

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°5
Sur les : FONCTIONS - Généralités

Exercice 01 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$$1) f(x) = \frac{6x^3 + |2x|}{|x-3| - |x+5|} \quad 2) f(x) = \frac{-x^2 + 2006}{|x+2| + 1} \quad 3) f(x) = \sqrt{x^2 + 27} - 5\sqrt{3x}$$

$$4) f(x) = \frac{-2x+6}{|x^2-2x+3|-2} \quad 5) f(x) = \frac{x-2}{2x^2-3x-2} - \frac{x^2}{2x^2+13x+6}$$

$$6) f(x) = \frac{x^3-2x-2021}{2x^2-3|x|-2} \quad 7) f(x) = \frac{5x^5-5x-1}{2x^4-3x^2-2}$$

Solution : 1) $f(x) = \frac{6x^3 + |2x|}{|x-3| - |x+5|}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x-3| - |x+5| \neq 0\}$$

$$|x-3| - |x+5| = 0 \text{ Signifie que : } |x-3| = |x+5|$$

$$\text{Signifie que : } x-3 = x+5 \text{ ou } x-3 = -(x+5)$$

$$\text{Signifie que : } -3 = 5 \text{ (impossible) ou } x-3 = -x-5$$

$$\text{Signifie que : } 2x = -2$$

$$\text{Signifie que : } x = -1 \text{ Donc : } D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$2) f(x) = \frac{-x^2 + 2006}{|x+2| + 1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x+2| + 1 \neq 0\}$$

$$|x+2| + 1 = 0 \text{ Signifie que : } |x+2| = -1 \text{ pas de solutions Car } |x+2| \geq 0$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R}$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 + 27} - 5\sqrt{3x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 27 \geq 0 \text{ et } 3x \geq 0\} \quad \text{Or } x^2 + 27 \geq 0 \text{ et } 3 > 0$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$$

$$D_f = [0; +\infty[$$

$$4) f(x) = \frac{-2x+6}{|x^2-2x+3|-2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x^2-2x+3|-2 \neq 0\}$$

$$|x^2-2x+3|-2 = 0 \text{ Signifie que : } |x^2-2x+3| = 2$$

$$\text{Signifie que : } x^2-2x+3 = 2 \text{ ou } x^2-2x+3 = -2$$

$$\bullet \text{ Résolution de } x^2-2x+3 = 2$$

$$x^2-2x+3 = 2 \text{ Signifie que : } x^2-2x+1 = 0$$

$$\text{Signifie que : } (x-1)^2 = 0$$

$$\text{Signifie que : } x-1 = 0$$

$$\text{Signifie que : } x = 1$$

La seule solution de $x^2 - 2x + 3 = 2$ est 1.

• Résolution de $x^2 - 2x + 3 = -2$.

$x^2 - 2x + 3 = -2$ Signifie que : $x^2 - 2x + 5 = 0$

On calcule son discriminant : $\Delta = -16$.

Ainsi l'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$ n'a aucune solution réelle

Au final, seule solution : $x = 1$

D'où : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$

$$5) f(x) = \frac{x-2}{2x^2-3x-2} - \frac{x^2}{2x^2+13x+6}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3x - 2 \neq 0 \text{ et } 2x^2 + 13x + 6 \neq 0\}$$

Le discriminant de $2x^2 - 3x - 2$ est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 2$$

Le discriminant de $2x^2 + 13x + 6$ est : $\Delta' = 13^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121$ et ses racines sont :

$$x_1' = \frac{-13 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -6 \text{ et } x_2' = \frac{-13 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R} - \left\{-6; -\frac{1}{2}; 2\right\}$$

$$6) f(x) = \frac{x^3 - 2x - 2021}{2x^2 - 3|x| - 2}; D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3|x| - 2 \neq 0\}$$

$$2x^2 - 3|x| - 2 = 0 \text{ Equivalent à : } 2|x|^2 - 3|x| - 2 = 0 \text{ car } |x|^2 = x^2$$

Faisons un changement de variable en posant : $X = |x|$ nous obtenons l'équation : $2X^2 - 3X - 2 = 0$

$a = 2$, $b = -3$ et $c = -2$ Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 2$$

Qui est équivalent à : $|x| = -\frac{1}{2}$ ou $|x| = 2$

Mais l'équation : $|x| = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$|x| = 2$ Signifie : $x = 2$ ou $x = -2$

$$\text{Par suite : } D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

$$7) f(x) = \frac{5x^5 - 5x - 1}{2x^4 - 3x^2 - 2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^4 - 3x^2 - 2 \neq 0\}$$

$$2x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \text{ Equivalent à : } 2(x^2)^2 - 3x^2 - 2 = 0$$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^2$ nous obtenons donc : l'équation : $2X^2 - 3X - 2 = 0$

$a = 2$, $b = -3$ et $c = -2$ et $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 2$$

Qui est équivalent à : $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 2$ et par suite : $x^2 = -\frac{1}{2}$ ou $x^2 = 2$

Mais l'équation : $x^2 = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2 = 2$ Signifie : $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Par suite : $D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Exercice 02 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + x$

1) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right) = -x^2 + x$

2)a) Démontrer que : $f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tous $x \in \mathbb{R}$

b) Que peut-on déduire ?

Solution : 1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2) On met la fonction sous la forme canonique : $f(x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

On a : $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ donc $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tous $x \in \mathbb{R}$

3) On a : $f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire : $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$

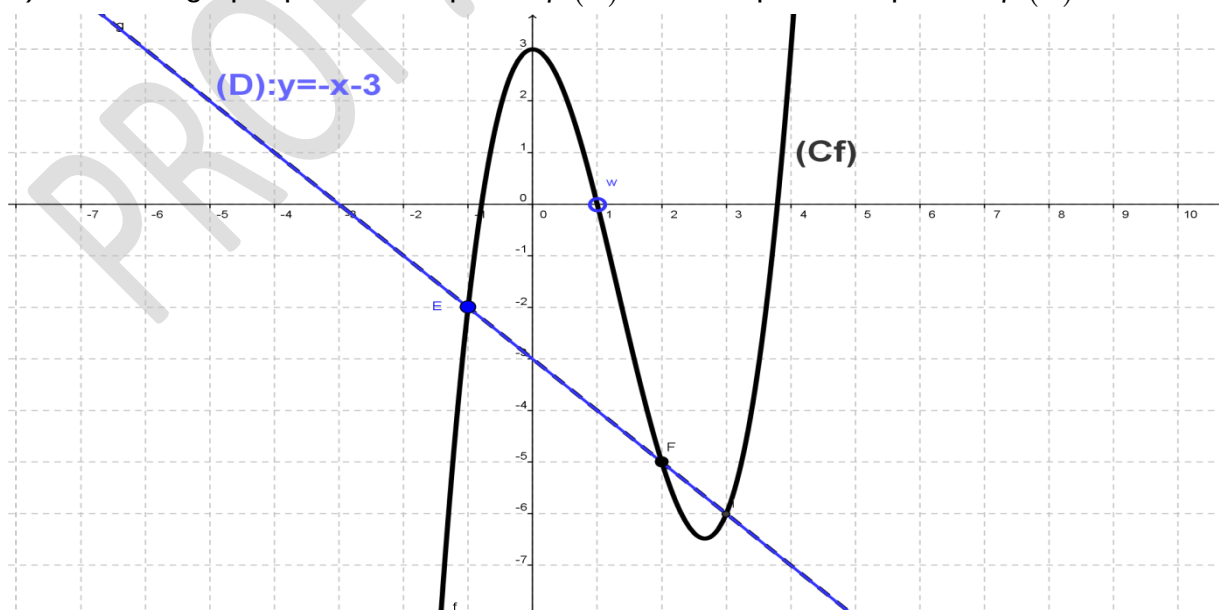
Donc : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 03 : Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ et la droite (D) d'équation $y = -x - 3$ (voir la figure)

1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$ puis l'inéquation $f(x) < 3$.

2) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ et l'inéquation $f(x) \geq 0$

3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -x - 3$ puis l'inéquation $f(x) \leq -x - 3$



Solution : 1) $f(x) = 3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S = \{0; 4\}$

2- $f(x) = 0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 :

$$S = \{a; 1; b\} \text{ Avec } -1 < a < -0.5 \text{ et } 3.5 < b < 4$$

$$f(x) \geq 0 \quad S = [a; 1] \cup [b; +\infty[$$

3- $f(x) = -x - 3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D :

$$y = -x - 3 \text{ donc } S = \{-1; 2; 3\}$$

$$f(x) \leq -x - 3 \quad S =]-\infty; -1] \cup [2; 3]$$

Exercice 04 : On considère les fonctions : $f : x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $g : x \rightarrow g(x) = \frac{1}{x+1}$.

Le but de l'exercice est d'étudier la position relative de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) Montrer que, pour tout nombre x réel : $x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$

3) Montrer que pour tout nombre x réel : $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$

En déduire le signe de l'expression : $x^2 + 2x + 2$

4) A l'aide de ce qui précède, déterminer la position relative des courbes (C_f) et (C_g)

Solution : 1) Dans l'expression de $f(x)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

Tandis que pour : $g(x)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+1=0$ soit $x=-1$ et donc,

$$D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

2) Pour tout x réel : $(x-1)(x^2 + 2x + 2) = x^3 + 2x^2 + 2x - x^2 - 2x - 2 = x^3 + x^2 - 2$

3) Pour tout x réel : $(x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x + 2$

Pour tout nombre x réel : $(x+1)^2 \geq 0$ et donc $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 > 0$

Ainsi : $x^2 + 2x + 2$ est toujours strictement positif.

4) Pour comparer les positions des courbes (C_f) et (C_g) , on étudie le signe de : $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^3 + x^2 - 2}{2(x+1)}$$

$$\text{Donc : } f(x) - g(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}{2(x+1)}$$

Donc, d'après de ce qui précède on a :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$ $	$-$	$+$
x^2+2x+2	$+$	$ $	$+$	$+$
$2(x+1)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$
$\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{2(x+1)}$	$+$	$\parallel$	$-$	$+$

Ainsi (C_f) est au-dessus de (C_g) lorsque : $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

Et (C_f) au-dessous de (C_g) lorsque : $x \in]-1; 1]$ et Les deux courbes se coupent en : $x=1$

Exercice 05: Soient f et g les deux fonctions définies par :

$$g(x) = \frac{2x+3}{x-1} \text{ et } f(x) = x^2 + 2$$

1)a) Déterminer D_g

b) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ses éléments caractéristiques

c) Déterminer le Tableau de variations de g

2) a) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

b) Déterminer le Tableau de variations de f

3) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

5) a) Etudier graphiquement le signe de la fonction g

b) Etudier algébriquement le signe de la fonction g

6) (On admet que (C_g) coupe (C_f) en un point d'abscisse : $\lambda = 2,11$)

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

Solution : 1) a) $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$; on a $g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Donc : $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$; On a : $g(x) = \frac{2x+3}{x-1} = \frac{(2x-2)+2+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$

On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $g(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha; \beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\alpha$ et $y = \beta$

Dans notre exercice on a : $g(x) = 2 + \frac{5}{x-1}$ si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ donc : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ et $k = 5 > 0$

Donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(1; 2)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = 1$ et $y = 2$

c) Puisque : $k = 5 > 0$ alors : g est strictement décroissante sur les intervalles : $] -\infty; 1[$ et $] 1; +\infty[$

Donc le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$

2) a) On a f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$ (forme canonique)

Dans un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite : $x = -\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x) = x^2 + 2 = 1(x - 0)^2 + 2$ (la forme canonique) : $\alpha = 0$ et $\beta = 2$

Dans un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha; \beta)$ c'est-à-dire :

$W(0; 2)$ et d'axe de symétrie la droite : $x = -\alpha = 0$

Le tableau de variations de f :

b) Dans notre exercice on a : $-\alpha = 0$ et $\beta = 2$ et $a = 1 > 0$

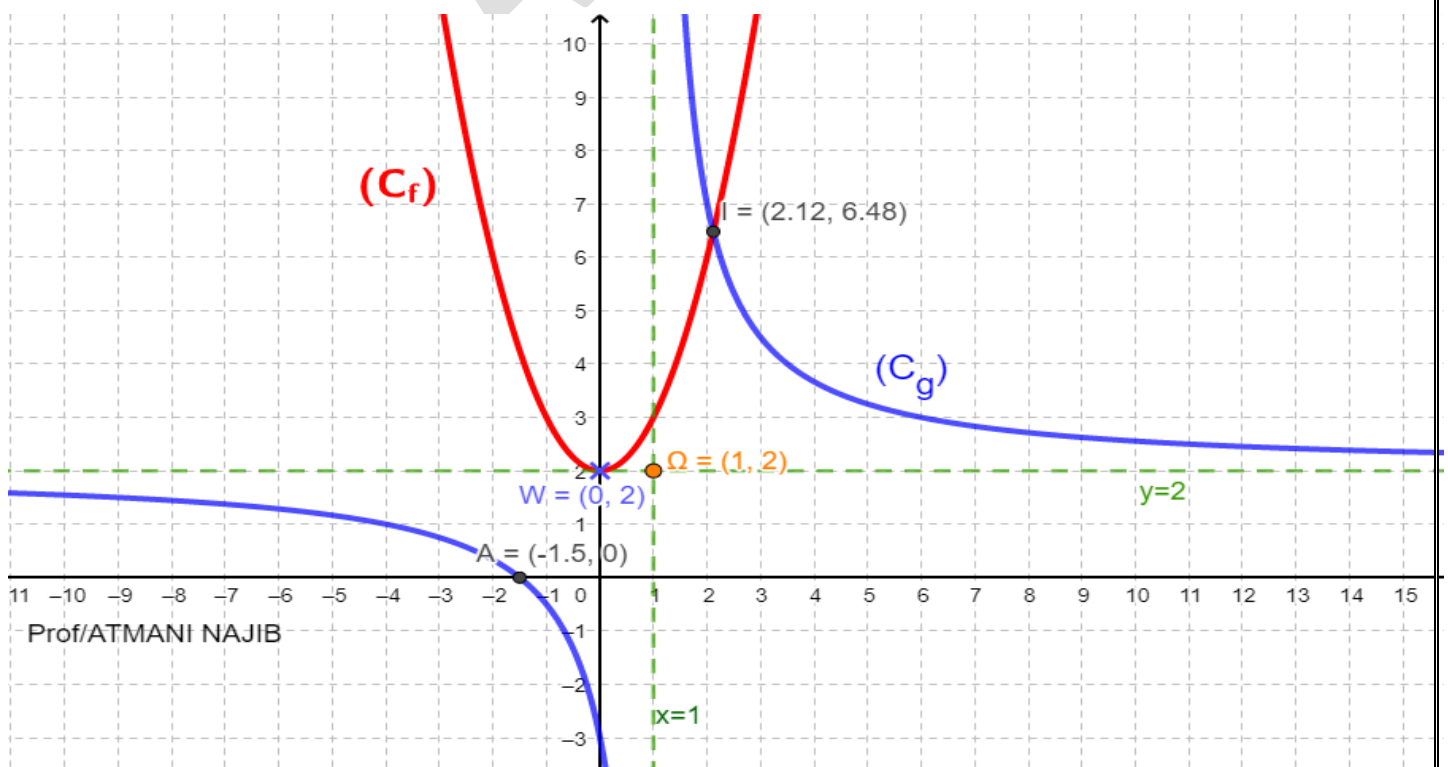
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

3) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $A\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$

4) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère



5) a) Etude graphique du signe de la fonction g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

$g(x) \geq 0$ si et seulement si la courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses

$g(x) \geq 0$ Signifie que $x \in \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup]1; +\infty[$

$g(x) \leq 0$ Signifie que $x \in \left[-\frac{3}{2}; 1 \right[$

b) Etudions algébriquement le signe de la fonction g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Voici le tableau de signe qui résume le signe de g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$\frac{2x+3}{x-1}$	+	0	-	+

7) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$:

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ par suite : $S = \{1\}$

7)b) Résolution graphique de l'inéquation $g(x) \geq f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x \in]1; \lambda]$ c'est-à-dire : $x \in]1; 2,12]$

Donc $S =]1; \lambda] =]1; 2,12]$

Exercice 06 : Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{2-x}$ et (C_g) La courbe représentative de g

1) a) Déterminer la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer le tableau de variation de g

c) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $g(x) = x$ et $g(x) = 1+x$

b) Donner une interprétation graphique des résultats

c) Déterminer le signe de : $m^2 + 4m$

d) Déterminer les valeurs de m ou la courbe (C_g) coupe la droite d'équation :
 $y = x + m$ en deux points

3) On considère la fonction f tel que : $f(x) = \frac{2x}{x^2 - x + 1}$

a) Déterminer D_f

b) Montrer : $f(x) - f(y) = 2(x-y) \frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$ si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

c) En déduire la monotonie de f dans : $[-1; 1]$ et $[1; +\infty[$

d) Calculer : $f(x) + \frac{2}{3}$ puis en déduire que $-\frac{2}{3} \leq f(x)$; si $x \in \mathbb{R}$

e) Montrer que : si $x \in \mathbb{R}$ alors : $-\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2$

Solution : 1) a) Déterminons la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques : $g(x) = \frac{1}{2-x}$

On a $g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Donc : $D_g = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

En générale si : $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $c \neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $W\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ et

d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

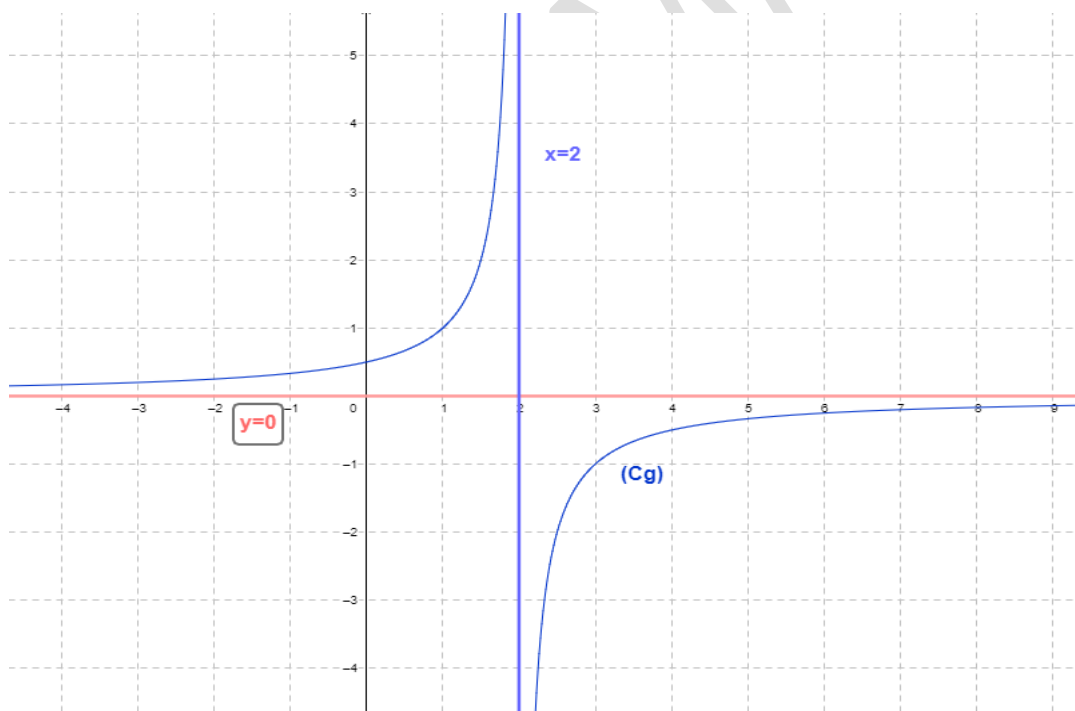
Dans notre exercice on a : $g(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{0x+1}{(-1)x+2}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $W(2;0)$

et d'asymptotes les droites d'équations $x=2$ et $y=0$

b) $g(x) = \frac{1}{2-x}$ on a : $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$ g est strictement croissante sur les intervalles :

$]2; +\infty[$ et $]-\infty; 2[$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$			



2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations : $g(x) = x$ et $g(x) = 1+x$

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x} = x \Leftrightarrow x(2-x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Donc : $S_1 = \{1\}$

$$g(x) = 1 + x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x} = 1 + x \Leftrightarrow (1+x)(2-x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 + 4 = 5 > 0 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Donc : } S_2 = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

b) interprétation graphique des résultats :

• Pour l'équation : $g(x) = x$

La courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y = x$ en un point c'est : $A(1;1)$

• Pour l'équation : $g(x) = 1 + x$

La courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y = x + 1$ en deux points : $B\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1\right)$ et

$C\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1\right)$ c'est-à-dire : $B\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$ et $C\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$

c) Détermination du signe de : $m^2 + 4m$

m	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$m^2 + 4m$	$+$	0	$-$	$+$

d) Détermination des valeurs de m pour que la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y = x + m$

en deux points : Résolution algébrique de l'équation $g(x) = x + m$

$$g(x) = x + m \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} = x + m \Leftrightarrow 2m + 2x - x^2 - xm = 1 \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x - 2m + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2m+1) = m^2 + 4m$$

Donc : $\Delta = m^2 + 4m > 0$ signifie que : $m \in]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$

Donc : l'équation $g(x) = x + m$ admet 2 solutions si et seulement si : $m \in]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$

Donc : les valeurs de m pour que la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y = x + m$ en deux points sont : $m \in]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$

3) On considère la fonction f tel que : $f(x) = \frac{2x}{x^2 - x + 1}$

a) Détermination de D_f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x + 1 \neq 0\}$$

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

Donc : Pas de racines par suite : $D_f = \mathbb{R}$

b) Calculons : $f(x) - f(y)$ si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(y) = \frac{2x}{x^2 - x + 1} - \frac{2y}{y^2 - y + 1} = \frac{2x(y^2 - y + 1) - 2y(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)} = 2 \frac{xy^2 - xy + x - yx^2 + xy - y}{(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)}$$

$$= 2 \frac{xy^2 - yx^2 + x - y}{(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)} = 2 \frac{xy(y-x) - (y-x)}{(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)} = 2(y-x) \frac{xy-1}{(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)}$$

Donc : $f(x) - f(y) = 2(x-y) \frac{1-xy}{(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)}$

c) En déduire la monotonie de f dans: $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

On a : $f(x) - f(y) = 2(x-y) \frac{1-xy}{(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)}$ donc : $\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = 2 \frac{1-xy}{(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)}$

Pour : $x^2 - x + 1$ et $y^2 - y + 1$; $\Delta = 1 - 4 < 0$ donc : $x^2 - x + 1 > 0$ et $y^2 - y + 1 > 0$

Si : $x \in [-1;1] \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$ (1) et $y \in [-1;1] \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 1$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow |x||y| \leq 1 \Rightarrow |xy| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq xy \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - xy$

Donc : $\frac{f(x) - f(y)}{x-y} \geq 0$ par suite f est croissante sur $[-1;1]$

Si : $x \in [1;+\infty[\Rightarrow x \geq 1$ (1) et $y \in [1;+\infty[\Rightarrow y \geq 1$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow 1 - xy \leq 0$

Donc : $\frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq 0$ par suite f est décroissante sur $[1;+\infty[$

d) Calcul de : $f(x) + \frac{2}{3}$ puis l'étude de son signe :

$$f(x) + \frac{2}{3} = \frac{2x}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{3} = \frac{6x + 2x^2 - 2x + 2}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{2x^2 + 4x + 2}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{2(x^2 + 2x + 1)}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{2(x+1)^2}{3(x^2 - x + 1)} \geq 0$$

Car : $x^2 - x + 1 > 0$ et $(x+1)^2 \geq 0$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) + \frac{2}{3} \geq 0$ c'est-à-dire : $-\frac{2}{3} \leq f(x)$ ❶ ; $\forall x \in \mathbb{R}$

e) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2$

On a : $-\frac{2}{3} \leq f(x)$ ❶ ; $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 2$

$$2 - f(x) = 2 - \frac{2x}{x^2 - x + 1} = 2 \left(1 - \frac{x}{x^2 - x + 1} \right) = 2 \frac{x^2 - x + 1 - x}{(x^2 - x + 1)} = 2 \frac{x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x + 1)} = \frac{2(x-1)^2}{(x^2 - x + 1)} \geq 0$$

Car : $x^2 - x + 1 > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R} : 2 - f(x) \geq 0$ c'est-à-dire : $f(x) \leq 2$ ❷ ; $\forall x \in \mathbb{R}$

❶ et ❷ $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien