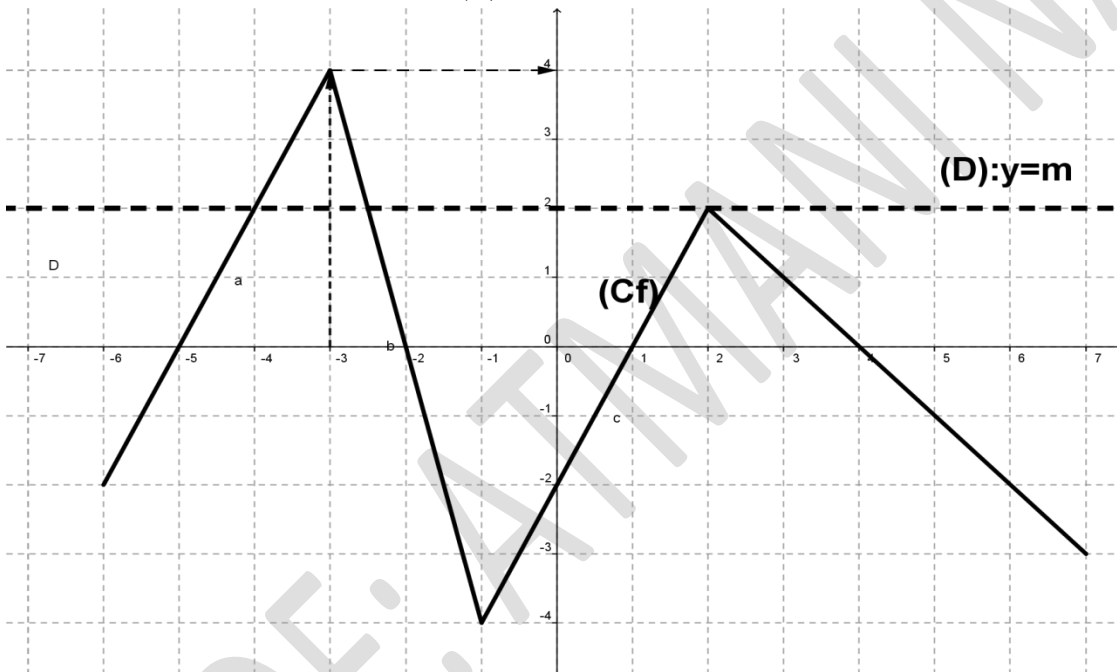


Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°5
Sur les : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6; 7]$

Répondre par lecture graphique :

- 1) Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?
- 2) Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?
- 3) Résoudre graphiquement $f(x) = 0$
- 4) Quel est en fonction de m le nombre de solutions de : $f(x) = m$.
- 5) Résoudre graphiquement $f(x) < 0$
- 6) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$



Solution : 1) Image de -5 est 0 (ordonnée du point d'abscisse -5)

Image de -3 est 4 et l'image de 0 est -2 et l'image de 6 est -2

2) Antécédents de -1 sont : -5,5 -1,75 0,5 et 5

Antécédents de 0 sont : -5 ; -2 ; 1 et 4.

3) La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S = \{-5; -2; 1; 4\}$

4) Nombre de solutions de $f(x) = m$ c'est le nombre de points d'intersection de courbe avec une la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m .

Si $m < -4$: pas de solution

Si $m = -4$: une solution

Si: $-4 < m < -3$ deux solutions

Si $-3 < m < -2$: trois solutions

Si $-2 < m < 2$: quatre solutions

Si $m = 2$: trois solutions

Si: $2 < m < 4$ deux solutions

Si $m = 4$: une solution

Si $m > 4$: pas de solution

5) $f(x) < 0$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses. $S = [-6; 7] \cup]-2; 1[\cup]4; 7]$

6) $f(x) \geq 2$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$ Donc $S = [-4; 2.5] \cup \{2\}$

Exercice02 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = \frac{x^4 - 2025}{6x^2 - x - 1}$

2) $f(x) = \frac{2x - 21}{2x - 3\sqrt{x} - 2}$

3) $f(x) = \sqrt{(x+2)(3x-1)(2x+5)}$

4) $f(x) = \frac{2\sqrt{x-1}-1}{3x^2+6x+5}$

5) $f(x) = \sqrt{|x+1|-1}$

6) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

7) $f(x) = (x-2)\sqrt{x^4 - 7x^2 + 12}$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+6}{x^2-4x-96}}$

9) $f(x) = \sqrt{6x^3 + 25x^2 + 21x - 10}$

10) $f(x) = \sqrt{\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}}$

11) $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{\sin(2x) - \cos(3x)}$

Solution : 1) $f(x) = \frac{x^4 - 2025}{6x^2 - x - 1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 6x^2 - x - 1 \neq 0\}$

$6x^2 - x - 1$: On a : $\Delta = 1 + 24 = 25$: $x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

2) $f(x) = \frac{2x - 21}{2x - 3\sqrt{x} - 2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 3\sqrt{x} - 2 \neq 0 \text{ et } x \geq 0\}$

$2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$ Equivalent à : $2(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} - 2 = 0$ car $\sqrt{x}^2 = x$

Faisons un changement de variable en posant : $X = \sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $2X^2 - 3X - 2 = 0$: $a = 2$, $b = -3$ et $c = -2$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 2$

Equivalent à : $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ ou $\sqrt{x} = 2$ Mais l'équation : $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{x} = 2$ Signifie : $(\sqrt{x})^2 = 2^2$ c'est-à-dire : $x = 4$

Donc : $D_f = [0; +\infty[- \{4\} = [0; 4[\cup]4; +\infty[$

3) $f(x) = \sqrt{(x+2)(3x-1)(2x+5)}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / (x+2)(3x-1)(2x+5) \geq 0\}$$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$ qui signifie que :

$$x = -\frac{5}{2}$$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$x+2$		-	-	0	+	+
$3x-1$		-	-	-	0	+
$2x+5$		-	0	+	+	+
$F(x)$		-	0	+	0	+

$$D_f = \left[-\frac{5}{2}, -2\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$$

$$4) f(x) = \frac{2\sqrt{x-1}-1}{3x^2+6x+5}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2+6x+5 \neq 0 \text{ et } x-1 \geq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2+6x+5 \neq 0 \text{ et } x \geq 1\}$$

$$3x^2+6x+5=0 : \Delta = b^2-4ac = (6)^2-4 \times 3 \times 5 = 36-60 = -24 < 0 \text{ (Pas de solutions)}$$

$$\text{Donc : } 3x^2+6x+5 \neq 0$$

$$\text{Donc : } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$$

$$\text{Donc : } D_f = [1; +\infty[$$

$$5) f(x) = \sqrt{|x+1|-1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x+1|-1 \geq 0\}$$

$$|x+1|-1 \geq 0 \text{ Signifie que : } |x+1| \geq 1 \text{ Signifie que : } x+1 \geq 1 \text{ ou } x+1 \leq -1$$

$$\text{Signifie que : } x \geq 0 \text{ ou } x \leq -2$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$$

$$6) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{x} \geq 0 \text{ et } x \neq 0\right\} \text{ Dressons un tableau de signe de : } \frac{x+1}{x}$$

$$x+1=0 \text{ Signifie que : } x=-1$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$	0	$-$	$+$

$$\text{D'où : } D_f =]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$$

$$7) f(x) = (x-2)\sqrt{x^4-7x^2+12}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0\}$$

a) D'abord on va résoudre l'équation $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0. Je pose donc $X = x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X. Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l'équation de départ.

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \text{ Équivaut à : } (x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0$$

Je pose : $X = x^2$ l'équation devienne : $X^2 - 7X + 12 = 0$

Le discriminant de : $X^2 - 7X + 12 = 0$ est : $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1 > 0$ et ses solutions sont :

$$X_1 = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3 \text{ et } X_2 = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{8}{2} = 4 \text{ C'est-à-dire : } x^2 = 3 \text{ ou } x^2 = 4$$

C'est-à-dire : $x = \pm\sqrt{3}$ ou $x = \pm 2$

b) Résolution de l'inéquation : $x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0$

On a une factorisation de $x^4 - 7x^2 + 12$ en un produit de monômes du premier degré :

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 1(x+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x-2)$$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $x+\sqrt{3}=0$ signifie que : $x=-\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}=0$ Signifie que : $x=\sqrt{3}$ et $x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$		
$x+2$		-	0	+	+	+		
$x+\sqrt{3}$		-	-	0	+	+		
$x-\sqrt{3}$		-	-	-	0	+		
$x-2$		-	-	-	-	0	+	
$I(x)$		+	0	-	0	-	0	+

$$x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0 \text{ Équivaut à : } x \in]-\infty, -2] \cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup [2, +\infty[$$

$$\text{Ainsi : } D_f =]-\infty, -2] \cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup [2, +\infty[$$

$$8) f(x) = \sqrt{\frac{2x+6}{x^2-4x-96}}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x+6}{x^2-4x-96} \geq 0 \text{ et } x^2-4x-96 \neq 0\right\}$$

On commence par déterminer les racines du trinôme $-x^2 + 4x + 96$:

Le discriminant de $-x^2 + 4x + 96$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 96 \times (-1) = 400$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{400}}{2 \times (-1)} = \frac{-4 + 20}{-2} = \frac{16}{-2} = -8 \text{ et } x_2 = \frac{-4 - \sqrt{400}}{2 \times (-1)} = \frac{-4 - 20}{-2 \times 1} = \frac{-24}{-2} = 12$$

Donc le tableau des signes est :

x	$-\infty$	-8	-3	12	$+\infty$
$2x+6$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$-x^2+4x+96$	$-$	0	$+$	$+$	0
$\frac{2x+6}{-x^2+4x+96}$	$+$	$-$	0	$+$	$-$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $D_f =]-\infty; -8[\cup [-3; 12[$.

9) $f(x) = \sqrt{6x^3 + 25x^2 + 21x - 10}$

(On peut remarquer que : -2 est une racine évidente du polynôme : $6x^3 + 25x^2 + 21x - 10$)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 6x^3 + 25x^2 + 21x - 10 \geq 0\}$$

On pose : $F(x) = 6x^3 + 25x^2 + 21x - 10$

On remarque que $F(-2) = 0$

Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que $F(x) = (x - (-2))Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il

Existe trois réels a, b et c tels que $F(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$.

Or, $(x+2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve :
$$\begin{cases} a = 6 \\ b + 2a = 25 \\ c + 2b = 21 \\ 2c = -10 \end{cases} \text{ Equivaut à : } \begin{cases} a = 6 \\ b = 13 \\ c = -5 \end{cases}$$

$F(x) = (x+2)(6x^2+13x-5)$.

Le discriminant de : $6x^2+13x-5$ est : $\Delta = 13^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 289 = 17^2$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-13 - \sqrt{289}}{2 \times 6} = \frac{-13 - 17}{12} = -\frac{5}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-13 + \sqrt{289}}{2 \times 6} = \frac{-13 + 17}{12} = \frac{1}{3}$$

$$6x^2+13x-5 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) = 2 \times 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (3x-1)(2x+5)$$

Donc : $F(x) = (x+2)(3x-1)(2x+5)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$ qui signifie que :

$$x = -\frac{5}{2}$$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$3x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$F(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$\text{Donc : } D_f = \left[-\frac{5}{2}, -2\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

$$10) f(x) = \sqrt{\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2} \geq 0 \right\} ..$$

Pour déterminer le signe du trinôme : $7x+5-6x^2$

Calculons son discriminant : $a = -6 ; b = 7 ; c = 5$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 7^2 - 4 \times (-6) \times 5 = 49 + 120 = 169 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{169}}{2a} = \frac{-7 - 13}{2 \times (-6)} = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{169}}{2a} = \frac{-7 + 13}{2 \times (-6)} = -\frac{1}{2}$$

$-3(1-x)^2 \leq 0$ Car un carré est toujours positif ou nul.

$-3(1-x)^2 = 0$ Signifie que : $1-x=0$ Signifie que : $x=1$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{3}$	$+\infty$	
$7x + 5 - 6x^2$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$-3(1 - x)^2$	$-$	0	$-$	0	$-$	$-$
$\frac{5(7x + 5 - 6x^2)}{-3(1 - x)^2}$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

$$\text{Par suite : } D_f = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$$

$$11) f(x) = \frac{2\sin^2 x}{\sin(2x) - \cos(3x)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sin(2x) - \cos(3x) \neq 0\}$$

On a : $\sin(2x) - \cos(3x) = 0$ Équivaut à : $\sin(2x) = \cos(3x)$

$$\text{Équivaut à : } \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\text{Équivaut à : } 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Équivaut à : } 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad -x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice03 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m \in \mathbb{R}$

1) Déterminer les valeurs de m pour que $D_f = \mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x) = \frac{1}{x+2}$

Déterminer les valeurs de m pour que on a : $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \{-2;1\}$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ signifie que : $x^2 + x + m \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + x + m \neq 0$ On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4m$

$\Delta < 0$ Signifie que : $m > \frac{1}{4}$

Donc : si $m > \frac{1}{4}$ alors $\Delta < 0$ et donc : $x^2 + x + m \neq 0$ et par suite ; $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \{-2;1\}$ Signifie que : $\frac{x-1}{x^2+x+m} = \frac{1}{x+2}$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = x^2 + x + m \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = x^2 + x + m$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2 = m$

Exercice04 : Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 5$ et $g(x) = -x - 3$. Étudier les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g

Solution : Soit $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 5 + x + 3 = x^2 - x - 2$

h est une fonction du second degré. Calculons son discriminant afin de déterminer son signe.

Il suffit d'appliquer les formules bien connues avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -2$.

$\Delta = (-1)^2 - [4 \times 1 \times (-2)] = 9 = 3^2$

Δ étant strictement positif, le trinôme admet deux racines qui sont : $x_1 = \frac{1+3}{2 \times 1} = 2$ et $x_2 = \frac{1-3}{2 \times 1} = -1$

Le signe de la fonction est du signe de a , c'est-à-dire positif de part et d'autre des racines mais du signe contraire (donc négatif) entre ces racines.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Par conséquent (C_f) est confondue avec (C_g) pour $x = -1$ et $x = 2$

(C_f) est située au-dessus de (C_g) sur $]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

Exercice05 : Soit f une fonction tel que : $f(x) = \frac{-2x^2 - 3}{x^2 + 4}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = -2 + \frac{5}{x^2 + 4}$

4) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty; 0]$

5) Dresser le tableau de variation de f

6) Déterminer les extrémums de f

Solution : $f(x) = \frac{-2x^2 - 3}{x^2 + 4}$

1) $D_f = \{x \in E / x^2 + 4 \neq 0\}$

$x^2 + 4 = 0$ Signifie $x^2 = -4$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $x^2 + 4$ ne s'annule jamais

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

- $f(-x) = \frac{-2(-x)^2 - 3}{(-x)^2 + 4} = \frac{-2x^2 - 3}{x^2 + 4} = f(x)$ donc : $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) Montrons que : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = -2 + \frac{5}{x^2 + 4}$

Méthode1 : $-2 + \frac{5}{x^2 + 4} = \frac{-2(x^2 + 4) + 5}{x^2 + 4} = \frac{-2x^2 - 8 + 5}{x^2 + 4} = \frac{-2x^2 - 3}{x^2 + 4}$

Donc : $f(x) = -2 + \frac{5}{x^2 + 4}$

Méthode2 : $f(x) = \frac{-2x^2 - 3}{x^2 + 4} = \frac{-2x^2 - 8 + 8 - 3}{x^2 + 4} = \frac{-2(x^2 + 4) + 5}{x^2 + 4} = \frac{-2(x^2 + 4)}{x^2 + 4} + \frac{5}{x^2 + 4}$

Donc : $f(x) = -2 + \frac{5}{x^2 + 4}$

4) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

2) soient $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$ tel que : $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2$ Implique : $x_1^2 < x_2^2$

Implique : $x_1^2 + 4 < x_2^2 + 4$

Implique : $\frac{1}{x_2^2 + 4} < \frac{1}{x_1^2 + 4}$

Implique : $\frac{5}{x_2^2 + 4} < \frac{5}{x_1^2 + 4}$

Implique : $-2 + \frac{5}{x_2^2 + 4} < -2 + \frac{5}{x_1^2 + 4}$

Implique : $f(x_2) < f(x_1)$

D'où : f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

b) Dédution des variations de f sur $]-\infty; 0]$:

Puisque f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et f est une fonction paire et le symétrique de $[0; +\infty[$ est $]-\infty; 0]$

Alors : f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$

5) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\swarrow$	$\nearrow$	
		$-3/4$	

6) D'après le tableau de variation de f on a : $f(0) = -\frac{3}{4}$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice06 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 5x^2 + 3$

Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera

Solution : $D_f = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc $5x^2 \geq 0$ car $5 > 0$

Par suite $5x^2 + 3 \geq 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq f(0)$

D'où : $f(0) = 3$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice07 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$

3) Etudier la monotonie de f sur : $I = [-1; +\infty[$ et sur $J =]-\infty; -1]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ On a : $f(x) \leq 2$

b) En déduire que : pour tout $x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$ On a : $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2$

c) En déduire que : pour tout $x \in [-3; -1]$ On a : $-2 \leq f(x) \leq 2$

6) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x - 1$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

8) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation : $g(x) < f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $-x^2 - 2x + m - 1 = 0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Solution : $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) Soient : $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-x_2^2 - 2x_2 + 1) - (-x_1^2 - 2x_1 + 1)}{x_2 - x_1} = \frac{-x_2^2 - 2x_2 + 1 + x_1^2 + 2x_1 - 1}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{-x_2^2 + x_1^2 - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-(x_2^2 - x_1^2) - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{-(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(-(x_2 + x_1) - 2)}{x_2 - x_1}$$

Par suite : $T(x_1; x_2) = -(x_1 + x_2) - 2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I = [-1; +\infty[$

Soient : $x_1 \in [-1; +\infty[$ et $x_2 \in [-1; +\infty[$ alors $x_1 \geq -1$ et $x_2 \geq -1$ implique $x_1 + x_2 \geq -2$

Donc $-(x_1 + x_2) \leq 2$ par suite : $-(x_1 + x_2) - 2 \leq 0$

Donc $T(x_1; x_2) \leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I = [-1; +\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J =]-\infty; -1]$

Soient : $x_1 \in]-\infty; -1]$ et $x_2 \in]-\infty; -1]$ alors : $x_1 \leq -1$ et $x_2 \leq -1$ cela implique $x_1 + x_2 \leq -2$

Donc $-(x_1 + x_2) \geq 2$ par suite : $-(x_1 + x_2) - 2 \geq 0$

Donc $T(x_1; x_2) \geq 0$

D'où : f est croissante sur $J =]-\infty; -1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1) = -(-1)^2 - 2 \times (-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$

Donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		2	

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1) = 2$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq f(-1)$

Par suite : $f(x) \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Soit : $x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$ alors : $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $I = [-1; +\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$

Alors : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(-1)$ et comme : $f(-1) = 2$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} - 1 + 1 = -\frac{1}{4}$

Par suite : $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2$

b) Soit : $x \in [-3; -1]$ On a alors : $-3 \leq x \leq -1$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $J =]-\infty; -1]$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-3; -1]$

Alors : $f(-3) \leq f(x) \leq f(-1)$ et comme :

$$f(-3) = -(-3)^2 - 2 \times (-3) + 1 = -9 + 6 + 1 = -2 \text{ Et } f(-1) = 2$$

Par suite : $-2 \leq f(x) \leq 2$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ Signifie } -x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{-(-2) + 2\sqrt{2}}{-2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} = -1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{-(-2) - 2\sqrt{2}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{2}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$$A(-1 - \sqrt{2}; 0) \text{ et } B(-1 + \sqrt{2}; 0)$$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

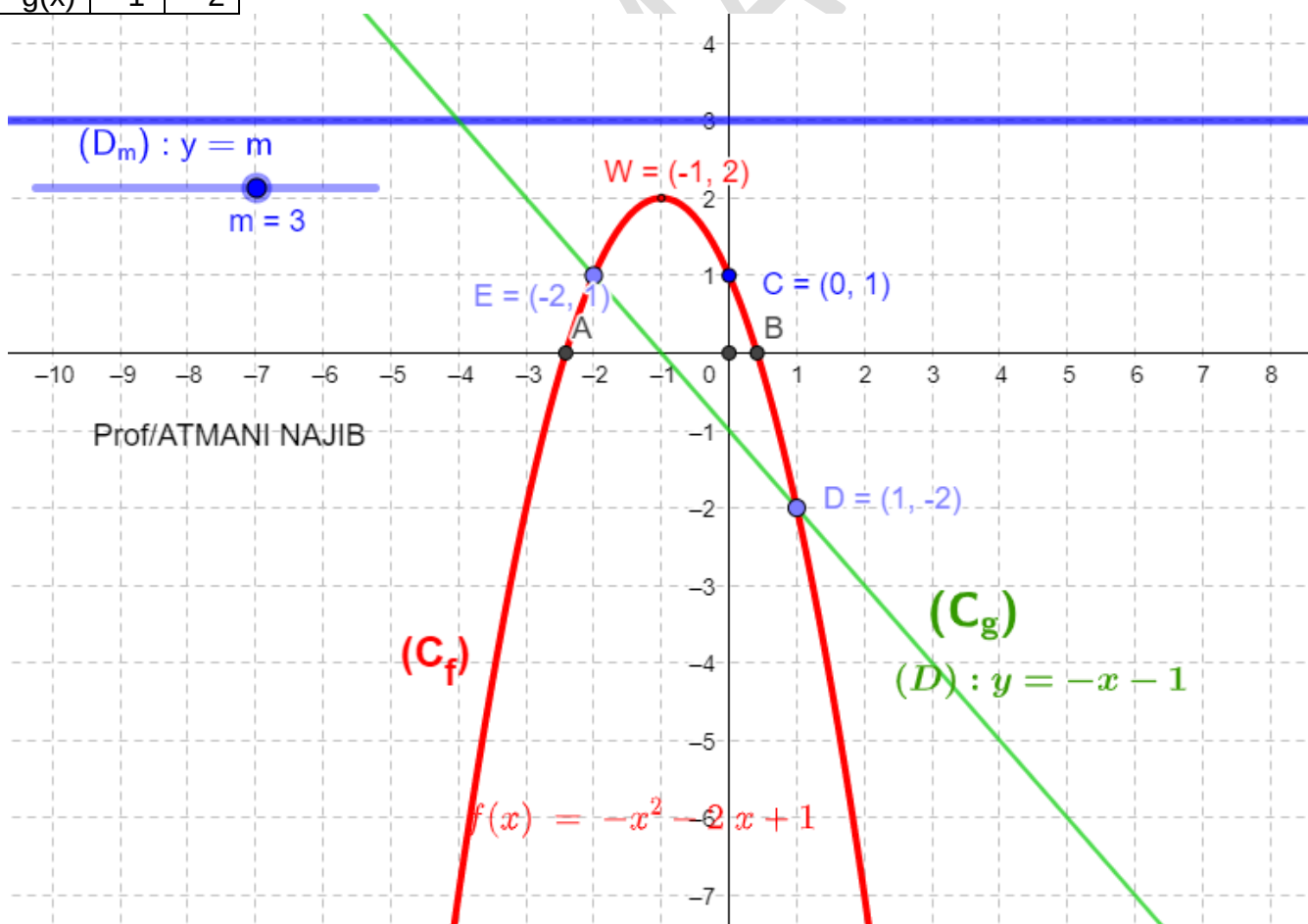
$$\text{Et on a } f(0) = -0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $C(0; 1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-7	-2	1	2	1	-2	-7

x	-2	1
g(x)	1	-2



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 1$ donc $S = \{-2; 1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $-x^2 - 2x + 1 = -x - 1$ c'est-à-dire : $-x^2 - x + 2 = 0$ c'est-à-dire :
 $x^2 + x - 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Donc : $S = \{-2; 1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x) \geq f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$

Donc $S =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x) \geq f(x)$:

$g(x) \geq f(x)$ Signifie $-x - 1 \geq -x^2 - 2x + 1$

C'est-à-dire : $x^2 + x - 2 \geq 0$

Les racines sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
x^2+x-2	+	0	-	0	+

Donc $S =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2 - 2x + 1 - m = 0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

$-x^2 - 2x + 1 - m = 0$ Signifie $m = -x^2 - 2x + 1$

Signifie : $m = f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y = m$

Si : $m > 2$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m = 2$ il y'a une solution c'est : $x = -1$

Si : $m < 2$ il y'a deux solutions

Exercice08 : On considère les fonctions : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$ et (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) a) Vérifier que : $f(x) = (x-1)^2$ si $x \in D_f$

b) Vérifier que : $g(x) = 3 - \frac{6}{x+1}$ si $x \in D_g$

3) a) Donner la nature de la courbe de f et ces éléments caractéristique

b) Dresser le tableau de variation de f

4) a) Donner la nature de la courbe de g et ces éléments caractéristique

b) Dresser le tableau de variation de g

5) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

- 6) Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère
- 7) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 8) Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)
- 9) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$
- 10) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{3|x|-3}{|x|+1}$

- a) Déterminer l'ensemble de définition D_h
- b) Montrer que la fonction h est paire
- c) Vérifier que $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

11) Tracer la courbe (C_h) de h dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

12) Soit K la fonction définie par : $K(x) = |f(x)|$

- a) Tracer la courbe (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de

L'équation $K(x) = m$

Solution : 1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$

Dans l'expression de $f(x)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle : Donc $D_f = \mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+1=0$ soit $x=-1$

Donc : $D_g = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

2) a) Vérifions que : $f(x) = (x-1)^2$ si $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 1^2 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2$$

Donc : $f(x) = (x-1)^2 + 0$ (la forme canonique)

b) Vérifions que : $g(x) = 3 - \frac{6}{x+1}$ si $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\text{Soit : } x \in \mathbb{R} - \{-1\} ; 3 - \frac{6}{x+1} = \frac{3(x+1)-6}{x+1} = \frac{3x+3-6}{x+1} = \frac{3x-3}{x+1} = g(x) \text{ (La forme réduite)}$$

3) $f(x) = x^2 - 2x + 1$: ($f(x) = ax^2 + bx + c$)

a) Méthode1 : On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=1$ $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times 1} = -1 \text{ et } \beta = f(-\alpha) = f(1) = (1)^2 - 2 \times 1 + 1 = 0$$

Ainsi : dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet : $W(-\alpha; \beta)$ soit

$W(1; 0)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Méthode2 : On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$ (forme canonique)

Dans un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x) = (x-1)^2 + 0$ si $x \in \mathbb{R}$: $\alpha = -1$ et $\beta = 0$

Dans un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha; \beta)$ c'est-à-dire : $W(1; 0)$ et d'axe de symétrie la droite : $x = -\alpha = 1$

b) Le tableau de variations de f :

Dans notre exercice on a : $\alpha = -1$ et $\beta = 0$

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		$\downarrow$	$\uparrow$

4) $g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$

a) Méthode1 : On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $g(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha; \beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\alpha$ et $y = \beta$

Dans notre exercice on a : $g(x) = 3 - \frac{6}{x+1}$ si $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ donc : $\alpha = 1$ et $\beta = 3$ et $k = -6 < 0$

Donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-1; 3)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -1$ et $y = 3$

Et puisque : $k = -6 < 0$ alors : g est strictement croissante sur les intervalles : $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Méthode2 : (On utilisant un résumé de notre cours)

Si : $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $c \neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

1^{ier} cas : si $\det g = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$ alors g est strictement croissante

2^{ier} cas : si $\det g = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$ Avec : $a = 3$; $b = -3$; $c = 1$; $d = 1$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-1; 3)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\frac{1}{1} = -1$ et $y = \frac{3}{1} = 3$

$\det g = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-3) \times 1 = 6 > 0$

Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$			

5) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ Signifie } x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\text{Signifie : } (x-1)^2 = 0$$

$$\text{Signifie : } x-1 = 0$$

$$\text{Signifie : } x = 1$$

Donc : le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$

$$\text{Donc : } (C_f) \cap (ox) = \{A(1,0)\}$$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

$$\text{Et on a } f(0) = 0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

$$\text{Donc : } (C_f) \cap (oy) = \{B(0,1)\}$$

6) Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

$$g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$$

a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $g(x) = 0$

$$g(x) = 0 \text{ Signifie : } \frac{3x-3}{x+1} = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{Signifie : } 3x-3 = 0$$

$$\text{Signifie : } x = 1$$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$

$$\text{Donc : } (C_g) \cap (ox) = \{A(1;0)\}$$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

$$\text{Et on a : } g(0) = \frac{3 \times 0 - 3}{0 + 1} = \frac{-3}{1} = -3$$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées est : $C(0;-3)$

Donc : $(C_g) \cap (oy) = \{C(0; -3)\}$

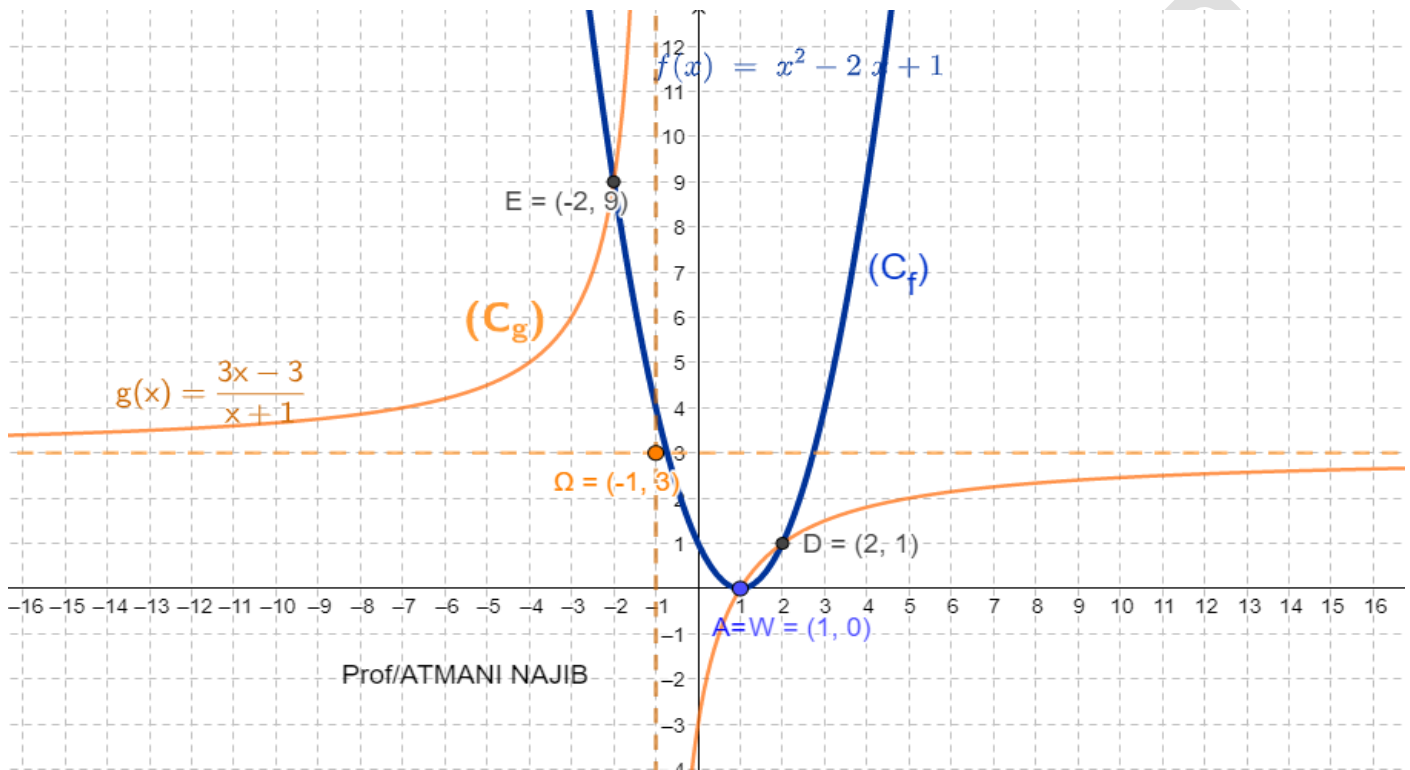
7) Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

La courbe $(C_g) : g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$

-4	-3	-2	-1	0	1	2
5	6	9		-3	0	1

La courbe $(C_f) : f(x) = x^2 - 2x + 1$

x	1	2	3
$f(x)$	0	1	4



8) Déterminons algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

Réolvons dans : $\mathbb{R} - \{-1\}$ l'équation : $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie que : $x^2 - 2x + 1 = \frac{3x-3}{x+1}$

Signifie que : $(x-1)^2 - \frac{3(x-1)}{x+1} = 0$

Signifie que : $(x-1) \left(x-1 - \frac{3}{x+1} \right) = 0$

Signifie que : $(x-1) \left(\frac{(x-1)(x+1)-3}{x+1} \right) = 0$

Signifie que : $(x-1) \left(\frac{x^2-1-3}{x+1} \right) = 0$

Signifie que : $(x-1) \left(\frac{x^2-4}{x+1} \right) = 0$

Signifie que : $(x-1) \left(\frac{x^2-2^2}{x+1} \right) = 0$

Signifie que : $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{x+1} = 0$ avec $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Signifie que : $(x-1)(x-2)(x+2) = 0$ avec $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Signifie que : $x-1=0$ ou $x-2=0$ ou $x+2=0$

Signifie que : $x=1$ ou $x=2$ ou $x=-2$

Et par suite : $(C_f) \cap (C_g) = \{A(1,0); E(-2,9); D(2,1)\}$

9) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f) est au-dessus de (C_g)

Donc : graphiquement : $S =]-\infty, -2] \cup]-1, 1] \cup [2, +\infty[$

10) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{3|x|-3}{|x|+1}$

a) Déterminons l'ensemble de définition D_h

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / |x|+1 \neq 0\}$$

$|x|+1=0$ Signifie $|x|=-1$ impossible

Donc : $D_h = \mathbb{R}$

b) Montrons que la fonction h est paire

si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = \frac{3|-x|-3}{|-x|+1} = \frac{3|x|-3}{|x|+1} = h(x) \text{ C'est à dire : } h(-x) = h(x)$$

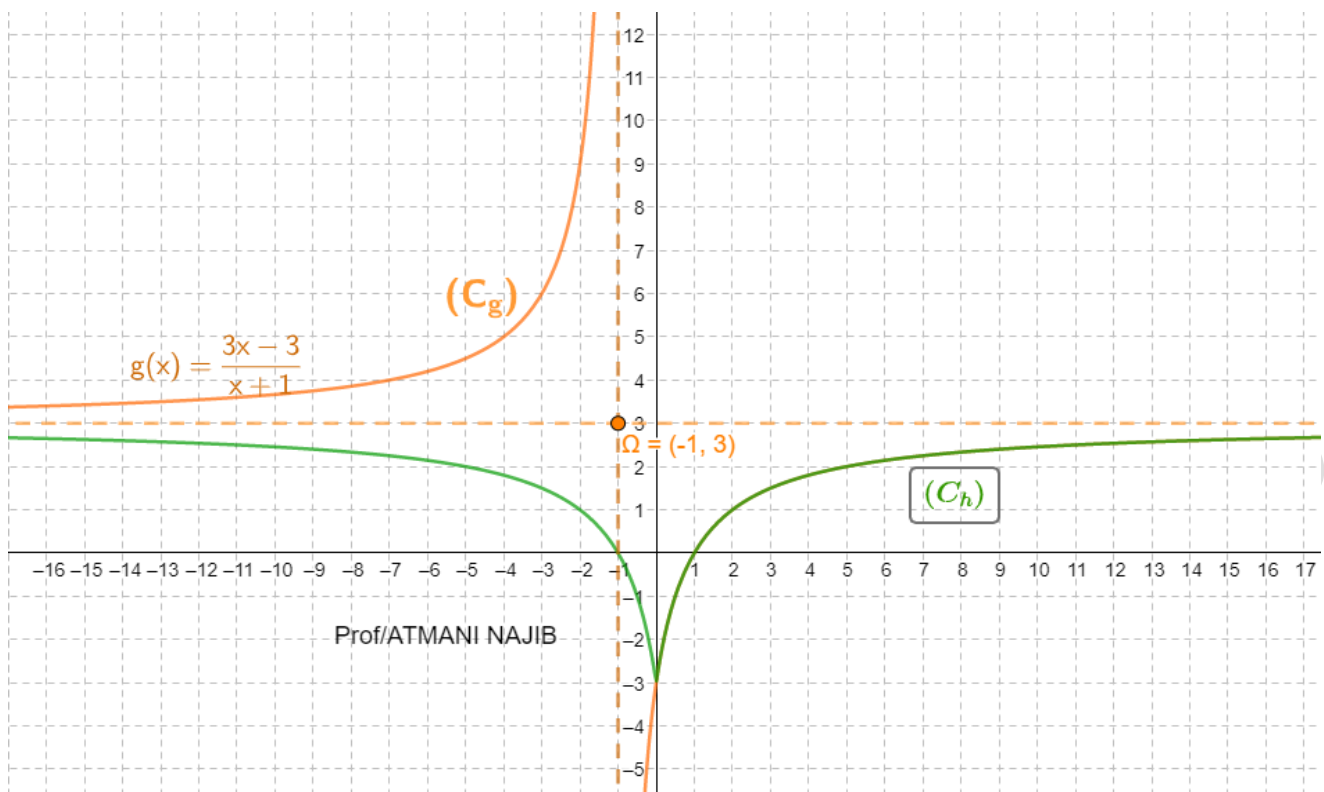
Donc h est une fonction paire,

c) Vérifions que $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

$$\text{Soit : } \mathbb{R}^+ \text{ on a : } h(x) = \frac{3|x|-3}{|x|+1} = \frac{3x-3}{x+1} = g(x) \text{ car } |x|=x$$

Donc : $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

11) Représentation de la courbes (C_h) de h dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

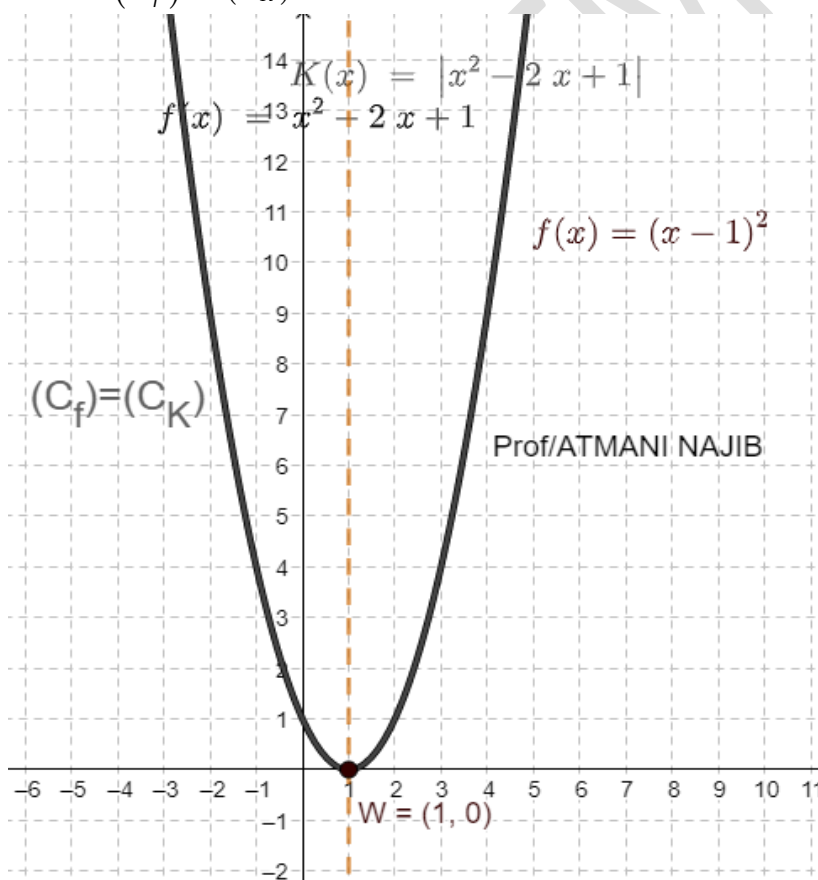


12) Soit K la fonction définie par : $K(x) = |f(x)|$

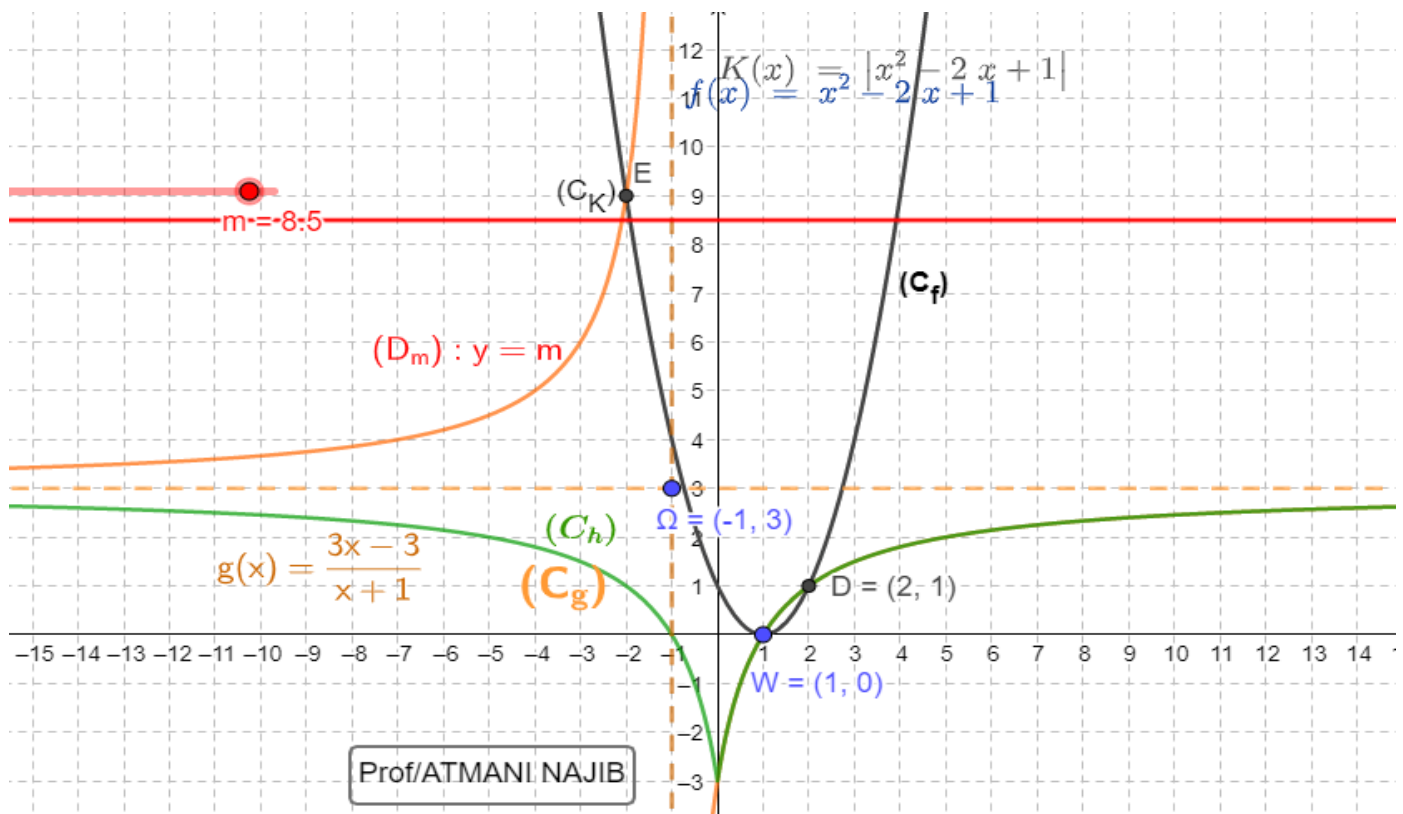
a) Tracer la courbe (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On a : $K(x) = |f(x)| = f(x)$ car $f(x) = (x-1)^2 \geq 0$

Donc : (C_f) et (C_K) sont confondues



Remarque : tous les courbes dans un même repère :



b) Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de

L'équation $K(x) = m$

Le nombre de solutions de l'équation $K(x) = m$: est le nombre de points d'intersection de (C_K) et la droite (D_m) d'équation : $(D_m) : y = m$

- ▷ Si $m < 0$: l'équation n'a pas de solutions
- ▷ Si $m = 0$: l'équation admet une seule solution
- ▷ Si $m > 0$: l'équation admet deux solutions

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

