http://www.xriadiat.com **DL5 C** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°5

Sur les : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice01 : Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=3x^2-1$

1) Calculer les images de 1 ; $\sqrt{2}$ et -1 par f.
2) Déterminer les antécédents de 2 par f
2) a) Déterminer les antécédents de 0 par f
b) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 2) a)

Solution : 1) Calcul des images : $f(1)=3\times1^2-1=3-1=2$ et $f(\sqrt{2})=3\times(\sqrt{2})^2-1=6-1=4$

$f(-1)=3\times(-1)^2-1=3-1=2$

2) x est l'antécédents de 2 par f signifie que 2 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=2$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=2$

Équivaut à : $3\times x^2-1=2$

Équivaut à : $3\times x^2=2+1$ équivaut à : $3\times x^2=3$

Équivaut à : $x^2=1$

Équivaut à : $x=-1$ ou $x=1$

Finalement les antécédents de 2 par f sont -1 et 1.

2) a) Déterminons les antécédents de 0 par f

x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Équivaut à : $3\times x^2-1=0$ Équivaut à : $3\times x^2=1$ équivaut à : $x^2=\frac{1}{3}$

Équivaut à : $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Finalement les antécédents de 0 par f sont $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Les antécédents éventuels de 0 par f sont : $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Donc : l'intersection de (C_f) la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points : $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$ et $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$

Exercice02 : Soient les deux fonctions suivantes : $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ et $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

Est-ce que : $f=g$? Justifier

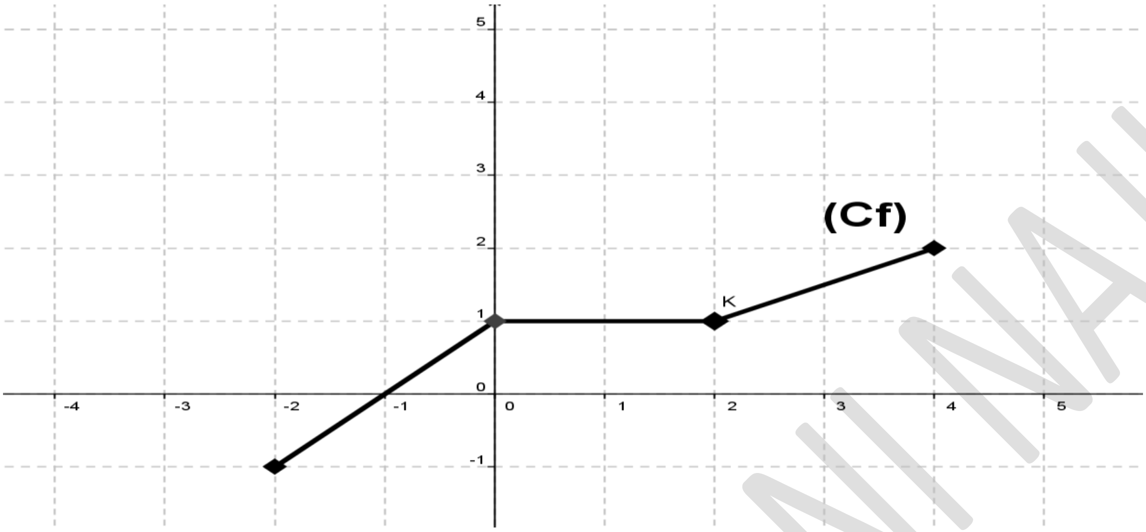
Solution : Nous avons : a) $D_f=\mathbb{R}-\{-1;0\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1;0\}$

b) $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}=f(x)$

Ainsi : $D_f=D_g$ et $g(x)=f(x)$ pour tout de : $D_f=D_g$

Donc : $f=g$

Exercice03 : La figure ci-dessous représente la représentation graphique d'une fonction f
Sur l'intervalle : $[-2,4]$



1) Déterminer les images des nombres **: -2 ; -1 ;0 ; 2 ; 4** par la fonction f

2) Donner les antécédents de : 2 ; 0 ; $\frac{3}{2}$ et 3 par f.

3) Combien d'antécédents à le nombre 1 par f.

4) Quel est le minimum de la fonction f sur $[-2,4]$? en quelle valeur ce minimum est-il atteint ?

5) Quel est le maximum de la fonction f sur $[-2,4]$? en quelle valeur ce maximum est-il atteint ?

6) Déterminer : $f(x)$ en fonction de x sur $[-2,4]$

Solution : 1) $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$ et $f(0)=1$ et $f(2)=1$ et $f(4)=2$

2) 2 admet un unique antécédent par f c'est : 4
0 admet un unique antécédent par f c'est : -1
$\frac{3}{2}$ Admet un unique antécédent par f c'est : 3
3 n'admet pas d'antécédents par f

3) Le nombre 1 admet une infinité d'antécédents à par f.

4) Le minimum de la fonction f sur $[-2,4]$ est : -1 ; il est atteint en -2

5) Le maximum de la fonction f sur $[-2,4]$ est : 2 ; il est atteint en 4

6) On remarque que la représentation graphique de la fonction f est un segment sur chacun des l'intervalles : $[-2,0]$et $[0,2]$ et $[2,4]$ donc la fonction f est affine sur ces intervalles

• Sur l'intervalle $[-2,0]$ on a :

$f(x)=a_1x+b_1$ et on a : $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$

Donc : $\begin{cases}-2a_1+b_1=-1\\-a_1+b_1=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}-a_1=-1\\b_1=a_1\end{cases}$ donc : $\begin{cases}a_1=1\\b_1=1\end{cases}$

Par suite : $f(x)=x+1$

• Sur l'intervalle $[0,2]$ on a : $f(x)=1$

• Sur l'intervalle $[2,4]$ on a : $f(x)=a_2x+b_2$ et on a : $f(2)=1$ et $f(4)=2$

Donc : $\begin{cases}2a_2+b_2=1\\4a_2+b_2=2\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}2a_2=1\\b_2=2-4a_2\end{cases}$ donc : $\begin{cases}a_2=\frac{1}{2}\\b_2=2-2=0\end{cases}$

Par suite : $f(x)=\frac{1}{2}x$

Par conséquent : $\begin{cases}f(x)=x+1 & si & x\in[-2,0]\\f(x)=1 & si & x\in[0,2]\\f(x)=\frac{1}{2}x & si & x\in[2,4]\end{cases}$

Exercice04 : Soit la fonction numérique : $f(x)=-4x^3+\frac{1}{2x}$

1) Déterminer D_f 2) Etudier la parité de f

3) Donner une interprétation graphique de ce résultat

4) Montrer que : $f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ pour tout $x\in D_f$

5) Montrer que la fonction : $g(x)=f(x)+1$ est une fonction ni paire ni impaire,

Solution :1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}-\{0\}$

- 2) Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=-4(-x)^3+\frac{1}{2(-x)}=-\left(-4x^3+\frac{1}{2x}\right)$

$f(-x)=-f(x)$

Cela signifie que : f est une fonction impaire

3) Une interprétation graphique : puisque f est une fonction impaire alors $O(0;0)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.

4) Pour tout $x\in D_f$ nous avons : $f(x)-f(-x)=f(x)-(-f(x))$ Car f est une fonction impaire

Donc : $f(x)-f(-x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

D'où : $f(x)-f(-x)=2f(x)$ par suite : $f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ pour tout $x\in D_f$

5) $g(x)=f(x)+1=-4x^3+\frac{1}{2x}+1$; on a : $D_g=\mathbb{R}^*$

$g(-1)=-4(-1)^3+\frac{1}{2(-1)}+1=\frac{9}{2}$ et $g(1)=-4(1)^3+\frac{1}{2\times1}+1=-\frac{5}{2}$ et $-g(1)=\frac{5}{2}$

Nous remarquons que : $g(-1)\neq -g(1)$ et $g(-1)\neq g(1)$

Cela signifie que : la fonction g est ni paire ni impaire,

Exercice05 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{2x^2-3}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 2 - \frac{5}{x^2+1}$

4) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$

5) Dresser le tableau de variation de f

6) Déterminer les extrémums de f

Solution : $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^2+1}$

1 $D_f = \{x \in E / x^2+2 \neq 0\}$; $x^2+2=0$ Signifie $x^2=-2$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+2 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = \frac{2(-x)^2-3}{(-x)^2+1} = \frac{2x^2-3}{x^2+1} = f(x)$ donc : $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) Montrons que : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 2 - \frac{5}{x^2+1}$

Méthode1 : $2 - \frac{5}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)-5}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-5}{x^2+1} = \frac{2x^2-3}{x^2+1}$

Donc : $2 - \frac{5}{x^2+1} = f(x)$

Méthode2 : $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-2-3}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)-5}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{5}{x^2+1}$

Donc : $f(x) = 2 - \frac{5}{x^2+1}$

4) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

2) soient $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tel que : $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2$ Implique : $x_1^2 < x_2^2$

Implique : $x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1$

Implique : $\frac{1}{x_2^2+1} < \frac{1}{x_1^2+1}$

Implique : $\frac{-5}{x_1^2+1} < \frac{-5}{x_2^2+1}$

Implique : $2 - \frac{5}{x_1^2+1} < 2 - \frac{5}{x_2^2+1}$

Implique : $f(x_1) < f(x_2)$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Déduction des variations de f sur $]-\infty;0]$:

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et f est une fonction paire et le symétrique de $[0;+\infty[$ est $]-\infty;0]$

Alors : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

5) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

6)D'après le tableau de variation de f on a : $f(0)=-3$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice06 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$ Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2+2$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $0\leq f(x)$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-1;3]$ On a : $0\leq f(x)\leq 16$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ On a : $1\leq f(x)\leq 16$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=x+3$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=x^2+2x+1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^2+2x_2+1)-(x_1^2+2x_1+1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2+2x_2+1-x_1^2-2x_1-1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_2^2-x_1^2+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=x_1+x_2+2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-1;+\infty[$

Soients : $x_1\in[-1;+\infty[$ et $x_2\in[-1;+\infty[$ alors : $x_1\geq -1$ et $x_2\geq -1$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>-2$

Par suite : $x_1+x_2+2>0$.

Donc $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-1]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-1]$ et $x_2\in]-\infty;-1]$ alors : $x_1\le -1$ et $x_2\le -1$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique $x_1+x_2<-2$

Par suite : $x_1+x_2+2<0$.

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)+1=1-2+1=0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1)=0$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-1)\le f(x)$

Par suite : $0\le f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in[-1;3]$ alors : $-1\le x\le 3$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-1;3]$

Alors : $f(-1)\le f(x)\le f(3)$ et comme : $f(-1)=0$ et $f(3)=3^2+2\times 3+1=9+6+1=16$

Par suite : $0\le f(x)\le 16$

b) Soit : $x\in[-5;-2]$ On a alors : $-5\le x\le -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-1]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-5;-2]$

Alors : $f(-2)\le f(x)\le f(-5)$ et comme :

$f(-5)=(-5)^2+2\times(-5)+1=25-10+1=16$ Et $f(-2)=(-2)^2+2\times(-2)+1=4-4+1=1$

Par suite : $1\le f(x)\le 16$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2+2x+1=0$

Signifie : $(x+1)^2=0$

Signifie : $x+1=0$ c'est-à-dire : $x=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(-1;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

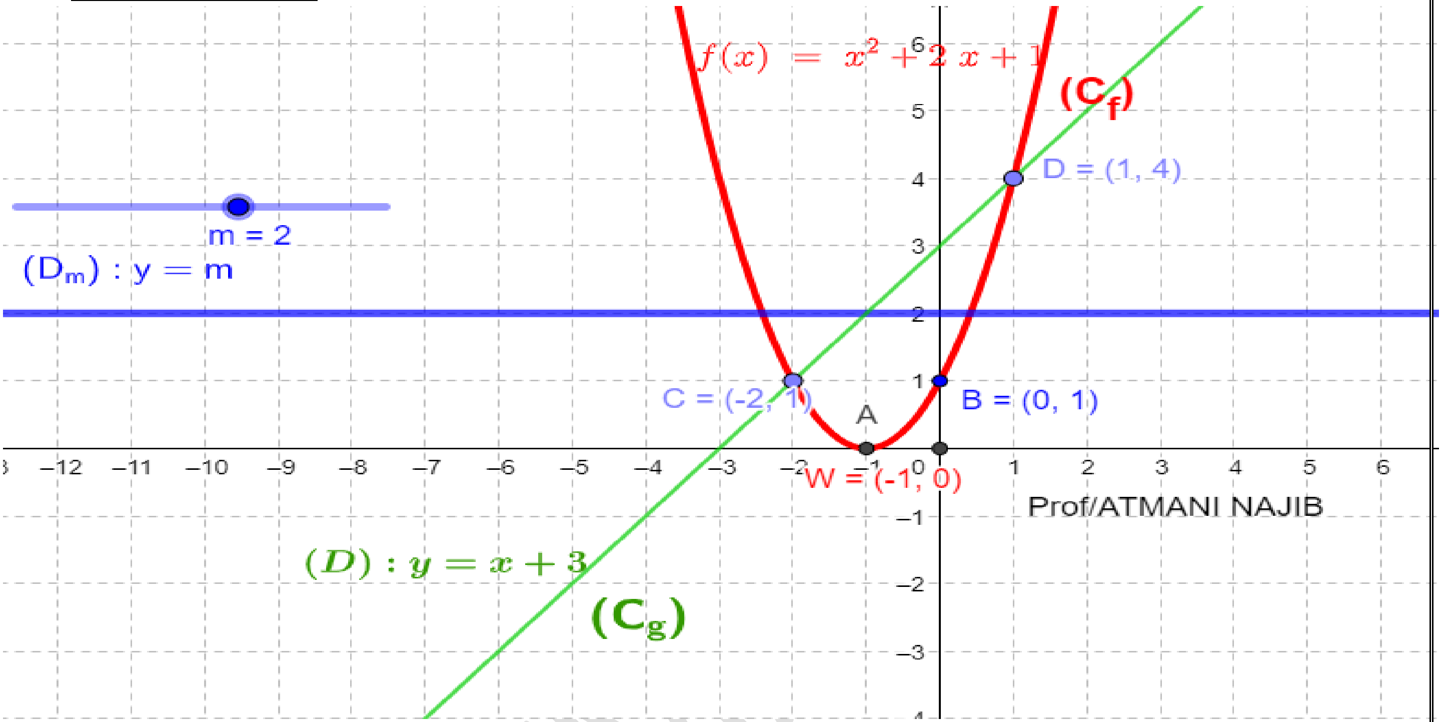
Et on a $f(0)=0^2+2\times 0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

x	-2	1
g(x)	1	4



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 1$ donc $S = \{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $x^2 + 2x + 1 = x + 3$ c'est-à-dire : $x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times(-2)\times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Donc : $S = \{-2;1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x) < f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessous de (C_f) si $x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x) < f(x)$:

$g(x) < f(x)$ Signifie $x + 3 < x^2 + 2x + 1$

C'est-à-dire : $x^2 + x - 2 > 0$

Les racines sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$-x^2-2x+m-1=0$ Signifie $m=x^2+2x+1$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m<0$ l'équation n'admet pas de solution
Si : $m=0$ il y'a une solution c'est : x = -1
Si : $m>0$ il y'a deux solutions

Exercice07 : **Partie A** : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x^2+4x-2$

(C_f) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (déterminer $a;\alpha$ et β)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (C_g) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_g

2) Ecrire $g(x)$ sous la forme : $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-2,7$; $0,5$; $1,3$

Solution : Partie A : 1) On a : f est une fonction polynôme ; donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x)=2x^2+4x-2=2(x^2+2x)-2=2\left((x+1)^2-1\right)-2=2(x+1)^2-2-2=2(x+1)^2-4$

Donc : $f(x)=2x^2+4x-2=2(x+1)^2-4$ Donc $\alpha=1$ et $\beta=-4$ et $a=2$

Méthode2 : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=2$ et $c=-2$

Donc $\alpha=\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4}{2\times2}=1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(-1)=2(-1)^2+4\times(-1)-2=-4$

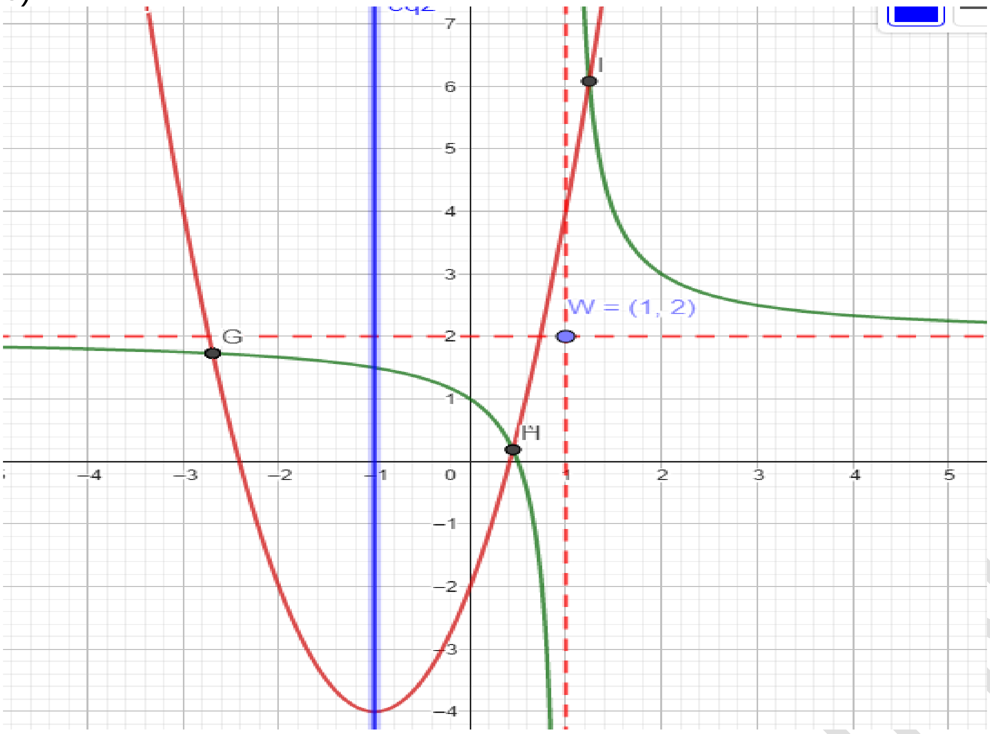
Donc : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=2(x+1)^2-4$

3) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(-\alpha;\beta)$; $W(-1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. $x=-1$

4)Tableau de variations de f : On a $a=2>0$ donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

3)



Partie B :**1)** Soit g une fonction numérique : $g(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1\}$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Si $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : la division euclidienne de : $2x-1$ *par* $x-1$ donne : $2x-1=2(x-1)+1$

$g(x)=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=2+\dfrac{1}{x-1}$ et $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ Donc : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $k=1>0$

3) Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$; $\Omega(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$

4) Le tableau de variations de :

$k=1>0$

x	$-\infty$	-1 $+\infty$
g	$\searrow$	$\searrow$

5) Voir partie1

6)

x	1	2	3	4
g(x)		3	5/2	7 /3

6) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-2,7$; $0,5$; $1,3$

(C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in\left]-2,7;0,5\right[\cup\left]1;1,3\right[$

Donc : $S=\left]-2,7;0,5\right[\cup\left]1;1,3\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien