http://www.xriadiat.com **DL5 /I** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°5
Sur les : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice 01 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=3x^2-x+1$.
2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.
3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.
4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.
5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.
6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.
7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.
8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x+9}{x+1}}$.
9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.
10) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$
11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-x}$
12) $f(x)=\sqrt{3-|-x+1|}$
13) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-8}{x^6-7x^3-8}$
14) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{2\sin x+1}$

Solution : Remarque : Soit f une fonction réelle de la variable réelle de E dans F

L'ensemble de définition de la fonction f se note D_f et on a :

$D_f=\{x\in E / f(x) \text{ est calculable}\}$ Ou $D_f=\{x\in E / f(x)\in F\}$ ou encore $D_f=\{x\in E / f(x)\in\mathbb{R}\}$

1) $f(x)=3x^2-x+1$ $\quad f$ est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ Signifie $x=\dfrac{4}{2}=2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2 est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ Signifie $x^2-2^2=0$ c'est-à-dire : $(x-2)(x+2)=0$

Signifie $x-2=0$ ou $x+2=0$ signifie $x=2$ ou $x=-2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ Signifie $x(x^2-2)=0$ Équivaut à: $x=0$ ou $x^2-2=0$ c'est-à-dire : $x=0$ ou $x^2=2$

Signifie $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ Signifie $-3x\geq -6$ donc $x\leq\frac{-6}{-3}$ par suite : $x\leq 2$

Donc $D_f=\left]-\infty;2\right]$

6) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$: $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ et $x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $a=2$ $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

8) $f(x)=\sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-9x+3}{x+1}\geq 0 \text{ et } x+1\neq 0\right\}$

$-9x+3=0$ Signifie $-9x=-3$ c'est-à-dire : $x=\frac{1}{3}$

$x+1=0$ Signifie $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left]-1,\frac{1}{3}\right]$

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+x+3>0\}$

$-2x^2+x+3=0$ $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc on a deux racines : $x_1=\dfrac{-1+5}{2\times(-2)}=\dfrac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\dfrac{-1-5}{2\times(-2)}=\dfrac{-6}{-4}=\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left]-1,\dfrac{3}{2}\right[$

10) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/|2x-4|-|x-1|\neq0\}$

$|2x-4|-|x-1|=0$ Signifie $|2x-4|=|x-1|$

Signifie $2x-4=x-1$ ou $2x-4=-(x-1)$

Signifie $2x-x=4-1$ ou $2x-4=-x+1$

Signifie $x=3$ ou $2x+x=4+1$

Signifie $x=3$ ou $3x=5$ c'est-à-dire : $x=3$ ou $x=\dfrac{5}{3}$ donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{5}{3};3\right\}$

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-2\geq0\ et\ x^2-x\neq0\}$

$x-2\geq0$ Signifie : $x\geq2$

$x^2-x\neq0$ Signifie : $x(x-1)\neq0$ c'est-à-dire : : $x\neq0$ et $x\neq1$

Donc : $D_f=[2,+\infty[-\{0;1\}=[2,+\infty[$

12) $f(x)=\sqrt{3-|-x+1|}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/3-|-x+1|\geq0\}$

$3-|-x+1|\geq0$ Signifie que : $|-x+1|\leq3$ Signifie que : $-3\leq-x+1\leq3$

Signifie que : $-3-1\leq-x+1-1\leq3-1$

Signifie que : $-4\leq-x\leq2$

Signifie que : $-2\leq x\leq4$

Donc : $D_f=[-2;4]$

13) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-8}{x^6-7x^3-8}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^6-7x^3-8\neq0\quad et\quad x\geq0\}$

$x^6-7x^3-8=0$ Signifie que : $(x^3)^2-7(x^3)-8=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^3$; nous obtenons l'équation :

$X^2-7X-8=0$

Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=81\succ0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $X_1 = \frac{7-9}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{7+9}{2} = 8$

Donc : $x^3 = -1$ ou $x^3 = 8$.

Equivalent à : $x = -1$ ou $x = 2$

Par suite : $D_f = [0.+\infty[- \{-1;2\}$

Alors : $D_f = [0;2[\cup]2;+\infty[$

14) $f(x) = \frac{2\cos x}{2\sin x + 1}$. $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2\sin x + 1 \neq 0\}$

$2\sin x + 1 = 0$ Signifie $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ Signifie $\sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Signifie $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Signifie $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Signifie $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 02 : On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f.

x	-4		0		2		3
f	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies, fausses ou si on ne peut pas répondre.

1) $f(-2) \leq f(-2,5)$

2) $f(-3) = -4$

3) 2est un antécédent de 0 par f

4) Il existe un nombre réel de l'intervalle [0;3] qui a pour image 0 par f

5) Tous les réels de l'intervalle [0;3] ont une image par f positive

6) Il existe un réel de l'intervalle [−3;3] qui a une image strictement négative par f

Solution : 1) $f(-2) \leq f(-2,5)$: FAUX

2) $f(-3) = -4$ FAUX

3) 2est un antécédent de 0 par f : VRAI

4) Il existe un nombre réel de l'intervalle [0;3] qui a pour image 0 par f : VRAI

5) Tous les réels de l'intervalle [0;3] ont une image par f positive : VRAI

6) Il existe un réel de l'intervalle [−3;3] qui a une image strictement négative par f : ON NE SAIT PAS

Exercice 03 : Soit f et g les fonctions numériques tel que : $f(x)=x$ et $g(x)=\frac{1}{x}$

Comparer les fonctions f et g

Solution : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$

$f(x)-g(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$

Etudions le signe de : $\frac{x^2-1}{x}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Si : $x\in]-\infty;-1]\cup]0;1]$ alors $f(x)-g(x)\leq 0$ et par suite : $f(x)\leq g(x)$ c'est-à-dire : $f\leq g$

Si : $x\in[-1;0[\cup[1;+\infty[$ alors $f(x)-g(x)\geq 0$ et par suite : $f(x)\geq g(x)$ c'est-à-dire : $f\geq g$

Exercice 04 : soit la fonction f définie par : $f(x)=-\frac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) a) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f
b) Donner une interprétation graphique

3) Simplifier l'écriture de f dans les intervalles $I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et $J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

4) Calculer : $f(0)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)$; $f(-3)$ et $f(3)$

5) Dresser son tableau de variation sur D_f

6) Tracer la courbe (C_f) dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Solution :1) Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2)a) **-** Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=-\frac{1}{2}(|-2x+3|+|-2x-3|)=-\frac{1}{2}(|-(2x-3)|+|-(2x+3)|)$

$f(-x)=-\frac{1}{2}(|2x-3|+|2x+3|)$ Car $|-x|=|x|$

Donc : $f(-x)=f(x)$ par suite : f est une fonction paire,

Donc : la droite des ordonnées est un axe de symétrie de (C_f)

Il suffit donc de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

b) Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est un axe symétrie de la courbe représentative

3) $f(x)=-\frac{1}{2}\left(|2x+3|+|2x-3|\right)$

Si $x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ alors : $0\leq x\leq\frac{3}{2}$

Donc : $0\leq 2x\leq 3$ c'est-à-dire : $2x-3\leq 0$ et on a : $2x+3\geq 0$

Par suite : $f(x)=-\frac{1}{2}\left(2x+3+\left(-(2x-3)\right)\right)=-\frac{1}{2}(2x+3-2x+3)=-3$

Si $x\in J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ alors : $x\geq\frac{3}{2}$

Donc : $2x\geq 3$ c'est-à-dire : $2x-3\geq 0$ et on a : $2x+3\geq 0$

Par suite : $f(x)=-\frac{1}{2}\left(|2x+3|+|2x-3|\right)=-\frac{1}{2}\left(2x+3+|2x-3|\right)=-\frac{1}{2}(4x)=-2x$

Finalement on a : $\begin{cases} f(x)=-3 \ si \ x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right] \\ f(x)=-2x \ si \ x\in J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[\end{cases}$

4) $f(0)=-\frac{1}{2}\left(|2\times 0+3|+|2\times 0-3|\right)=-\frac{1}{2}(3+3)=-3$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\left|2\times\frac{3}{2}+3\right|+\left|2\times\frac{3}{2}-3\right|\right)=-\frac{1}{2}(6+0)=-3$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$ Car :f est une fonction paire : $f(-3)=f(3)=-6$

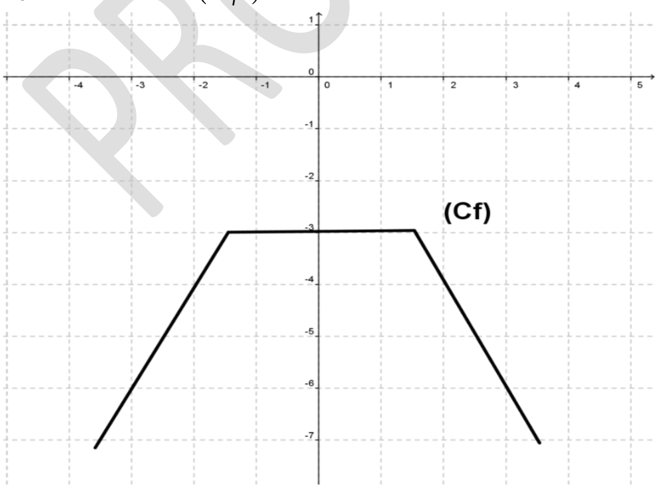
5) le tableau de variation sur $\mathbb{R}$

On a : f est constante sur l'intervalle : $I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et décroissante dans $J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

Et puisque f est une fonction paire alors f est constante sur l'intervalle : $I'=\left[-\frac{3}{2};0\right]$ et f est croissante dans $J'=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\rightarrow -3 \rightarrow$	-3	$\searrow$

6) La courbe (C_f) :



Exercice 05 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{-10x}{x^2+1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f .

2) Montrer que la fonction f est impaire

3) Calculer $f(-1)$ et Montrer que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

4) a) Soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur les intervalles $I=[0;1]$ et $J=[1;+\infty[$.

5) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Solution :1) $D_f=\{x\in E / f(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_f=\{x\in E / x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0$ Signifie $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+1 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{-10x}{x^2+1}$

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\frac{-10(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{-10x}{x^2+1}$ Donc : $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

3) Calculons $f(-1)$: $f(-1)=\frac{-10\times(-1)}{(-1)^2+1}=\frac{10}{2}=5$

Montrons que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{-10x}{x^2+1}$: Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-5=\frac{-10x}{x^2+1}-5=\frac{-10x-5(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{-10x-5x^2-5}{x^2+1}=-5\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=-5\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

Puisque : $-5\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\leq 0$ alors : $f(x)\leq 5$ et on a aussi : $f(-1)=5$

Alors : $f(x)\leq f(-1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

On conclut que : $f(-1)=5$ est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

4) a) Soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrons que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{-10x_1}{x_1^2+1}+\frac{10x_2}{x_2^2+1}}{x_1-x_2}=\frac{\frac{-10x_1(x_2^2+1)+10x_2(x_1^2+1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-10x_1\left(x_2^2+1\right)+10x_2\left(x_1^2+1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{-10x_1x_2^2-10x_1+10x_2x_1^2+10x_2}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{10\left(-x_1x_2^2-x_1+x_2x_1^2+x_2\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{10\left(x_2-x_1+x_1x_2\left(x_1-x_2\right)\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{10\left(x_1x_2\left(x_1-x_2\right)-\left(x_1-x_2\right)\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{10\left(x_1-x_2\right)\left(x_1x_2-1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{10\left(x_1x_2-1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}$$

b)

- Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $I=[0;1]$

Soient : $x_1\in[0;1]$ et $x_2\in[0;1]$ tel que : $x_1\neq x_2$

On a : $\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)>0$ et $10>0$

Donc : $\begin{cases}0\le x_1\le 1\\ 0\le x_2\le 1\end{cases}$ alors : $0\le x_1x_2\le 1$

Donc : $x_1x_2-1\le 0$ et puisque $x_1\neq x_2$ alors : $0\le x_1x_2<1$

D'où : $T(x_1;x_2)=\dfrac{10\left(x_1x_2-1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}<0$

Et par suite f est strictement décroissante sur $I=[0;1]$

- Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $J=[1;+\infty[$

On a : $\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)>0$ et $10>0$

Soient : $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$ tel que : $x_1\neq x_2$

Donc : $\begin{cases}x_1\ge 1\\ x_2\ge 1\end{cases}$ alors : $x_1x_2\ge 1$

Donc : $x_1x_2-1\ge 0$ et puisque $x_1\neq x_2$ alors : $x_1x_2-1>0$

D'où : $T(x_1;x_2)=\dfrac{10\left(x_1x_2-1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}>0$

Et par suite f est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

5) Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:
On a f est une fonction impaire

▻ Puisque f est strictement décroissante sur $I=[0;1]$ alors f l'est aussi sur $I'=[-1;0]$

▻ Puisque f est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$ alors f l'est aussi sur $J'=]-\infty;1]$

D'où, le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)$	↗	5	↘	-5	↗

Exercice 06: Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$

1)Déterminer D_f

2) a) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{1}{4}(x_1+x_2)+1$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;+\infty[$

c) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$

3)a) Déterminer α et β tel que : $f(x)=\frac{1}{4}(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

c) Dresser le Tableau de variations de f

4) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\geq -1$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ On a : $5\leq f(x)\leq\frac{9}{16}$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ On a : $-1\leq f(x)\leq\frac{5}{4}$

5)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f)avec les axes du repère

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=2x$

Tracer Les courbes représentatives de(C_f)et(C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

7)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

8) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

9)Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2+4x=4m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soients : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\left(\frac{1}{4}{x_2}^2+x_2\right)-\left(\frac{1}{4}{x_1}^2+x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{4}{x_2}^2+x_2-\frac{1}{4}{x_1}^2-x_1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{\frac{1}{4}\left({x_2}^2-{x_1}^2\right)+(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{\frac{1}{4}(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)\left(\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1\right)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-2;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-2;+\infty[$ et $x_2\in[-2;+\infty[$ alors : $x_1\geq -2$ et $x_2\geq -2$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>-4$

Donc : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)>-1$

Par suite : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1>0$.

Donc : $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-2]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-2]$ et $x_2\in]-\infty;-2]$ alors : $x_1\leq -2$ et $x_2\leq -2$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique : $x_1+x_2<-4$

Donc : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)<-1$

Par suite : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1<0$.

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-2]$

3)a) Déterminons : α et β tel que : $f(x)=\frac{1}{4}(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+x=\frac{1}{4}(x^2+4x)=\frac{1}{4}(x^2+2\times 2x+2^2-4)=\frac{1}{4}\left((x+2)^2-4\right)=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$$

b) On a : $f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$ donc : $\alpha=2$ et $\beta=-1$ car : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet : $W(-\alpha;\beta)$

C'est-à-dire : $W(-2;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-2$

c) Tableau de variation : On a : $a=\frac{1}{4}>0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

4) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-2)=-1$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-2)\leq f(x)$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $-1\leq f(x)$

b) Soit : $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ alors : $-2\leq x\leq\frac{1}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[-2;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

Alors : $f(-2)\leq f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ et comme : $f(-2)=-1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$

Par suite : $5\leq f(x)\leq\frac{9}{16}$ si $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

b) Soit : $x \in [-5;-2]$ On a alors : $-5 \leq x \leq -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J =]-\infty;-2]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-5;-2]$

Alors : $f(-2) \leq f(x) \leq f(-5)$ et comme :

$f(-2) = -1$ Et $f(-5) = \frac{1}{4} \times (-5)^2 - 5 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}$ Par suite : $-1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ Signifie $\frac{1}{4}x^2 + x = 0$

Signifie $x\left(\frac{1}{4}x + 1\right) = 0$ Signifie $x = 0$ ou $\frac{1}{4}x + 1 = 0$ c'est-à-dire : $x = 0$ ou $x = -4$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$O(0;0)$ et $A(-4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

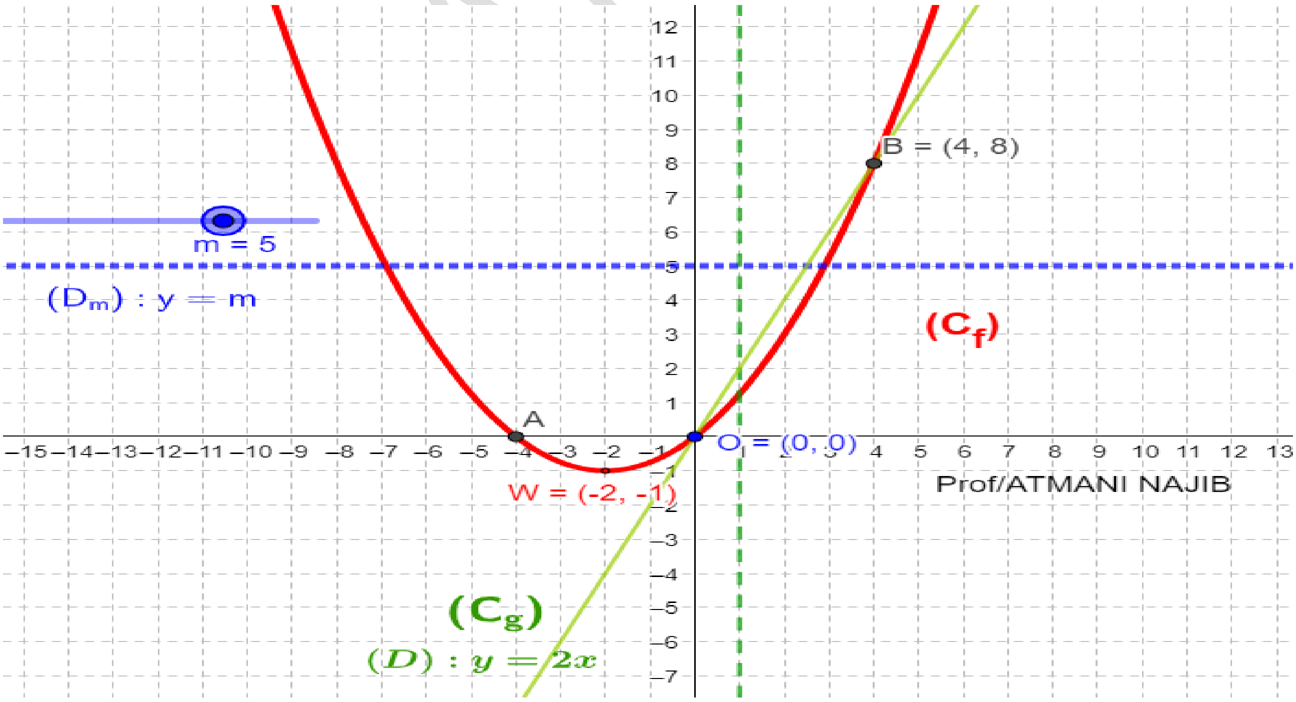
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0) = \frac{1}{4}(0)^2 + 0 = 0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = 2x$

Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:



7) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=0$ et $x=4$ donc $S=\{0;4\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $\frac{1}{4}x^2+x=2x$ c'est-à-dire : $\frac{1}{4}x^2-x=0$ Signifie $x\left(\frac{1}{4}x-1\right)=0$

Signifie $x=0$ ou $\frac{1}{4}x-1=0$ Signifie $x=0$ ou $x=4$

Donc : $S=\{0;4\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)\geq f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in[0;4]$

Donc $S=[0;4]$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)\geq f(x)$:

$g(x)\geq f(x)$ Signifie $\frac{1}{4}x^2+x\leq 2x$ C'est-à-dire : $\frac{1}{4}x^2-x\leq 0$ C'est-à-dire : $x^2-4x\leq 0$

Les racines sont : $x_1=0$ et $x_2=4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=[0;4]$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2+4x=4m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$x^2+4x=4m$ Signifie $m=\frac{x^2+4x}{4}$ Signifie $m=\frac{1}{4}x^2+x$ Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m>-1$ il y'a deux solutions
Si : $m=-1$ il y'a une solution c'est : x = -1
Si : $m<-1$ l'équation n'admet pas de solution

Exercice 07 : Soit f une fonction numérique tel que : $g(x)=\frac{-x}{x-2}$

(C_g) Sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_g

2) Ecrire $g(x)$ sous la forme : $g(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de g

5) Tracer la courbe représentative (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution :1) $g(x)=\frac{-x}{x-2}$; On a $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-2\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

2) Si $x \in \mathbb{R}-\{2\}$ on a

$$g(x)=\frac{-x}{x-2}=\frac{-1(x-2)-2}{x-2}=\frac{-1(x-2)}{x-2}+\frac{-2}{x-2}=-1+\frac{-2}{x-2}$$

$$\begin{array}{r|l} -x & x-2 \\ \underline{x-2} & \hline -1 \\ -2 & \end{array}$$

Puisque : $g(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-2$; $\beta=-1$ et $k=-2$

3) On a : $g(x)=-1+\frac{-2}{x-2}$ avec $\alpha=-2$; $\beta=-1$

Donc : (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=-1$

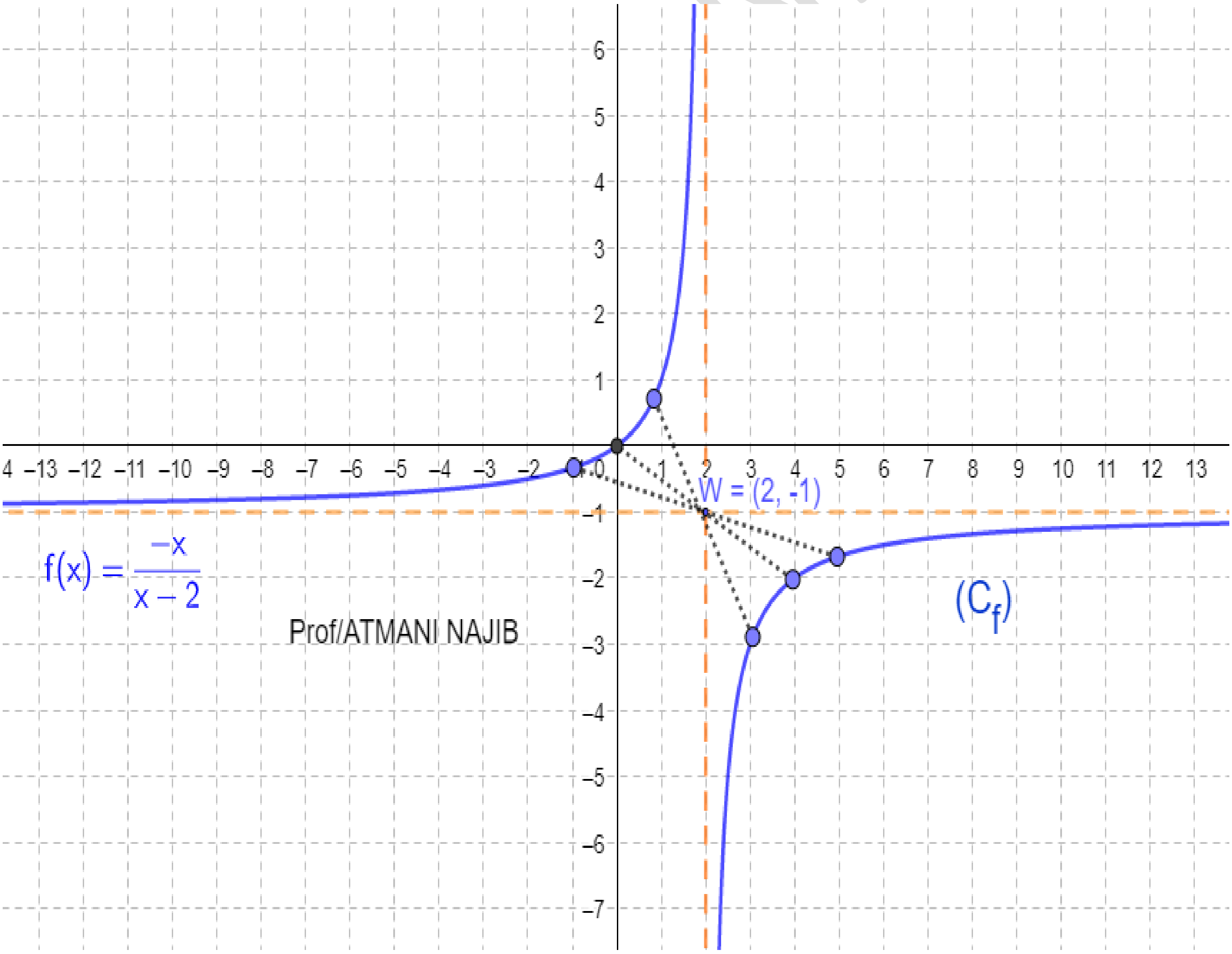
4) $k=-2<0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	||	$\nearrow$

Methode2 : $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 0 \\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\succ 0$ donc : g est strictement croissante sur : $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$

<u>4) Représentation graphique</u>

-1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	5
-1/ 3	0	1		-3	-2	-5/ 3



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien