http://www.xriadiat.com **DL5 B** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°5

Sur les : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice01 : Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=-x^2+2x+2$

1) Calculer les images de $\frac{-1}{2}$ et $\sqrt{3}$ par f.

2) Montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f

3) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f

4) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 3)

Solution : 1) Calcul des images :

$f\left(\frac{-1}{2}\right)=-\left(\frac{-1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{-1}{2}\right)+2=-\frac{1}{4}-1+2=\frac{3}{4}$ et $f\left(\sqrt{3}\right)=-\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\left(\sqrt{3}\right)+2=-3+2\sqrt{3}+2=-1+2\sqrt{3}$

2) Pour montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f il suffit de montrer que : $f\left(1+\sqrt{2}\right)=1$?

$$f\left(1+\sqrt{2}\right)=-\left(1+\sqrt{2}\right)^2+2\times\left(1+\sqrt{2}\right)+2=-\left(1+2\sqrt{2}+2\right)+2+2\sqrt{3}+2=-3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4=1$$

Donc : $f\left(1+\sqrt{2}\right)=1$ par suite : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f

3) x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à : $-x^2+2x+2=0$ $a=-1$ et $b=2$ et $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times(-1)=4+8=12=\left(2\sqrt{3}\right)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-2+2\sqrt{3}}{-2}=1-\sqrt{3}$ et $x_1=\frac{-2-2\sqrt{3}}{-2}=1+\sqrt{3}$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

4) les antécédents éventuels de 0 par f sont :$1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

Donc : l'intersection de (C_f) la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points : $A\left(1-\sqrt{3};0\right)$ et $B\left(1+\sqrt{3};0\right)$

Exercice 4 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{x^2+1}{5x^2-4x}$ 2) $f(x)=\frac{\left|-5x^2+2\right|}{2x^2-x-6}$ 3) $f(x)=\frac{2x^5-2023}{x^2+3x+10}$

4) $f(x)=\frac{6x-5}{x^4-2x^2+1}$ 5) $f(x)=\frac{-\sqrt{x-1}+1}{|7x-10|-|6+3x|}$ 6) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{6|x+5|+2}$

7) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ 8) $f(x)=\frac{\left|x^2-6\right|}{\sqrt{-2x^2+4x-2}}$ 9) $f(x)=\sqrt{\frac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}}$

10) $f(x)=\sqrt{2|x-9|-1}$ 11) $f(x)=2\sin^2x+3\cos x-1$ 12) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

13) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$ 14) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$

Solution :1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{5x^2-4x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/5x^2-4x\neq 0\right\}$

$5x^2-4x=0$ Signifie que : $x(5x-4)=0$

Signifie que : $x=0$ ou $5x-4=0$ c'est-à-dire : $x=0$ ou $x=\dfrac{4}{5}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{0;\dfrac{4}{5}\right\}$

2) $f(x)=\dfrac{|-5x^2+2|}{2x^2-x-6}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-6\neq 0\right\}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$: a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2-4ac=(-1)^2-4\times 2\times(-6)=49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};2\right\}$

3) $f(x)=\dfrac{2x^5-2023}{x^2+3x+10}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+10\neq 0\right\}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$: a = 1, b = 3 et c = 10

Donc : $\Delta = b^2-4ac=3^2-4\times 1\times 10=-31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle

C'est-à-dire : $D_f=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\dfrac{6x-5}{x^4-2x^2+1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^4-2x^2+1\neq 0\right\}$

$x^4-2x^2+1=0$ Equivalent à : $\left(x^2\right)^2-2x^2+1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons l'équation : $X^2-2X+1=0$

$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 1=4-4=0$

La solution double de : $X^2-2X+1=0$ est : $X=\dfrac{-(-2)}{2\times 1}=\dfrac{2}{2}=1$

Donc on a : $x^2=1$

Donc : $x=1$ ou $x=-1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

5) $f(x)=\dfrac{-\sqrt{x-1}+1}{|7x-10|-|6+3x|}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / |7x-10|-|6+3x|\neq 0 \;\; et \;\; x-1\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / |7x-10|-|6+3x|\neq 0 \;\; et \;\; x\geq 1\}$

$|7x-10|-|6+3x|=0$ Équivalent à : $|7x-10|=|6+3x|$

Équivalent à : $7x-10=6+3x$ ou $7x-10=-(6+3x)$

Équivalent à : $4x=16$ ou $10x=4$ équivalent à $x=4$ ou $x=2/5$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / x\neq\frac{2}{5} \;\; et \;\; x\neq 4 \;\; et \;\; x\geq 1\right\}$

Donc : $D_f=[1;4[\cup]4;+\infty[$

6) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{6|x+5|+2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 6|x+5|+2\neq 0 \;\; et \;\; x\geq 0\}$

On a : $|x+5|\geq 0$ donc : $6|x+5|\geq 0$ donc : $6|x+5|+2\geq 2>0$

Donc : $6|x+5|+2\neq 0$

Par suite : $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 0\}$

Par suite : $D_f=[0,+\infty[$

7) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x^2-3x+1>0\}$

$2x^2-3x+1$ Calculons son discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1

Donc : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$

8) $f(x)=\frac{|x^2-6|}{\sqrt{-2x^2+4x-2}}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / -2x^2+4x-2>0\}$

Étudions le signe du trinôme de : $-2x^2+4x-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une racine double : $x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

Comme : $a=-2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

Donc : $D_f=\varnothing$

9) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}\geq 0 \;\; et \;\; 2x^2+x-5\neq 0\right\}$$

Il faut étudier le signe du numérateur et du dénominateur puis regrouper les résultats dans un tableau de signes. Pour le numérateur : $\Delta=1^2-4\times(-1)\times 5=1+20=21$;

Delta est positif donc l'équation du deuxième degré possède deux solutions :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{-2}=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\simeq 2,8$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{-2}=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\simeq -1,8$

Le coefficient devant x² est négatif donc le numérateur est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines. De même, pour le dénominateur : $\Delta=1^2-4\times(-5)\times 2=1+40=41$

Donc : $x_1'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{4}\simeq -1,9$ et $x_2'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}\simeq 1,4$

Le coefficient devant x² est positif donc le dénominateur est négatif entre ses racines.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x^2+x-5$		$+$	0	$+$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+x+5}{2x^2+x-5}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left]\dfrac{-1-\sqrt{41}}{4};\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right]\cup\left]\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4};\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

10) $f(x)=\sqrt{2|x-9|-1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2|x-9|-1\geq 0\}$

$2|x-9|-1\geq 0$ Signifie que : $2|x-9|\geq 1$

Signifie que : $|x-9|\geq\dfrac{1}{2}$

Signifie que : $x-9\geq\dfrac{1}{2}$ ou $x-9\leq-\dfrac{1}{2}$

Signifie que : $x\geq\dfrac{1}{2}+9$ ou $x\leq-\dfrac{1}{2}+9$

Signifie que : $x\geq\dfrac{19}{2}$ ou $x\leq-\dfrac{17}{2}$

Donc : $D_f = \left]-\infty;-\frac{17}{2}\right] \cup \left[\frac{19}{2};+\infty\right[$

11) Un réel a toujours une image par f

Donc $D_f = \mathbb{R}$

12) $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-5x}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-1 \geq 0 \ et \ 3-5x \geq 0\}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{1}{2} \ et \ x \leq \frac{3}{5}\right\}$ Donc $D_f = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$

13) $f(x) = \frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2|x| - 3 \neq 0\}$

$x^2 + 2|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 = 0$ On pose $|x| = X$ donc l'équation devient :

$X^2 + 2X - 3 = 0$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et ses solutions sont :

$X_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = -3$ et $X_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = 1$

Donc on a : $|x| = -3$ et $|x| = 1$

$|x| = -3$ N'a pas de solution

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ Ou $x = -1$ donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$

14) $f(x) = \frac{2\sin x}{2\cos x - 1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2\cos x - 1 \neq 0\}$

$2\cos x - 1 = 0$ Signifie $\cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ Signifie $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 5 : (***) Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x+2} & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{(x+1)(4-x)} & si \quad x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) Calculer : $f(2)$; $f(0)$; $f(-1)$

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R}^- / x+2 \neq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^{+*} / (x+1)(4-x) \neq 0\}$

Donc : $D_f = \{x \in \mathbb{R}^- / x \neq -2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^{+*} / x \neq -1 \ et \ x \neq 4\}$

Donc : $D_f =]-\infty;-2[\cup]-2;0] \cup]0;4[\cup]4;+\infty[$

Par suite : $D_f =]-\infty;-2[\cup]-2;4[\cup]4;+\infty[$

2) calcul de : $f(2)$

On a : $2 \succ 0$ donc : $f(2)=\frac{2^2}{(2+1)(4-2)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Calcul de : $f(0)$

On a : $0 \leq 0$ donc : $f(0)=\frac{0-1}{0+2}=\frac{-1}{2}$

Calcul de $f(-1)$: On a : $-1 \leq 0$

Donc : $f(-1)=\frac{-1-1}{-1+2}=\frac{-2}{1}=-2$

Exercice 7 : (**) Soient les deux fonctions : $h(x)=\frac{x^2-x}{x}$ et $t(x)=x-1$

Est-ce que : $h=t$? Justifier

Solution :

- On a $h(x) \in \mathbb{R}$ signifie que : $x \neq 0$ donc $D_h=\mathbb{R}^*$
- On a $t(x)$ est un polynôme donc : $D_t=\mathbb{R}$

Alors : $D_h \neq D_t$ donc : $h \neq t$

Exercice 9 : (*) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-4x^2+1$

Montrer que $g(0)=1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

Solutions : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-4x^2+1$ $D_g=\mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$

Donc $-4x^2 \leq 0$ car $-4 \prec 0$

Par suite $-4x^2+1 \leq 1$ et on a $g(0)=1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \leq g(0)$

D'où : $g(0)=1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 10 : (**) Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+2}$

1) Déterminer D_f
2) Etudier la parité de la fonction f
3) Donner une interprétation graphique de ce résultat
4) Montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x)=3-\frac{7}{x^2+2}$
5) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$

6) Dresser le tableau de variation de f
7) Déterminer les extrémums de f

Solution : $f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+2}$

1) $D_f=\{x \in E / x^2+2 \neq 0\}$

$x^2+2=0$ Signifie $x^2=-2$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+2 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = \dfrac{3(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 2} = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + 2} = f(x)$ Donc : $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) Une interprétation graphique : puisque f est une fonction paire alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie à la courbe de f .

4) Montrons que : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 3 - \dfrac{7}{x^2 + 2}$

Méthode1 : $3 - \dfrac{7}{x^2+2} = \dfrac{3(x^2+2) - 7}{x^2+2} = \dfrac{3x^2 + 6 - 7}{x^2+2} = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2+2}$

Donc : $3 - \dfrac{7}{x^2+2} = f(x)$

Méthode2 : $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2+2} = \dfrac{3x^2 + 6 - 6 - 1}{x^2+2} = \dfrac{3(x^2+2) - 7}{x^2+2} = \dfrac{3(x^2+2)}{x^2+2} - \dfrac{7}{x^2+2}$

Donc : $f(x) = 3 - \dfrac{7}{x^2+2}$

5) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

soient $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tel que : $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2$ Implique : $x_1^2 < x_2^2$

Implique : $x_1^2 + 2 < x_2^2 + 2$

Implique : $\dfrac{1}{x_2^2 + 2} < \dfrac{1}{x_1^2 + 2}$

Implique : $\dfrac{-7}{x_1^2 + 2} < \dfrac{-7}{x_2^2 + 2}$

Implique : $3 - \dfrac{7}{x_1^2 + 2} < 3 - \dfrac{7}{x_2^2 + 2}$

Implique : $f(x_1) < f(x_2)$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Déduction des variations de f sur $]-\infty;0]$:

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et f est une fonction paire et le symétrique de $[0;+\infty[$ est $]-\infty;0]$

Alors : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

6) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-1/2$	↗	

7)D'après le tableau de variation de f on a : $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 14 : (***) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-x^2+4x-1$

1)Préciser le domaine de définition de g

2)Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$

3)Etudier la monotonie de g sur : $I=[2;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;2]$

4)Dresser le tableau de variation de g

5)En déduire les extrémums de g sur $\mathbb{R}$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=x-1$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)>f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2-4x+m+1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solutions : 1) g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\left(-x_1^2+4x_1-1\right)-\left(-x_2^2+4x_2-1\right)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_1^2+x_2^2+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-\left(x_1^2-x_2^2\right)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(-x_1-x_2+4)}{x_1-x_2}=-x_1-x_2+4$$

Donc : $\boxed{T(x_1;x_2)=-x_1-x_2+4}$

3)a) Etude de la monotonie de g sur : $I=[2;+\infty[$

Soient : $x_1\in[2;+\infty[$ et $x_2\in[2;+\infty[$ alors $x_1\geq 2$ et $x_2\geq 2$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>4$

Donc $-x_1-x_2<-4$ par suite : $-x_1-x_2+4<0$

Donc $T(x_1;x_2)<0$ d'où : g est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de g sur : $J=]-\infty;2]$

Soient : $x_1\in]-\infty;2]$ et $x_2\in]-\infty;2]$

Alors : $x_1\leq 2$ et $x_2\leq 2$ et $x_1\neq x_2$ cela implique $x_1+x_2<4$

Donc $-x_1-x_2>-4$ par suite : $-x_1-x_2+4>0$

Donc $T(x_1;x_2)>0$

D'où : g est strictement croissante sur $]-\infty;2]$

4) <u>Résumé</u> : tableau de variation : On a : $g(2)=-2^2+4\times2-1=-4+8-1=3$

Donc :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

5) $g(2)=3$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

6)a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection A et B de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation : $g(x)=0$.

$g(x)=0$ Signifie $-x^2+4x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=16-4\times(-1)\times(-1)=16-4=12>0$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-4+\sqrt{4\times3}}{-2}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{-2}=\frac{-2\left(2-\sqrt{3}\right)}{-2}=2-\sqrt{3}$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-4-\sqrt{4\times3}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{3}}{-2}=\frac{-2\left(2+\sqrt{3}\right)}{-2}=2+\sqrt{3}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{3};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{3};0\right)$

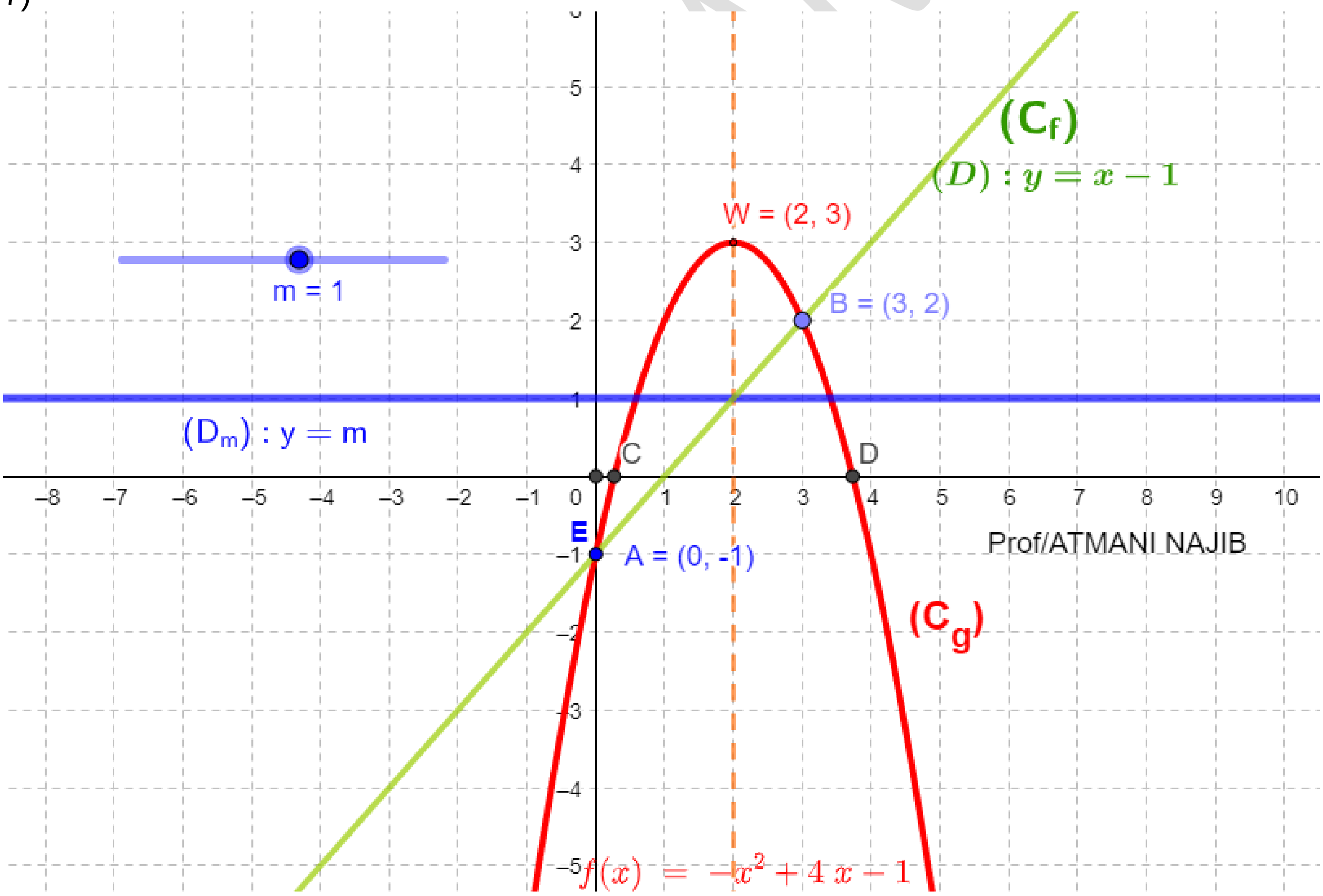
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $g(0)=-0^2+4\times0-1=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;-1)$

7)



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=0$ et $x=3$ donc $S=\{0;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f\left(x\right)=g\left(x\right)$

$f\left(x\right)=g\left(x\right)$ Signifie : $-x^2+4x-1=x-1$ c'est-à-dire : $-x^2+3x=0$

Signifie : $x\left(-x+3\right)=0$

Signifie : $-x+3=0$ ou $x=0$

C'est-à-dire : $x=3$ ou $x=0$

Donc : $S=\{0;3\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g\left(x\right)>f\left(x\right)$:

La courbe $\left(C_g\right)$ est au-dessus de $\left(C_f\right)$ si $x\in\left]0;3\right[$

Donc $S=\left]0;3\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g\left(x\right)>f\left(x\right)$:

$g\left(x\right)>f\left(x\right)$ Signifie $-x^2+4x-1\succ x-1$ C'est-à-dire : $-x^2+3x>0$

Les racines sont : $x_1=0$ et $x_2=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-x^2+3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=\left]0;3\right[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2-4x+m+1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$x^2-4x+m+1=0$ Signifie $m=-x^2+4x-1$

Signifie : $m=g\left(x\right)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de $\left(C_g\right)$ et la droite : $y=m$

Si : $m>3$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m=3$ il y'a une solution c'est : x = 2

Si : $m<3$ il y'a deux solutions

Exercice 15 : (***) Soit f une fonction tel que : $f\left(x\right)=\dfrac{x-2}{x-1}$

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) a) Montrer que : $f\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x-1}$ pour tout $x\in D_f$

b) Montrer que $\left(C_f\right)$ est une hyperbole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de f

c) Tracer la courbe $\left(C_f\right)$

2) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f\left(x\right)>0$

3) Soit g une fonction tel que : $g\left(x\right)=x^2-2x+3$

a) Montrer que la courbe $\left(C_g\right)$ c'est une parabole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de g

b) Tracer la courbe $\left(C_g\right)$ dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{g\left(x\right)}{f\left(x\right)}>0$

(μ La solution de l'équation : $g\left(x\right)=f\left(x\right)$ n'est pas demandé de la déterminer)

Solutions : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ a) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

Montrons que : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $1-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1-1}{x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}$

Donc : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

b) On utilisant le résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $f(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$ avec : $\alpha=-1$ et $\beta=1$ et $k=-1\prec 0$

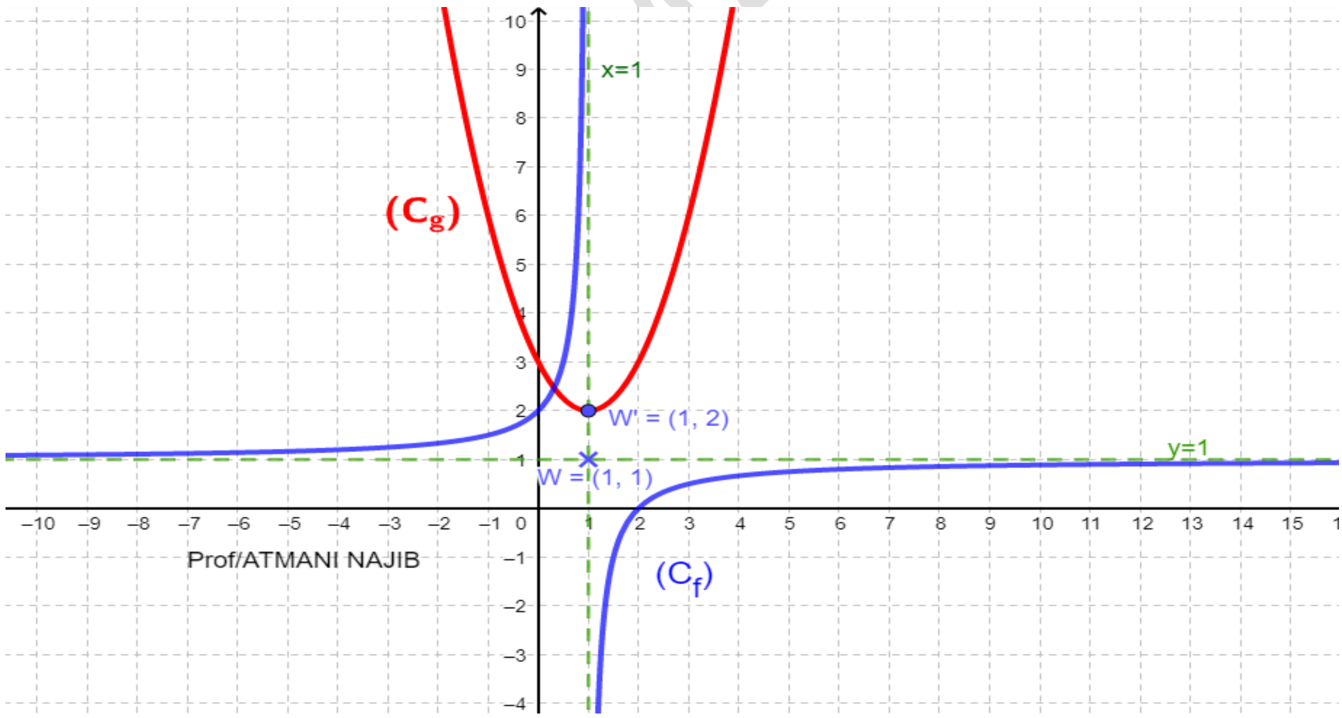
Donc (C_f) est une hyperbole de centre $W(1;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :
$x=1$ et $y=1$

Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

-2	**-1**	**0**	**1**	**2**	3	4
4/3	3/2	2		0	1/2	2/3

c)La courbe (C_f) : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$



2) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)>0$

$f(x)>0$ Equivaut à : x appartient à l'intervalle ou (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses

Donc : $S=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$

3) a) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

On a g est une fonction polynôme donc : $D_g=\mathbb{R}$

Méthode1 : $g(x)=x^2-2x+3=x^2-2x+1-1+3=(x-1)^2+2=1(x-1)^2+2$

Donc : $g(x)=1(x-1)^2+2$ et $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

Donc $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $a=1$

Méthode2 : $\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=3$

Donc $\alpha=\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=-1$ et $\beta=g(-\alpha)=g(1)=(1)^2-2\times(1)+3=2$

Donc : $g(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=1(x-1)^2+2$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W'(-\alpha;\beta)$: $W'(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Tableau de variations de g : On a $a=1>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

c) Résolution graphique de l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)}>1$

$\frac{g(x)}{f(x)}>1$ Equivaut à : Equivaut à : $\frac{g(x)-f(x)}{f(x)}>0$

Donc : on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		μ		1		2		$+\infty$
$g(x)-f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	‖	$-$		$+$	
quotient		$+$	0	$-$	‖	$-$		$+$	

Donc : $S=]-\infty;\mu[\cup]2;+\infty[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien