http://www.xriadiat.com **DL5 /K** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°5 Sur les : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice 01 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}$

1)a) Déterminer D_f

b) Calculer : $f(0)$; $f(-3)$

c) Déterminer les antécédents de 0 et 1 par f (s'ils existent)

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-x^2+2x+24}$ Montrer que : $f=g$

Solution : 1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4+x\geq 0 \ \ et \ \ 6-x\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -4 \ \ et \ \ x\leq 6\}$ Donc $D_f=[-4,6]$

b) Calcul des images :

$f(0)=\sqrt{4+0}\times\sqrt{6-0}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ et $f(-3)=\sqrt{4-3}\times\sqrt{6+3}=\sqrt{1}\times\sqrt{9}=3$

c)

• x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f .

Équivaut à: chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=0$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}=0$ ou $\sqrt{6-x}=0$

Équivaut à : $4+x=0$ ou $6-x=0$

Équivaut à : $x=-4$ ou $x=6$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : -4 et 6.

• x est l'antécédents de 1 par f signifie que 1 est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=1$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=0$ Équivaut à : $(4+x)(6-x)=1$ Équivaut à : $24-4x+6x-x^2=1$

Équivaut à : $-x^2+2x+23=0$

$\Delta=b^2-4ac=4+4\times(-23)=4+92=96>0$. $x_1=\frac{-2+\sqrt{96}}{2\times -1}=\frac{2-\sqrt{96}}{2}$ et $x_1=\frac{-2-\sqrt{96}}{2\times -1}=\frac{2+\sqrt{96}}{2}$

Finalement les antécédents de 1 par f sont : $\frac{2-\sqrt{96}}{2}$ et $\frac{2+\sqrt{96}}{2}$

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-x^2+2x+24}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/-x^2+2x+24\geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 24\times -1=4+96=100>0$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{100}}{2\times -1}=\frac{8}{-2}=-4$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{100}}{2\times -1}=\frac{-12}{-2}=6$

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
$-x^2+2x+24$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_g=[-4,6]$

On a donc : $D_f=D_g$.

$f(x)=\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=\sqrt{(4+x)(6-x)}=\sqrt{-x^2+2x+24}=g(x)$

Conclusion : $f=g$

Exercice 02 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2-4x}$ 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-2x}}$

4) $f(x)=\sqrt{-5x^2+6x+8}-2x+1$ 5) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{\sqrt{2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}}}-1$

6) $f(x)=\dfrac{3x^2+|x|-1}{\sqrt{16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}}}$ 7) $f(x)=(3x^2+2)\sqrt{-\frac{1}{2}x^2+x-4}$

8) $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+5}+\dfrac{1}{x+1}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2-4x}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+1\geq 0 \text{ et } 2-4x\neq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2-4x\neq 0\}$ car $x^2+1\geq 0$ (toujours vraie)

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-4x\neq -2\}$ C'est-à-dire : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\frac{-2}{-4}\right\}$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\frac{1}{2}\right\}$ D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\geq 0 \text{ et } x\neq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -1 \text{ et } x\neq 0\}$ donc : $D_f=[-1;+\infty[-\{0\}=[-1;0[\cup]0;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-2x}}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\geq 0 \text{ et } 4-2x>0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -1 \text{ et } -2x>-4\}$ C'est-à-dire : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -1 \text{ et } x<2\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\leq x<2\}$ Donc $D_f=[-1,2[$

4) $f(x)=\sqrt{-5x^2+6x+8}-2x+1$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-5x^2+6x+8\geq 0\}$

Calculons le discriminant du trinôme $-5x^2+6x+8$: $a=-5$; $b=6$; $c=8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=6^2-4\times 8\times(-5)=36+160=196=14^2>0$

Comme $\Delta>0$,le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6-\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\dfrac{-6-14}{-10}=2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6+\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\dfrac{-6+14}{-10}=-\dfrac{4}{5}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-4/5$		2		$+\infty$
$-5x^2+6x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left[-\frac{4}{5};2\right]$

5) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{\sqrt{2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}}}-1$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0\right\}$

$2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}$: Calculons le discriminant du trinôme $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}$:

$a=2$; $b=-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $c=\sqrt{6}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)^2-4\times 2\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $\Delta=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$

6) $f(x)=\dfrac{3x^2+|x|-1}{\sqrt{16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}\geq0\right\}$

Calculons le discriminant du trinôme $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$: $a=16$; $b=-\frac{8}{3}$; $c=\frac{1}{9}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\frac{8}{3}\right)^2-4\times16\times\frac{1}{9}=\frac{64}{9}-\frac{64}{9}=0$

Comme $\Delta=0$, trinôme possède une seule racine (dite double) : $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-\frac{8}{3}}{2\times16}=\dfrac{1}{12}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$	$\frac{1}{12}$	$+\infty$
$16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$	+	0	+

Donc : $D_f = \left]-\infty;\frac{1}{12}\right[\cup\left]\frac{1}{12};+\infty\right[$

7) $f(x)=(3x^2+2)\sqrt{-\frac{1}{2}x^2+x-4}$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{2}x^2+x-4\geq 0\right\}$

$-\frac{1}{2}x^2+x-4$: Calculons son discriminant : $a=-\frac{1}{2}$; $b=1$; $c=-4$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times(-4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1-8=-7<0$ et $a=-\frac{1}{2}<0$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$ $+\infty$
$-\frac{1}{2}x^2+x-4$	$-$

Donc : $D_f=\varnothing$

8) $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+5}+\frac{1}{x+1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+6x+5\geq 0 \text{ et } x+1\neq 0\right\}$ C'est-à-dire : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+6x+5\geq 0 \text{ et } x\neq -1\right\}$

Étudions le signe du trinôme $P(x)=3x^2+6x+5$; $a=3>0$;

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$3x^2+6x+5$	+

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\neq -1\right\}$ C'est-à-dire : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty,-1[\cup]-1;+\infty[$

Exercice 03 : 1) Etudier la parité de la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^4}{x^2-1}$

2) Etudier la monotonie de la fonction g définie par : $g(x)=\frac{5}{x}+1$ sur $I=]0;+\infty[$

Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\neq 0\right\}$

$x^2-1=0$ Signifie $x^2=1$

Équivaut à : $x=1$ou $x=-1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $f(-x)=\frac{(-x)^4}{(-x)^2-1}=\frac{x^4}{x^2-1}=f(x)$

$f(-x)=f(x)$ Donc f est une fonction paire

2)Soit $x_1\in]0;+\infty[$ et $x_2\in]0;+\infty[$ tels que : $x_1\prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$

Donc : $\frac{5}{x_1} > \frac{5}{x_2}$ car $5 \succ 0$

Donc : $\frac{5}{x_1}+1 > \frac{5}{x_2}+1$ c'est-à-dire : $f(x_1) > f(x_2)$

D'où f est strictement décroissante sur $I =]0;+\infty[$

Exercice 04 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x^2 + 2x + 1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$ Montrer que : $T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = x_1 + x_2 + 2$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ On a : $0 \leq f(x)$

b) En déduire que : pour tout $x \in [-1;3]$ On a : $0 \leq f(x) \leq 16$

c) En déduire que : pour tout $x \in [-5;-2]$ On a : $1 \leq f(x) \leq 16$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = x + 3$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x) < f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $-x^2 - 2x + m - 1 = 0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Solution : $f(x) = x^2 + 2x + 1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

2)Soient : $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(x_2^2+2x_2+1)-(x_1^2+2x_1+1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2^2+2x_2+1-x_1^2-2x_1-1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{x_2^2 - x_1^2 + 2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2) = x_1 + x_2 + 2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I = [-1;+\infty[$

Soient : $x_1 \in [-1;+\infty[$ et $x_2 \in [-1;+\infty[$ alors : $x_1 \geq -1$ et $x_2 \geq -1$ et $x_1 \neq x_2$ donc : $x_1 + x_2 > -2$

Par suite : $x_1 + x_2 + 2 > 0$.

Donc $T(x_1;x_2) > 0$ d'où : f est strictement croissante sur $I = [-1;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J =]-\infty;-1]$

Soient : $x_1 \in]-\infty;-1]$ et $x_2 \in]-\infty;-1]$ alors : $x_1 \leq -1$ et $x_2 \leq -1$ et $x_1 \neq x_2$

Cela implique $x_1 + x_2 < -2$

Par suite : $x_1+x_2+2<0$.

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)+1=1-2+1=0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1)=0$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-1)\leq f(x)$

Par suite : $0\leq f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in[-1;3]$ alors : $-1\leq x\leq 3$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-1;3]$

Alors : $f(-1)\leq f(x)\leq f(3)$ et comme : $f(-1)=0$ et $f(3)=3^2+2\times3+1=9+6+1=16$

Par suite : $0\leq f(x)\leq 16$

b) Soit : $x\in[-5;-2]$ On a alors : $-5\leq x\leq -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-1]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-5;-2]$

Alors : $f(-2)\leq f(x)\leq f(-5)$ et comme :

$f(-5)=(-5)^2+2\times(-5)+1=25-10+1=16$ Et $f(-2)=(-2)^2+2\times(-2)+1=4-4+1=1$

Par suite : $1\leq f(x)\leq 16$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2+2x+1=0$ Signifie : $(x+1)^2=0$

Signifie : $x+1=0$ c'est-à-dire : $x=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(-1;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

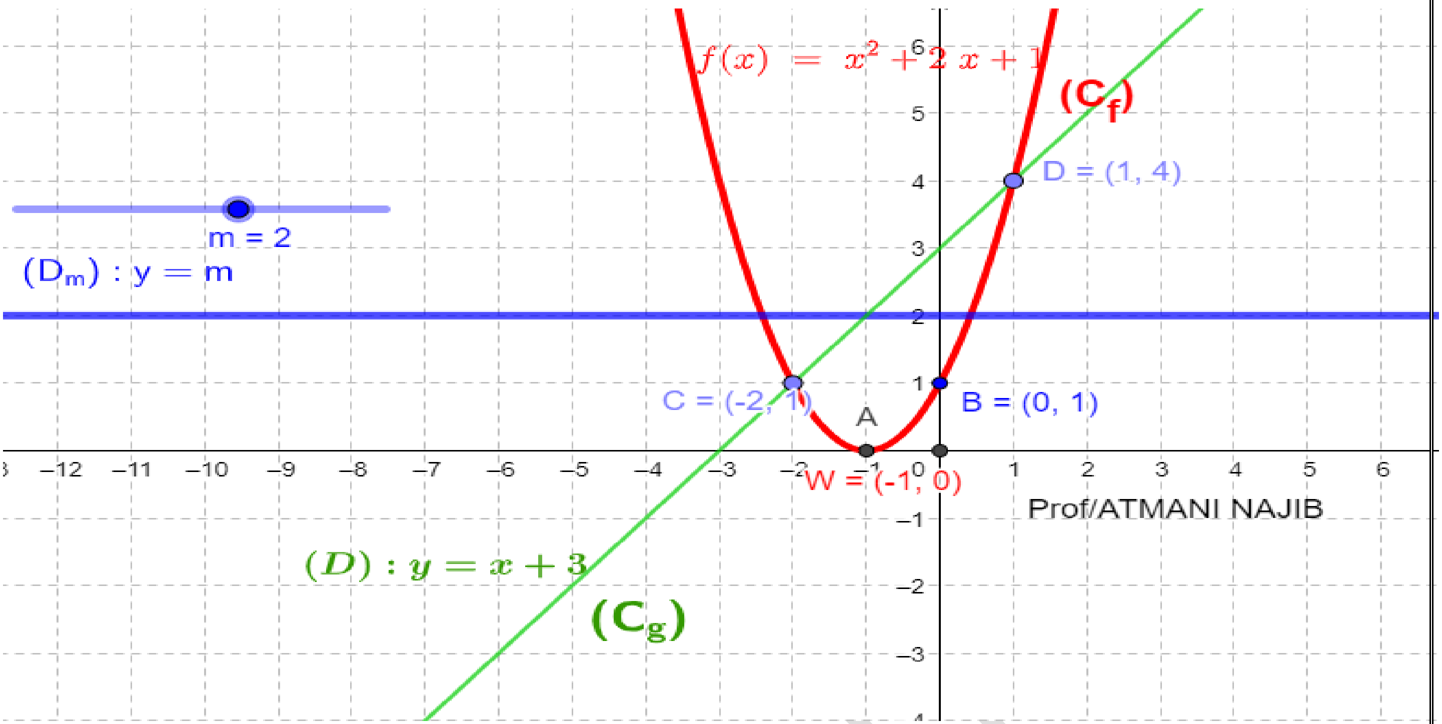
Et on a $f(0)=0^2+2\times0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

x	-2	1
g(x)	1	4



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 1$ donc $S = \{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $x^2 + 2x + 1 = x + 3$ c'est-à-dire : $x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times(-2)\times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Donc : $S = \{-2;1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x) < f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessous de (C_f) si $x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x) < f(x)$:

$g(x) < f(x)$ Signifie $x + 3 < x^2 + 2x + 1$ C'est-à-dire : $x^2 + x - 2 > 0$ Les racines sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2 - 2x + m - 1 = 0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

$-x^2 - 2x + m - 1 = 0$ Signifie $m = x^2 + 2x + 1$

Signifie : $m = f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y = m$

Si : $m < 0$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m = 0$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m > 0$ il y'a deux solutions

Exercice 05 : **Partie A** : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x-2$

(C_f) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (déterminer a; α et β)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ (C_g) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_g

2) Ecrire $g(x)$ sous la forme : $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-3,2$; $-1,2$; $1,2$

Solution : Partie A :1) On a : f est une fonction polynôme ; donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x)=(x^2+2x)-2=(x^2+2x+1^2-1^2)-2=\left((x+1)^2-1\right)-2=(x+1)^2-3$

Donc : $f(x)=(x+1)^2-3$ Donc $\alpha=1$ et $\beta=-3$ et $a=1$

Méthode2 : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=2$ et $c=-2$

Donc $\alpha=\dfrac{b}{2a}=\dfrac{2}{2\times1}=1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-2=-3$

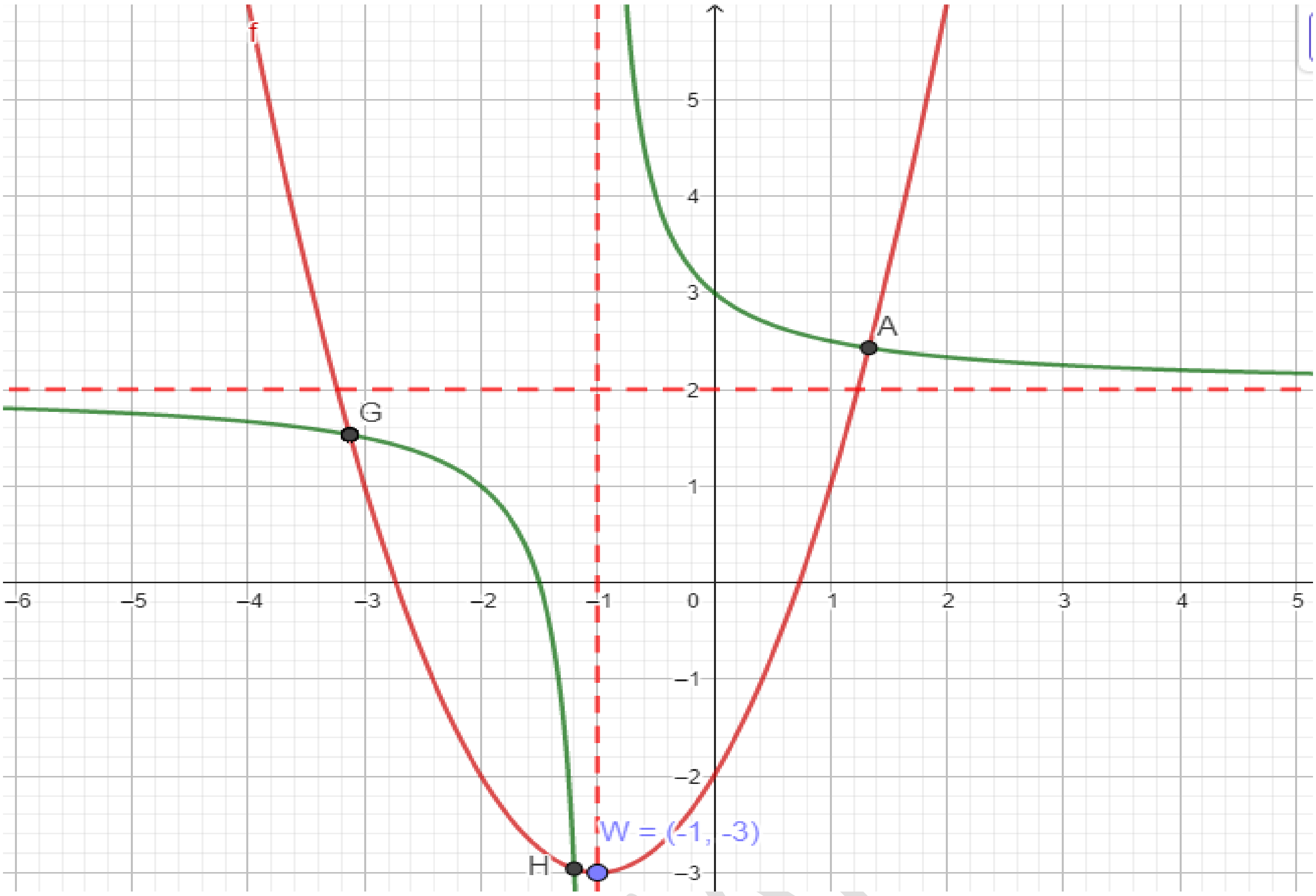
Donc : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=1(x+1)^2-3$

3) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$; $W(-1;-3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

4)Tableau de variations de f : On a $a=1>0$ donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

3)



Partie B :1) Soit g une fonction numérique : $g(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -1\}$; Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Si $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ on a : la division euclidienne de : $2x+3$ par $x+1$ donne : $2x+3=2(x+1)+1$

$g(x)=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=2+\dfrac{1}{x+1}$ et $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$

Donc : $\alpha=1$ et $\beta=2$ et $k=1>0$

3) Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$; $\Omega(-1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=-1$ et $y=2$

4) Le tableau de variations de g: $k=1>0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	$\searrow$	||	$\searrow$

5) Voir partie1

x	-1	0	1	2
g(x)		3	5/2	7 /3

6)Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-1,2$; $-3,2$; $1,2$

(C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in\left]-3,2;-1,2\right[\cup\left]-1;1,2\right[$

Donc : $S=\left]-3,2;-1,2\right[\cup\left]-1;1,2\right[$

Exercice 06: Soit f une fonction tel que : $f(x)=\dfrac{x}{|x|-2}$

(C_f) Sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que : f est impaire

3)a) Montrer que la courbe représentative de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ est une portion d'une hyperbole que l'on précisera

b) En déduire une méthode pour tracer la courbe (C_g) de fonction g

4)Etudier les variations de de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ puis donner le tableau de variation de f sur D_f

5) Construire (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution : $f(x)=\dfrac{x}{|x|-2}$

1)On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|-2\neq 0$

Signifie $|x|\neq 2$ c'est-à-dire : $x\neq 2$ et $x\neq -2$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

2)a) Montrons que f est impaire :

☞ $x\in D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$ Signifie $x\neq 2$ et $x\neq -2$

Signifie $-x\neq -2$ et $-x\neq -(-1)$

Signifie $-x\neq -1$ et $-x\neq 2$

Signifie $-x\in D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

☞ $f(-x)=\dfrac{-x}{|-x|-2}=\dfrac{-x}{|x|-2}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $f(-x)=-\dfrac{x}{|x|-2}=-f(x)$ par suite : f est impaire

3)a) Soit : $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$ donc : $x\geq 0$

Donc : $|x|=x$ par suite : $f(x)=\dfrac{x}{|x|-2}=\dfrac{x}{x-2}$

Et puisque f est impaire alors il suffit de tracer son symétrique par rapport au centre du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$ on a : $f(x)=\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{x-2+2}{x-2}=\dfrac{x-2}{x-2}+\dfrac{2}{x-2}=1+\dfrac{2}{x-2}$

Donc : $f(x)=1+\dfrac{2}{x-2}$ Pour tout $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$

Puisque : $f(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $k=1>0$

Donc : sur $[0;2[\cup]2;+\infty[$ (C_f) est une portion d'une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=1$

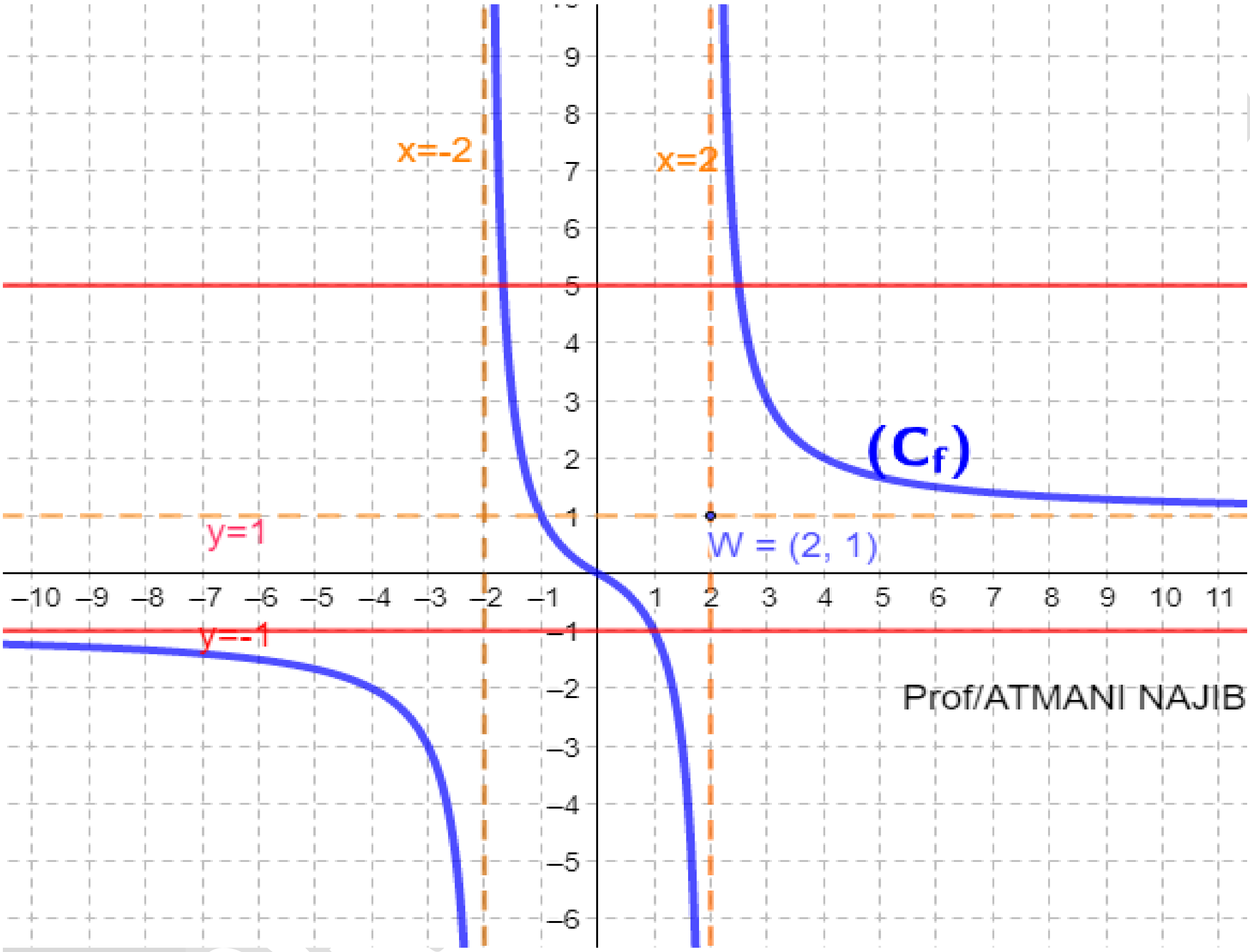
b) la courbe (C_f) de fonction f sur $[0;2[\cup]2;+\infty[$ coïncide avec la portion de l'hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=1$

4)Puisque : $k=1>0$ alors f est strictement décroissante sur $[0;2[$ et $]2;+\infty[$

Puisque f est impaire alors en déduit le tableau de variation de f sur D_f

x	$-\infty$ -2	0	2 $+\infty$
$f(x)$	↘	↘ 0 ↘	↘

5) Construction de (C_f) dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$



Exercice 07 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x|x|-2x+2$

1)a) Montrer que $f(x)=(x-1)^2+1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

b) Montrer que $f(x)=-(x+1)^2+3$ pour tout $x\in\mathbb{R}^-$

2) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
$-x|x|+2x-2+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $1\le f(x)\le 3$.

Solution : 1) a) Soit : $x\in\mathbb{R}^+$ alors : $|x|=x$

Donc : $f(x)=x^2-2x+2=x^2-2x+1+1$ par suite : $f(x)=(x-1)^2+1$

1)b) Soit : $x\in\mathbb{R}^-$ alors : $|x|=-x$

Donc : $f(x)=-x^2-2x+2=-x^2-2x-1+3$

Donc : $f(x)=-(x^2+2x+1)+3$ par suite : $f(x)=-(x+1)^2+3$

2) ☞ sur $\mathbb{R}^+$: on a ; $f(x)=(x-1)^2+1$

l'équation de (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est : $y=f(x)$

Signifie : $y=(x-1)^2+1=a(x+\alpha)^2+\beta$

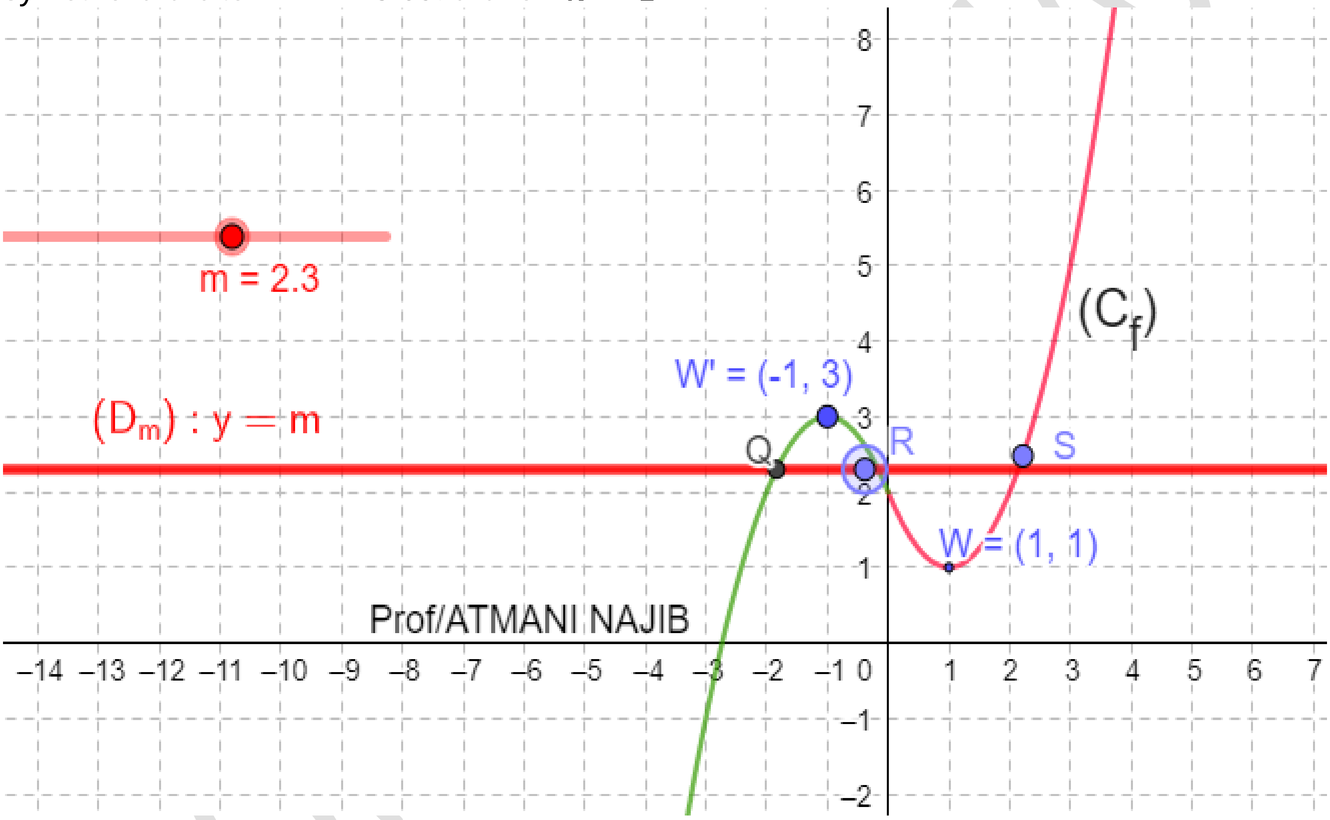
Donc $\alpha=-1$ et $\beta=1$

La courbe (C_f) est une partie d'une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$;$W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. C'est-à-dire : $x=1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$: on a ; $f(x)=-(x+1)^2+3=a(x+\alpha)^2+\beta$

Donc $\alpha=1$ et $\beta=3$

La courbe (C_f) est une partie d'une parabole de sommet $W'(-\alpha;\beta)$; $W'(-1;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. C'est-à-dire : $x=-1$



3) Résolution graphique de l'équation $-x|x|+2x-2+m=0$ avec $m\in\mathbb{R}$:

$-x|x|+2x-2+m=0$ Signifie $m=x|x|-2x+2$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si: $m>3$ ou $m<1$ il y'a une solution

Si: $m=3$ ou $m=1$ il y'a deux solutions

Si: $1<m<3$ il y'a une trois solutions

4) Résolution graphique de l'inéquation : $1\le f(x)\le 3$

$1\le f(x)\le 3$ Signifie (C_f) comprise entre les droites : $y=1$ et $y=3$

On va résoudre d'abord l'équation : $f(x)=3$

☞ Sur $\mathbb{R}^+$: $f(x)=3$ Signifie que : $(x-1)^2+1=3$

Signifie $(x-1)^2=2$ Signifie que : $x-1=\sqrt{2}$ ou $x-1=-\sqrt{2}$

Signifie $x=\sqrt{2}+1$ ou $x=-\sqrt{2}+1\notin\mathbb{R}^+$

Signifie $x=\sqrt{2}+1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$: $f(x)=3$ Signifie $-(x+1)^2+3=3$

Signifie $-(x+1)^2=0$

Signifie $x=-1$

On va aussi résoudre l'équation : $f(x)=1$

☞ Sur $\mathbb{R}^+$: $f(x)=1$ Signifie $(x-1)^2+1=1$

Signifie $(x-1)^2=0$

Signifie $x=1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$: $f(x)=1$ Signifie $-(x+1)^2+3=1$

Signifie $-(x+1)^2=-2$

Signifie $(x+1)^2=2$

Signifie $x+1=\sqrt{2}$ ou $x+1=-\sqrt{2}$

Signifie $x=\sqrt{2}-1\notin\mathbb{R}^-$ ou $x=-\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}^-$

Signifie $x=-\sqrt{2}-1$

Par suite : $1\leq f(x)\leq 3$ Signifie $-\sqrt{2}-1\leq x\leq 1+\sqrt{2}$

Finalement : $S=\left[-\left(\sqrt{2}+1\right);1+\sqrt{2}\right]$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de $\left(C_f\right)$ et la droite : $y=m$

Si : $m<5$ l'équation n'admet pas de solution
Si : $m=5$ il y'a une solution c'est : x = 1
Si : $m>5$ il y'a deux solutions

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien