http://www.xriadiat.com **DL5 A** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°5 Sur les : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice01 : Soit la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{1}{|x|+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2) Calculer les images de : 0 ; 1 ; -1 et -2 par f.

2) Les nombres : 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 et 2 ont-ils des antécédents par f ? si oui, trouver ces antécédents

3) Montrer que 1 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) $D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_f=\{x\in E\,/\,|x|+1\neq 0\}$

$|x|+1=0$ Signifie $|x|=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $|x|+1$ ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Calculons les images de : 0 ; 1 ; -1et-2 par f.

- $f(0)=\frac{1}{|0|+1}=\frac{1}{0+1}=\frac{1}{1}=1$

Donc : l'image de 0 par f est : 1

- $f(1)=\frac{1}{|1|+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Donc : l'image de 1 par f est : $\frac{1}{2}$

- $f(-1)=\frac{1}{|-1|+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Donc : l'image de -1 par f est : $\frac{1}{2}$

Remarque : 1 et -1 ont les mêmes images par f car : $f(-1)=f(1)=\frac{1}{2}$

- $f(-2)=\frac{1}{|-2|+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$; Donc : l'image de -2 par f est : $\frac{1}{3}$

2) a) Déterminons les antécédents de : 0 par f s'ils existent :

x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=0$ Signifie que : $1=0$ (impossible)

Par suite : 0 n'admet pas d'antécédents par f

b) Déterminons les antécédents de : $\frac{1}{2}$ par f s'ils existent :

x Est l'antécédents de $\frac{1}{2}$ par f signifie que $\frac{1}{2}$ est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=\frac{1}{2}$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $|x|+1=2$

Signifie que : $|x|=1$

Signifie que : $x=1$ ou $x=-1$

Par suite : les antécédents de $\frac{1}{2}$ par f sont :1 et -1.

c) Déterminons les antécédents de : 1 par f s'ils existent :
x Est l'antécédents de 1 par f signifie que 1 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=1$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

$f(x)=1$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=1$ Signifie que : $|x|+1=1$

Signifie que : $|x|=0$

Signifie que : $x=0$

Par suite :1 admet un unique antécédent par f c'est : 0
d) Déterminons les antécédents de : 2 par f s'ils existent :
x est l'antécédents de 2 par f signifie que 2 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=2$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

$f(x)=2$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=2$ Signifie que : $|x|+1=\frac{1}{2}$

Signifie que : $|x|=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ (impossible)

Par suite : 2 n'admet pas d'antécédents par f
3) Montrons que 1 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$
On a déjà vu que : $f(0)=1$

Il suffit de montrer que : $f(x)\leq f(0)$ pour tout réel x

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $|x|\geq 0$ donc : $|x|+1\geq 1$ donc : $\frac{1}{|x|+1}\leq 1$

Donc : $f(x)\leq f(0)$ pour tout réel x

Par suite : $f(0)=1$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice02 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=7x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+6$.
2) $f(x)=\frac{2x^3-5x+1}{6x+12}$.
3) $f(x)=\frac{4x^5-3x}{36x^2-25}$.
4) $f(x)=\frac{2024x-1}{x^3-5x}$.
5) $f(x)=\sqrt{-2x+8}$.
6) $f(x)=\frac{-x^2+2025x+1}{3x^2+2x-1}$.
7) $f(x)=-2023x^2+2024x+2025+\sqrt{3x^2+2x-1}$.
8) $f(x)=\sqrt{\frac{-2x+4}{x-3}}$.
9) $f(x)=\frac{-6x^3+\cos x-1}{\sqrt{3x^2+2x-1}}$.
10) $f(x)=\frac{\sin x-2}{|x-2|-|x+1|}$
11) $f(x)=\frac{\sqrt{2x-12}}{x^2-8x}$
12) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-|2x-4|\geq 0\}$
13) $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}-3}{x^6-28x^3+27}$
14) $f(x)=\frac{\cos^2 x-\sin x}{\sqrt{2}\sin x-1}$
15) $f(x)=\frac{5x-1}{x^2+2}$
16) $f(x)=\sqrt{2+x}+\sqrt{1-x}$
17) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x}+2}$

Solution : Remarque : Soit f une fonction réelle de la variable réelle de E dans F

L'ensemble de définition de la fonction f se note D_f et on a :

$D_f=\{x\in E/f(x)\,est\ calculable\}$ Ou $D_f=\{x\in E/f(x)\in F\}$ ou encore $D_f=\{x\in E/f(x)\in\mathbb{R}\}$

1) $f(x)=7x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+6$ f est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{2x^3-5x+1}{6x+12}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/6x+12\neq 0\}$

$6x+12=0$ Signifie $x=-\frac{12}{6}=-2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

On dira aussi que -2 est une valeur interdite pour la fonction f

Remarque : -2 est la seule valeur réelle qui n'a pas d'image par f

3) $f(x)=\frac{4x^5-3x}{36x^2-25}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/36x^2-25\neq 0\}$

$36x^2-25=0$ Signifie $(6x)^2-5^2=0$ c'est-à-dire : $(6x-5)(6x+5)=0$

Signifie $6x-5=0$ ou $6x+5=0$ Signifie $x=\frac{5}{6}$ ou $x=-\frac{5}{6}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{6};\frac{5}{6}\right\}$ ou $D_f=\left]-\infty;-\frac{5}{6}\right[\cup\left]-\frac{5}{6};\frac{5}{6}\right[\cup\left]\frac{5}{6};+\infty\right[$

4) $f(x)=\frac{2024x-1}{x^3-5x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-5x\neq 0\}$

$x^3-5x=0$ Signifie $x(x^2-5)=0$ Équivaut à : $x=0$ ou $x^2-5=0$

C'est-à-dire : $x=0$ ou $x^2=5$

Signifie $x=0$ ou $x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{5};0;\sqrt{5}\right\}$ ou $D_f=\left]-\infty;-\sqrt{5}\right[\cup\left]-\sqrt{5};0\right[\cup\left]0;\sqrt{5}\right[\cup\left]\sqrt{5};+\infty\right[$

5) $f(x)=\sqrt{-2x+8}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-2x+8\geq 0\right\}$

$-2x+8\geq 0$ Signifie $-2x\geq -8$ donc $x\leq\frac{-8}{-2}$ par suite : $x\leq 4$

Donc : $D_f=\left]-\infty;4\right]$

6) $f(x)=\frac{-x^2+2025x+1}{3x^2+2x-1}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+2x-1\neq 0\right\}$

$3x^2+2x-1=0$ $a=3$ et $b=2$ et $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 3\times(-1)=4+12=16=(4)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 3}=\frac{-2+4}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 3}=\frac{-2-4}{6}=\frac{-6}{6}=-1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}$ ou $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

7) $f(x)=-2023x^2+2024x+2025+\sqrt{3x^2+2x-1}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+2x-1\geq 0\right\}$

$3x^2+2x-1$: Soit Δ son discriminant : $c=-1$ et $b=2$ et $a=3$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 3\times(-1)=4+12=16=(4)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 3}=\frac{-2+4}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 3}=\frac{-2-4}{6}=\frac{-6}{6}=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

8) $f(x)=\sqrt{\frac{-2x+4}{x-3}}$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-2x+4}{x-3}\geq 0 \text{ et } x-3\neq 0\right\}$

$-2x+4=0$ Signifie $-2x=-4$ c'est-à-dire : $x=2$

$x-3=0$ Signifie $x=3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-2x+4$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2x+4}{x-3}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Donc : $D_f=\left]-2,3\right]$

9) $f(x)=\dfrac{-6x^3+\cos x-1}{\sqrt{3x^2+2x-1}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,3x^2+2x-1>0\right\}$

$3x^2+2x-1$: Soit Δ son discriminant : $c=-1$ et $b=2$ et $a=3$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times3\times(-1)=4+12=16=(4)^2>0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times3}=\dfrac{-2+4}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ et $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times3}=\dfrac{-2-4}{6}=\dfrac{-6}{6}=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

10) $f(x)=\dfrac{\sin x-2}{|x-2|-|x+1|}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x-2|-|x+1|\neq0\right\}$

$|x-2|-|x+1|=0$ Signifie $|x-2|=|x+1|$

Signifie $x-2=x+1$ ou $x-2=-(x+1)$

Signifie $x-x=2+1$ ou $x-2=-x-1$

Signifie $0=3$ ou $2x=1$

Signifie $x=\dfrac{1}{2}$ car $0=3$ (impossible)

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-12}}{x^2-8x}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x-12\geq0\ \ et\ \ x^2-8x\neq0\right\}$

$2x-12\geq0$ Signifie : $x\geq6$

$x^2-8x\neq0$ Signifie : $x(x-8)\neq0$ c'est-à-dire : $x\neq0$ et $x\neq8$

Donc : $D_f=\left[6,+\infty\right[-\{0;8\}=\left[6,8\right[\cup\left]8,+\infty\right[$

12) $f(x)=\sqrt{1-|2x-4|}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,1-|2x-4|\geq0\right\}$

$1-|2x-4|\geq0$ Signifie que : $|2x-4|\leq1$ Signifie que : $-1\leq2x-4\leq1$

Signifie que : $-1+4\leq2x-4+4\leq1+4$

Signifie que : $3\leq2x\leq5$

Signifie que : $\dfrac{3}{2}\leq x\leq\dfrac{5}{2}$

Donc : $D_f=\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$

13) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}-3}{x^6-28x^3+27}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^6-28x^3+27\neq0\ \ et\ \ x-2\geq0\right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^6 - 28x^3 + 27 \neq 0 \;\; et \;\; x \geq 2 \right\}$

$x^6 - 28x^3 + 27 = 0$ Signifie que : $\left(x^3\right)^2 - 28\left(x^3\right) + 27 = 0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^3$; nous obtenons l'équation :
$X^2 - 28X + 27 = 0$

Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4 \times 1 \times 27 = 676 = 26^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $X_1 = \dfrac{28-26}{2} = 1$ et

$X_2 = \dfrac{28+26}{2} = \dfrac{54}{2} = 27$

Donc : $x^3 = 1$ ou $x^3 = 27$.

Equivalent à : $x = 1$ ou $x = 3$

Par suite : $D_f = [2;+\infty[- \{1;3\} = [2;+\infty[- \{3\} = [2;3[\cup]3;+\infty[$

14) $f(x) = \dfrac{\cos^2 x - \sin x}{\sqrt{2}\sin x - 1}$. $\quad D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{2}\sin x - 1 \neq 0 \right\}$

$\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ Signifie $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Signifie $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

Signifie $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(\dfrac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Signifie $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi ; \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

15) $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2+2}$

$D_f = \{ x \in E / x^2 + 2 \neq 0 \}$

$x^2 + 1 = 0$ Signifie $x^2 = -2$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $x^2 + 2$ ne s'annule jamais

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

16) $f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{1-x}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / 2 + x \geq 0 \;\; et \;\; 1 - x \geq 0 \}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \;\; et \;\; x \leq 1 \}$ Donc $D_f = [-2,1]$

17) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x} + 2}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} + 2 \neq 0 \; et \;\; x \geq 0 \;\; et \;\; x - 1 \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \neq -2 \;\; et \;\; x \geq 0 \;\; et \;\; x \geq 1 \right\}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / \;\; x \geq 1 \}$

Donc : $D_f = [1;+\infty[$

Exercice03 : Les fonctions f et g définies respectivement par : $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ et $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Sont-elles égales ?

Solution : Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir : $\frac{x-1}{x+3}\geq 0$ et $x-1\neq 0$ donc ce qui donne $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1\geq 0$ et $x+3\succ 0$ ce qui donne $D_g=[1;+\infty[$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f\neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$ on a $f(x)=g(x)$

Exercice04 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x)=\frac{x-1}{x+1} & si \quad x\leq 1 \\ f(x)=\frac{x^2+6}{x(2-x)} & si \quad x>1 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) Calculer : $f(3)$; $f(0)$; $f(-2)$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\leq 1 \ et \ \ x+1\neq 0\}\cup\{x\in\mathbb{R}/x>1 \ et \ \ x(2-x)\neq 0\}$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\leq 1 \ et \ \ x\neq -1\}\cup\{x\in\mathbb{R}/x>1 \ et \ \ x\neq 0 \ \ et \ 2-x\neq 0\}$

Donc : $D_f==\{x\in\mathbb{R}/x\leq 1 \ et \ \ x\neq -1\}\cup\{x\in\mathbb{R}/x>1 \ \ et \ x\neq 2\}$

Donc : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1]\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$

Par suite : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]2;+\infty[$

2) calcul de : $f(3)$

On a : $3>1$ donc : $f(3)=\frac{3^2+6}{3(2-3)}=-\frac{15}{3}=-5$

Calcul de : $f(0)$

On a : $0\leq 1$ donc : $f(0)=\frac{0-1}{0+1}=\frac{-1}{1}=-1$

Calcul de $f(-2)$: On a : $-2<-1$ ou $-2\leq 1$

Donc : $f(-2)=\frac{-2-1}{-2+1}=\frac{-3}{-1}=3$

Exercice05 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=5x^2+3$

Montrer que $f(0)=3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$ donc $5x^2\geq 0$ car $5\succ 0$

Par suite $5x^2+3\geq 3$ et on a $f(0)=3$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq f(0)$

D'où : $f(0)=3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice06 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=3x^2+2$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Donner une interprétation graphique de ce résultat

4) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f Entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$

5) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$

6) Dresser le tableau de variation de f

Solution : 1) f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2 + 2 = 3x^2 + 2 = f(x)$ C'est à dire : $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) Une interprétation graphique : puisque f est une fonction paire alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie a la courbe de f .

4) soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

5) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ et $x_1 \neq x_2$ implique $x_1 + x_2 \succ 0$ Donc $3(x_1 + x_2) \succ 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Déduction des variations de f sur $]-\infty;0]$:

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et f est une fonction paire et le symétrique de $[0;+\infty[$ est $]-\infty;0]$

Alors : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

6) <u>Résumé</u> : tableau de variation **:** $f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

Exercice07 : Soit g une fonction tel que : $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

1) Déterminer D_g .

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de g entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$.

3) Etudier les variations de g sur les intervalles $I =]-\infty;-1[$ et $J =]-1;+\infty[$.

4) Dresser son tableau de variation de f.

5) En déduire une comparaison des nombres : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Solution : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

1) On a $g(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à: $x+1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq -1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Soient $x_1\in D_g$ et $x_2\in D_g$ tq $x_1\neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

3) a) Sur $I=]-\infty;-1[$

Soit $x_1\in]-\infty;-1[$ et $x_2\in]-\infty;-1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec -1$ et $x_2\prec -1$ Donc $x_1+1\prec 0$ et $x_2+1\prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $I=]-\infty;-1[$

D'où : g est strictement croissante sur $I=]-\infty;-1[$

b) Sur $J=]-1;+\infty[$

Soit $x_1\in]-1;+\infty[$ et $x_2\in]-1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc : $x_1\succ -1$ et $x_2\succ -1$ Donc $x_1+1\succ 0$ et $x_2+1\succ 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $J=]-1;+\infty[$

D'où : g est strictement croissante sur $J=]-1;+\infty[$

4) <u>Résumé</u> : tableau de variation **:**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

5) On a $-\sqrt{2}\in]-\infty;-1[$ et $-\sqrt{3}\in]-\infty;-1[$ et $-\sqrt{3}<-\sqrt{2}$

D'après le tableau de variation de g on a : g est strictement croissante sur $J=]-1;+\infty[$

Alors : $g(-\sqrt{3})<g(-\sqrt{2})$

Donc : $\dfrac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}<\dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+1}$

Donc : $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

Exercice08 : On considère les fonctions : $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=\frac{x}{x-2}$ et (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) a) Vérifier que : $f(x)=(x-1)^2-1$ si $x\in D_f$

b) Vérifier que : $g(x)=1+\frac{2}{x-2}$ si $x\in D_g$

3)a) Donner la nature de la courbe de f et ces éléments caractéristique
b) Dresser le tableau de variation de f
4)a) Donner la nature de la courbe de g et ces éléments caractéristique
b) Dresser le tableau de variation de g
5)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

6)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

7)Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé$(O;\vec{i};\vec{j})$

8) Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq g(x)$

10)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h

b) Montrer que la fonction h est paire
c)Vérifier que $h(x)=g(x)$pour tout x de$\mathbb{R}^+-\{2\}$

11)Tracer la courbes (C_h) de h et (C_g) dans un même repère orthonormé$(O;\vec{i};\vec{j})$

12)Soit K la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé$(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Solution :1) $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=\frac{x}{x-2}$

Dans l'expression de $f(x)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle : Donc $D_f=\mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x-2=0$ soit $x=2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

2) a) Vérifions que : $f(x)=(x-1)^2-1$ si $x\in\mathbb{R}$

$f(x)=x^2-2x=x^2-2x+1^2-1^2=x^2-2\times x\times1+1^2-1^2$

Donc : $f(x)=(x-1)^2-1$ (la forme canonique)

b) Vérifions que : $g(x)=1+\frac{2}{x-2}$ si $x\in D_g$

$1+\frac{2}{x-2}=\frac{x-2+2}{x-2}=\frac{x}{x-2}=g(x)$(La forme réduite)

3)a) <u>Méthode1 :</u> On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=0$ $f(x)=x^2-2x\ \left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times1}=-1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(1)=1^2-2\times1=-1$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)=W(1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

<u>Méthode2 :</u> On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (forme canonique)

Dans un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x)=(x-1)^2-1$ si $x\in\mathbb{R}$: $\alpha=-1$ et $\beta=-1$

Dans un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W(-(-1);-1)$ c'est-à-dire : $W(1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-(-1)=1$

b) Le tableau de variations de f : $a=1>0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

4)a) <u>Méthode1 :</u>On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $g(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ alors $\left(C_g\right)$ est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $g(x)=1+\frac{2}{x-2}$ avec : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $k=2>0$

Donc $\left(C_g\right)$ est une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=2$ et $y=1$

Et puisque : $k=2>0$ alors : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;2[\ \ et\ \ ]2;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

<u>Méthode2 :</u> (on utilisant un résumé de notre cours)

Si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq0$ alors $\left(C_g\right)$ est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

1iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\succ0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\frac{1x+0}{x-2}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{-2}{1}=2$ et $y=\frac{1}{1}=1$

$$\det g=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\times(-2)-1\times 0=-2<0$$

Donc : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$

5)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

$f(x)=x^2-2x$

a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x=0$

Signifie $x(x-2)=0$

Signifie $x=0$ ou $x-2=0$

Signifie $x=0$ ou $x=2$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $O(0;0)$ et $A(2;0)$

Donc : $(C_f)\cap(ox)=\{A(2,0);O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times 0=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

Donc : $(C_f)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

6)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

$g(x)=\frac{x}{x-2}$

a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $g(x)=0$

$g(x)=0$ Signifie $\frac{x}{x-2}=0$

Signifie $x=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $O(0;0)$

Donc : $(C_g)\cap(ox)=\{O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $g(0)=\dfrac{0}{0-2}=0$

Donc le point d'intersection de la courbe $\left(C_g\right)$ avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

$\left(C_g\right)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

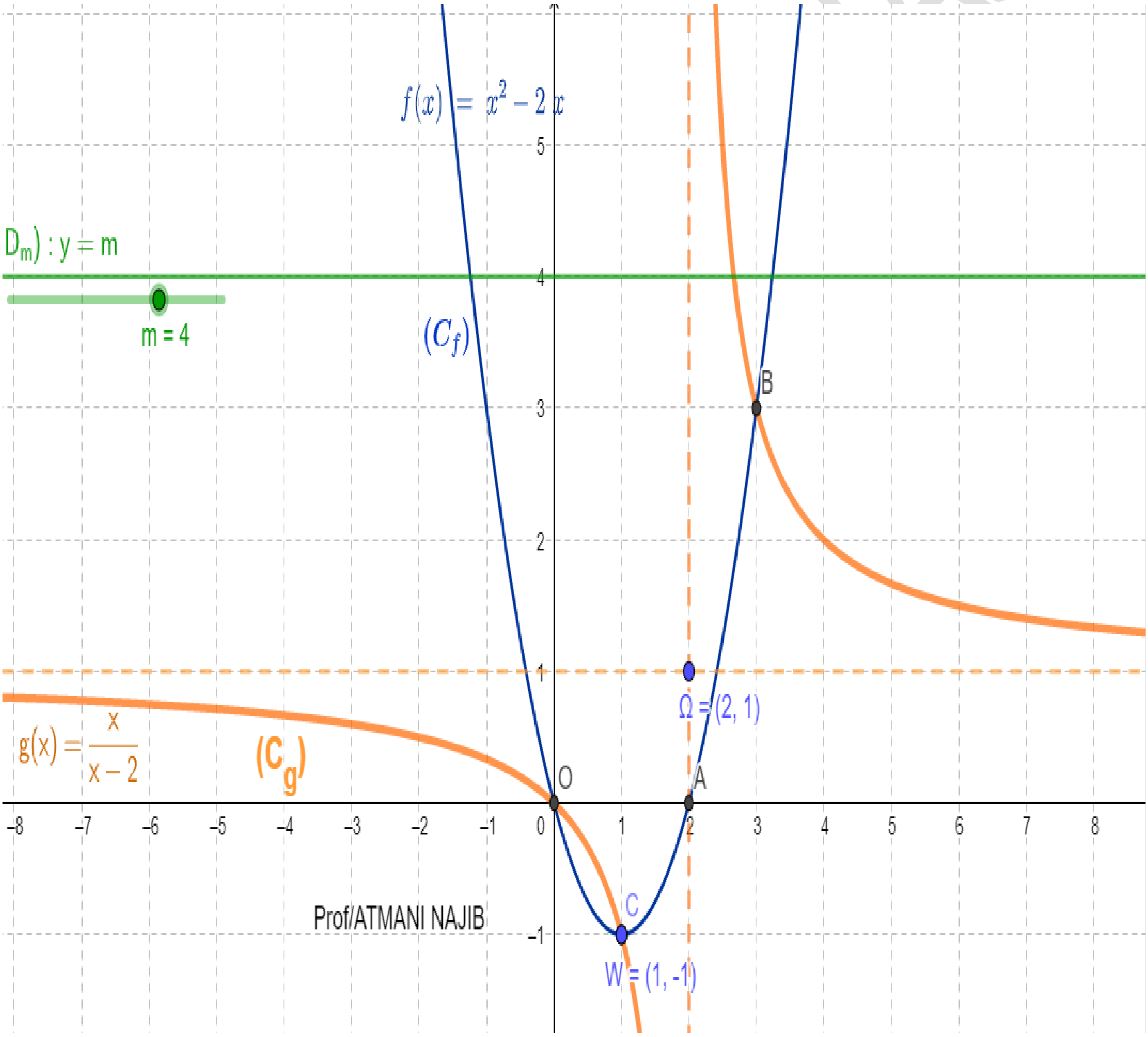
7)Représentation des courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ dans le même repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

La courbe $\left(C_g\right)$:

-2	**-1**	**0**	**2**	**3**	4	4
5/3	2	3		3	2	5/3

La courbe $\left(C_f\right)$: $f(x)=x^2-2x$

x	2	3	4
$f(x)$	0	3	8



8) Déterminons algébriquement les points d'intersection de $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{2\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie que : $x^2-2x=\frac{x}{x-2}$

Signifie que : $x(x-2)-\frac{x}{x-2}=0$

Signifie que : $x\left(x-2-\frac{1}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2)^2-1}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2)^2-1^2}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $\frac{x(x-3)(x-1)}{x-2}=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x(x-3)(x-1)=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x=0$ ou $x-1=0$ ou $x-3=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=1$ ou $x=3$

Et par suite : $(C_f)\cap(C_g)=\{C(1,-1);O(0,0);B(3,3)\}$

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\le g(x)$

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\le g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f) est au-dessous de (C_g)

Donc : graphiquement : $S=[0,1]\cup]2,3]$

10)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminons l'ensemble de définition D_h

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/|x|-2\neq 0\}$; $|x|-2=0$ Signifie $|x|=2$

Signifie $x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

b) Montrons que la fonction h est paire

- si $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$

- $h(-x)=\frac{|-x|}{|-x|-2}=\frac{|x|}{|x|-2}=h(x)$ C'est à dire : $h(-x)=h(x)$

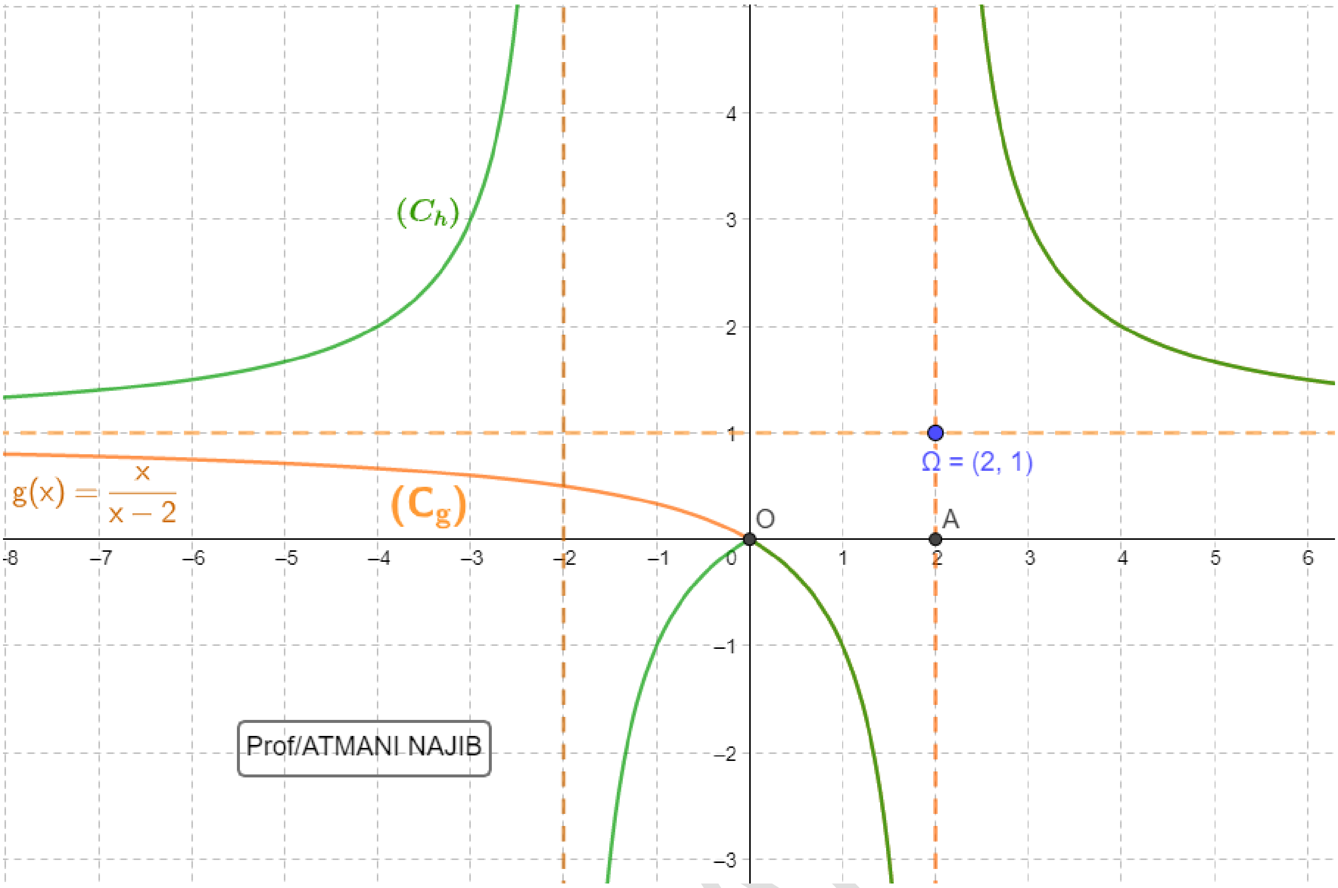
Donc h est une fonction paire,

c)Vérifions que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

Soit : $\mathbb{R}^+-\{2\}$ on a : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}=\frac{x}{x-2}=g(x)$ car $|x|=x$

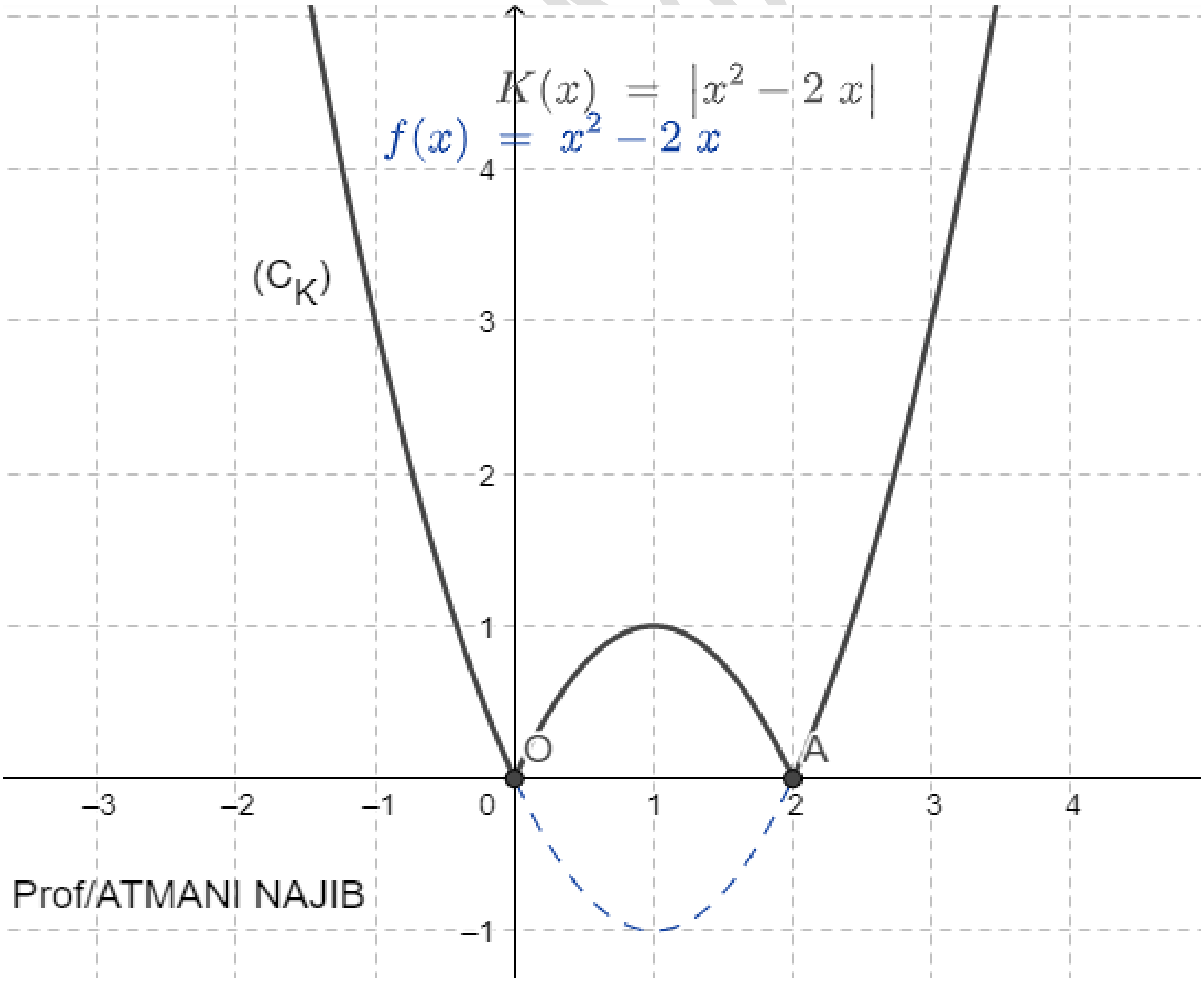
Donc : $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

11) Représentation de la courbes (C_h) de h dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

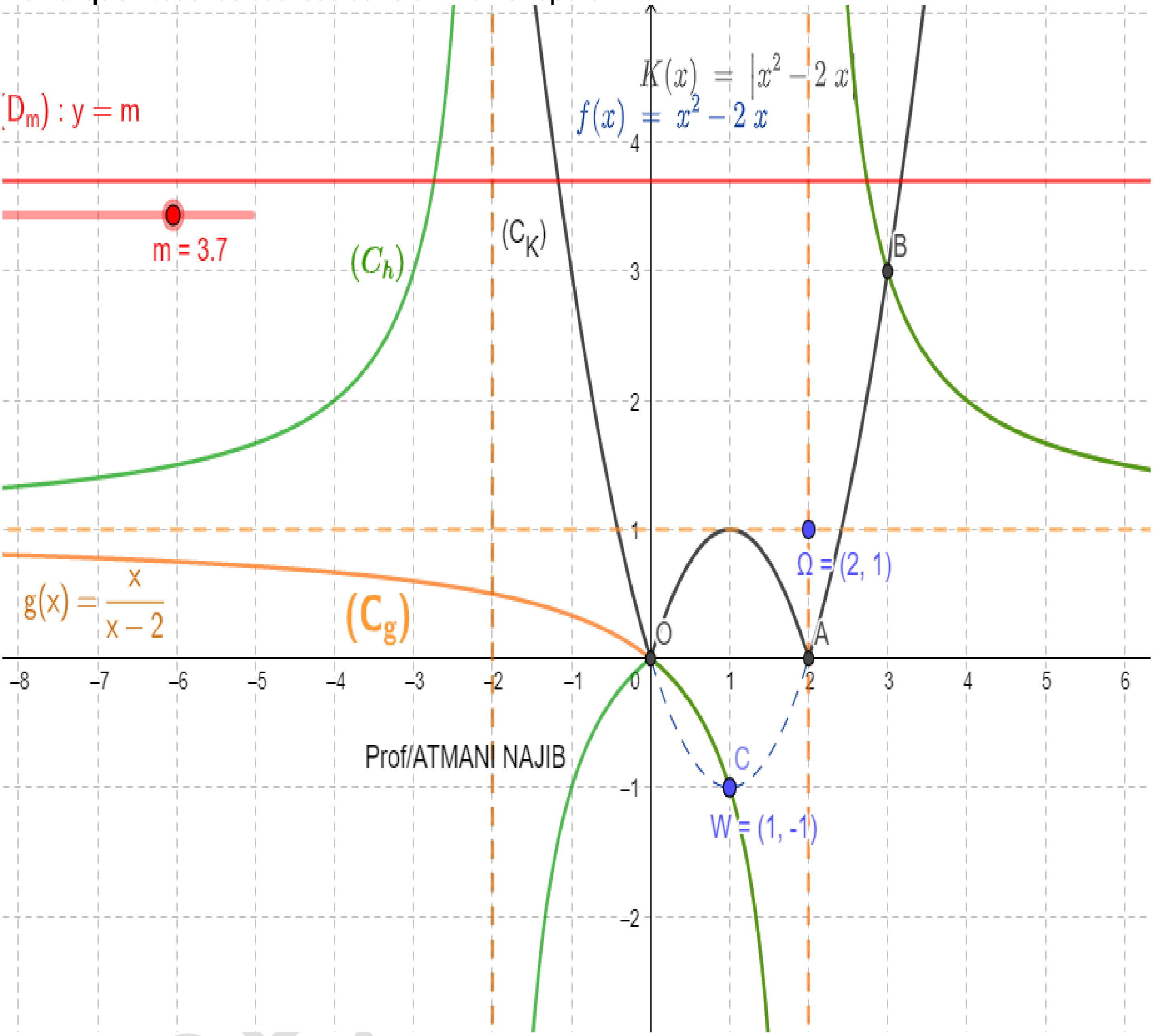


12)Soit K la fonction définie par : $K(x) = |f(x)|$

a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



Remarque : tous les courbes dans un même repère :



b) Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Le nombre de solutions de l'équation $K(x)=m$: est le nombre de points d'intersection de (C_K) et la droite (D_m) d'équation : $(D_m)\quad y=m$

⊳ Si $m<1$: l'équation n'a pas de solutions
⊳ Si $m=0$: l'équation admet deux solutions
⊳ Si $0<m<1$: l'équation admet 4 solutions
⊳ Si $m=1$: l'équation admet 3 solutions
⊳ Si $m>1$: l'équation admet deux solutions

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien