels que les points A et B sont fixes avec : $AB=2$ et les points C et D sont variables avec : $AD=3$ et E un point tel que : $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$

1) Déterminer l'ensemble (E) des points D

2) Déterminer l'ensemble (F) des points C lorsque D varie dans l'ensemble (E)

3) Représenter les ensemble (E) et (F)

Solution : 1) Déterminons l'ensemble (E) des points D

On a : $D\in(E)$ signifie que : $AD=3$

Et par suite l'ensemble (E) est le cercle de centre A est de Rayon : $r=3$

2) déterminons l'ensemble (F) des points C lorsque D varie dans l'ensemble (E)

On a : $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ cela signifie que : $t_{2\overrightarrow{AB}}(D)=C$

Et puisque l'ensemble (E) des points D est le cercle de centre A est de rayon $r=3$

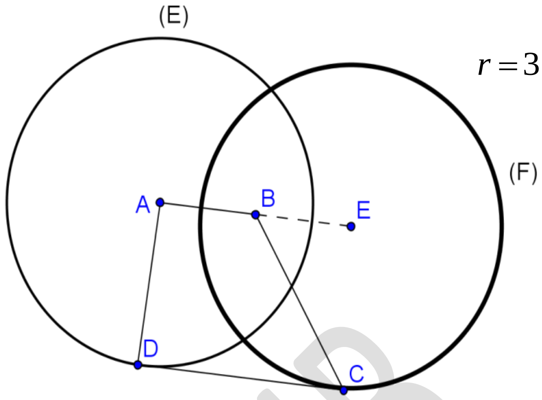
Alors (F) est l'image (E) par la translation $t_{2\overrightarrow{AB}}$

Par suite (F) est le cercle de centre $t_{2\overrightarrow{AB}}(A)$ est de rayon $r=3$

Or on a : $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$ cala signifie que : $t_{2\overrightarrow{AB}}(A)=E$

Par conséquent : (F) est le cercle de centre E est de rayon $r=3$

3) Voir la figure



Exercice07 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$\|\vec{u}\|=2\sqrt{3}$ et $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$ et $(\vec{u};\vec{v})=\frac{7\pi}{6}$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

Solution : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{2}\times\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ or $\cos(\pi+x)=-\cos x$

Donc : $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}$

Exercice08 : 1) Soit ABC un triangle tel que $AB=7$ et $AC=5$ et $BC=6$

a) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) Calculer AH

2) Sachant que $\|\vec{u}\|=4$ et $\|\vec{v}\|=2$ et $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{1}{2}$

a) Calculer : $A=(2\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{u}+2\vec{v})$ et $B=\left(\frac{\vec{u}}{2}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\frac{\vec{v}}{2}\right)$ $C=(\vec{u}-\vec{v})^2$ et $D=(2\vec{u}+3\vec{v})^2$

b) En déduire $E=\|\vec{u}-\vec{v}\|$ et $F=\|2\vec{u}+3\vec{v}\|$

Solution : 1) Calcule de $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{BA}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BC}\|^2-\|\overrightarrow{BA}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(BC^2-AB^2-AC^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2-7^2-5^2\right)=-19$$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=-19$ Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=19$

a) Calcul de AH

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ donc : $AH=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB}=\frac{19}{7}$

2) a) $A=(2\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{u}+2\vec{v})=2\vec{u}.\vec{u}+4\vec{u}.\vec{v}-3\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}.\vec{v}$

$$A=(2\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{u}+2\vec{v})=2\vec{u}.\vec{u}+4\vec{u}.\vec{v}-3\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}.\vec{v}$$

$$A=2\vec{u}^2+\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}^2=2.\|\vec{u}\|^2+\vec{u}.\vec{v}-6\|\vec{v}\|^2=2\times4^2+\frac{1}{2}-6\times2^2$$

$$A=32+\frac{1}{2}-24=\frac{15}{2}$$

$$B=\left(\frac{\vec{u}}{2}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\frac{\vec{v}}{2}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}.\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}$$

$B=\frac{1}{2}\times\left\|\vec{u}\right\|^2-\frac{3}{4}\times\vec{u}.\vec{v}-\frac{1}{2}\times\left\|\vec{v}\right\|^2=\frac{1}{2}\times 4^2-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times 2^2$

$B=8+\frac{3}{2}-2=\frac{51}{8}$

$C=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2=4^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)+2^2$

$C=16+1+4=21$

$D=\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)^2=4\vec{u}^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\vec{v}^2=4\left\|\vec{u}\right\|^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\left\|\vec{v}\right\|^2$

$D=4\times 4^2+12\left(-\frac{1}{2}\right)+9\times 2^2=64-6+36=94$

b) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=21$ donc $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=94$ par suite : $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=\sqrt{21}$

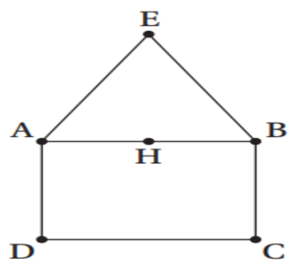
$\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)^2=94$ Donc $\left\|2\vec{u}+3\vec{v}\right\|^2=94$ par suite : $\left\|2\vec{u}+3\vec{v}\right\|=\sqrt{94}$

Exercice09 : Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs tels que : $AB=3$ et $AC=8$ et $BAC=\frac{\pi}{4}$

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos BAC=3\times 8\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=24\times\frac{\sqrt{2}}{2}=12\sqrt{2}$

Exercice10 : Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 4 et BC = 3, ABE est un triangle équilatéral, H est le milieu du segment [AB].



Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}$ e) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}$

Solution : <u>CONSEILS : a</u>) Considérez les directions des deux vecteurs.

b) Décomposez le vecteur $\overrightarrow{DH}$ en utilisant la relation de Chasles.

c) Considérez le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

d) Remarquez que $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, puis considérez le projeté orthogonal de E sur la droite (AB).

e) Utilisez les résultats des deux questions précédentes**.**

a) Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$

Les droites (BC) et (CD) sont perpendiculaires, donc les vecteurs : $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux,

Donc : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}=0$

b) Calculons $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AH}\right)=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH}$

Les vecteurs : $\overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux, (les droites (DC) et (DA) sont perpendiculaires

Donc : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}=0$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH}=DC\times AH$ Car les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens

Or : $DC=AB=4$ et $AH=\frac{1}{2}AB=2$

Donc : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH}=4\times 2=8$

Donc : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}=0+8=8$

c) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) est B, donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=16$

d) Calculons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

Le triangle ABE est équilatéral, donc (EH) est la médiatrice du segment [AB]. Le projeté orthogonal de E sur la droite (AB) est donc H.

Les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ ont colinéaires de même sens, donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE} = AB \times AH$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE} = -AB \times AH$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE} = -8$

e) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}$

Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA} = \left(-\overrightarrow{BA}\right).\left(-\overrightarrow{AE}\right) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}$$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA} = -8$ De plus $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 16$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = -8 + 16 = 8$

Exercice11 : Soit ABC un triangle tel que : $AB = 2\sqrt{7}$ et $AC = 4$ et $BC = 5$

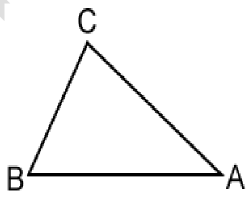
En appliquant la propriété suivante :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors on a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

1)Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ 2) Calculer : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ 3)Calculer : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On en déduit, d'après la propriété que :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left(2\sqrt{7}\right)^2 + 4^2 - 5^2\right) = \frac{1}{2} \times 19 = 9,5$$

2) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - AC^2\right)}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left(2\sqrt{7}\right)^2 + 5^2 - 4^2\right) = \frac{1}{2} \times 37 = 18,5$$

3) Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$$\boxed{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - AB^2\right)}$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(5^2 + 4^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \times 13 = 6,5$$

Exercice12 : Soit ABC un triangle tel que : AB = $\sqrt{7}$ et AC= 2 et BC= 3

I Le milieu du segment $[BC]$

1) a) Calculer : $\cos(B\hat{A}C)$

b) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

c) Calculer AI

2) Soit M un point tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

a) Calculer : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) Montrer que : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

c) Que peut-on déduire des droites : (MB) et (AC) ?

Solution : 1) a) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$

Donc : $9 = 4 + 7 - 4 \times \sqrt{7} \times \cos A$

Donc : $-2 = -4 \times \sqrt{7} \times \cos A$ donc : $\cos A = \frac{2}{4 \times \sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{7}^2} = \frac{\sqrt{7}}{14}$

1)b) On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{14} = 2 \times \frac{\left(\sqrt{7}\right)^2}{14} = \frac{14}{14} = 1$

1)c) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

Par suite : $\sqrt{7}^2 + 2^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}3^2$

Donc : $11 = 2AI^2 + \frac{9}{2}$ c'est-à-dire : $AI^2 = \frac{13}{4}$ par suite : $AI = \sqrt{\frac{13}{4}}$

2)a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}AC^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

2)b) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

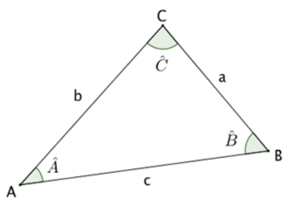
$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 + 1 = 0$

2)b) Donc : $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{AC}$ par suite : $(MB) \perp (AC)$

Exercice13 : Soit ABC un triangle tel que : $a = BC = 6$ et $A = 30°$ et $B = 73°$

Calculer b et c

Solution : D'après la formule de sinus on a : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2 \times S}{abc}$



On a donc : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 30°}{6} = \frac{1}{12}$ donc : $\frac{\sin 73°}{b} = \frac{1}{12}$

Par suite : $b = 12\sin 73° = 11.47$

Et on a : $\frac{\sin 77°}{c} = \frac{1}{12}$

Donc : $c = 12\sin 77° = 11.69$

Exercice14 : $ABCD$ un trapèze de diagonales $[AC]$ et $[BD]$ qui se coupent en I et soit S un point de l'espace qui n'appartient pas au plan (ABC) et tel que : $(SI) \perp (ABC)$

1) Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD) et l'intersection des plans (SAB) et (SDC)

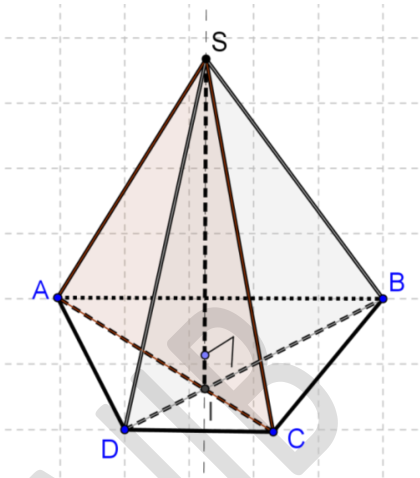
2) Vérifier que $(SI) \perp (AB)$ et montrer que les plans (SAC) et (ABC) sont orthogonaux

3) On suppose que ABC est un triangle rectangle en B et que :

$SI = 3$ et $BC = \frac{1}{4}$; $AB = 2$ et $CD = 3$

Calculer alors le volume de la pyramide $SABCD$

Solution : 1) a)



On a : $(SAC) \neq (SBD)$ (1) car les points : S ; A ; B ; C ; D sont non coplanaires

On a : $S \in (SAC)$ et $S \in (SBD)$ (2)

On a aussi : $I \in (AC)$ et $(AC) \subset (SAC)$

Donc : $I \in (SAC)$

On a aussi : $I \in (BD)$ et $I \in (BD)$ donc : $I \in (SBD)$

Donc : $I \in (SAC)$ et $I \in (SBD)$ (3)

De (1) ; (2) et (3) en déduit que : $(SAC) \cap (SBD) = (IS)$

b) On a : (SAB) et (SDC) sont non confondus

Et $S \in (SAB)$ et $S \in (SDC)$

Et puisque : $(AB) \subset (SAB)$ et $(DC) \subset (SDC)$ et $(DC) \parallel (AB)$ alors d'après le théorème du toit

Les plans (SAB) et (SDC) se coupent suivant une droite qui passe par S et parallèle au droites (AB) et (DC)

2)a) On a : $(SI) \perp (ABC)$ et $(AB) \subset (ABC)$

Donc : $(SI) \perp (AB)$

b) On a : $(SI) \subset (SAC)$ et $(SI) \perp (ABC)$

Par suite : $(ABC) \perp (SAC)$

3) On a : $((AB) \perp (BC))$ donc la surface du trapèze $ABCD$ est :

$$S = \frac{(DC + AB) \times BC}{2} = \frac{(3+2) \times \frac{1}{4}}{2} = \frac{5}{8}$$ (Car (BC) est une hauteur)

Et le volume : $V = \frac{1}{3} \cdot S \times (SI)$ de la pyramide $SABCD$ est : $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{8}\right) \cdot 3 = \frac{5}{8}$ (unité)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien